



حکومەتی هەرێمی کوردستان - عێراق
وێزارەتی پەرۆدە - پەرێوه پەرایی گشتی پرۆگرام و چاپەمەنێیەکان

بیرکاری بو هەمووان

کتیپی خویندکار
پۆلی یازدەهەمی ویژەیی

چاپی هەفتەم
٢٠١٥ ز / ٢٧١٥ کوردی / ١٤٣٦ ک

سہرپہرشتی ہونہری چاپ

عوسمان پیرداود کواز

ناری محسن احمد

بەشی 1 ئامار و ئەگەر Statistics And Probability

- 1 پێوههکانی پووکردنه چهق
- 2 Measures of Central Tendency
- 10..... Measures of Dispersion پێوههکانی پهرتبوون
- 15..... Laws of Probability یاساکانی ئەگەر
- 32..... Counting Techniques تهکنیکی ژماردن

بەشی 2 نهخشهکان Functions

- 32 Functions نهخشهکان
- 40 Linear Functions نهخشه هێلپیهکان
- 3 شیوه جیاوازهکانی هاوکێشه ی راسته هێل
- 46 Various forms of the equation of a line
- 4 تهریببوون و ئهستوونبوونی راسته هێلهکان
- 52 Parallel and Perpendicular Lines
- 57 Quadratic Functions نهخشه دووجاکان

بەشی 3 سیستمی هاوکێشه هێلپیهکان Systems Of Linear Equations

- 1 شیکارکردنی سیستمی هێلی به له جیاتیدانان
- 66 Solving Linear Systems by Substitution
- 2 شیکارکردنی سیستمی هێلی به لابردين
- 72 Solving Linear Systems by Elimination
- 3 شیکارکردنی سیستمی هێلی به پرونکردنه وهی
- 77 Solving Linear Systems Graphically

83

سیستمی لاسه‌نگه هیلاییه‌کان Systems of Linear Inequalities

4

به‌شی

- 1 لاسه‌نگه هیلاییه یه‌ك نه‌زانراوه‌کان
84 Linear Inequalities in one unknown
- 2 لاسه‌نگه هیلاییه دوو نه‌زانراوه‌کان
90 Linear inequalities in two unknowns
- 3 سیستمی لاسه‌نگه هیلاییه‌کان
98 System of Linear Inequalities

103 Matrices

ریزکراوه‌کان

5

به‌شی

- 1 ریزکراوه‌کان Matrices
104
- 2 سنوورده‌ه‌کان و یاسای کرامر
112 Determinants and Cramer's Rule

119 Differential

جیاکاری

6

به‌شی

- 1 ئامانج و به‌رده‌وامی Limit and Countmuity
120
- 2 داتاشراوی یه‌که‌م 1 Derivative
120
- 3 داتاشراوی دووهم 2 Derivative
126
- 4 جیبه‌جێکردنه‌کانی داتاشراو Applications of Derivative
132

نّامار و نّهگهر

Statistics and Probability

به شى

1

دهتوانين نّامار و نّهگهر بهكاربئين بؤ شىكردهوهى پيدراوهكانى
كه پهيوهستن به چاوهروانى له ريز و دهرئه نجامكردنى پوختهكانى
پهيوهستن به ماوهى چاوهروانييهكه.



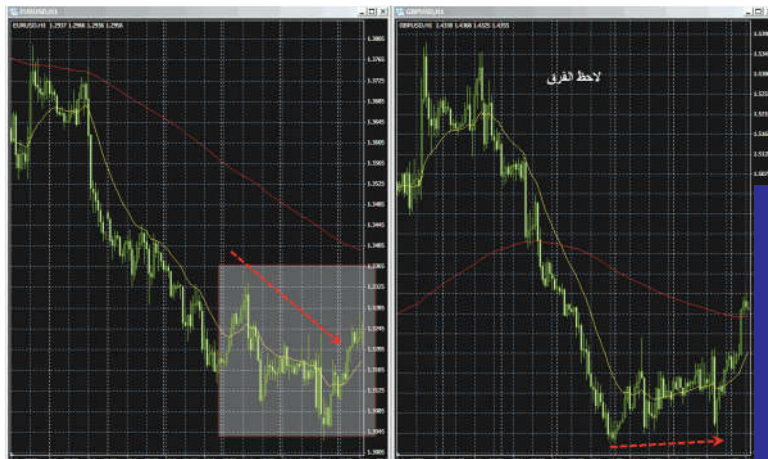
وانهكان

1. پيؤرهكانى پروكرده
چهق.
2. پيؤرهكانى بهرتبون.
3. ياساكانى نّهگهر
4. تهكنيكى ژماردن.

دهتوانين نّامار و نّهگهر
بهكاربئين بؤ
شىكردهوهى
پيدراوهكانى كه
پهيوهستن به
چاوهروانى له ريز و
دهرئه نجامكردنى
پوختهكانى پهيوهستن
به ماوهى
چاوهروانييهكه.

ماوهى چاوهروانى
پيؤراو لهسهرتاي نّو
خالهوه برىتييه له 4872
چركه.

وانه‌ی
1



بوجی؟

نامارناسه کان
پیۆره کانی روو کردنه
چهق به کار دینن بو
شیکردنه وی پیذراوه کانی
کهله بواره کانی زانست و
ئابووری و کوومه ئانسی و
به ریۆه بردن دینه کایه وه.

● دۆزىنەۋەي پېۋەرەكانى
پۈۈكرىنە چەق بۇ كۆمەلە
پېدراۋىك.

Vocabulary

Increasing

دوو باره بوونه وهی

Decreasing

Cumulative frequency

ناوہندہ ژمیرہیی

Mean

ناوہراستہ

Median

باو (مؤد)

Mode

بیرھینانہ وہ:

- **ناوهنده ژميرهي Mean** پيوانه‌ي پوخته‌ي کومه‌له پيدراوه‌کانه که دهلييت ناوهندی نمره‌کاني خویندکارانی پوټي يانزه‌هه‌می ويزهي له‌بیرکاریدا: 70% ناماژيه بو ټوي که ټو نمرانه به‌گشتي گونجاوون. [بو دوزينه‌وي ناوهنده، سهرجه‌می پيدراوه‌کاني کومه‌له‌که دابه‌شکه به‌سهر ژماره‌ي پيدراوه‌کان].
- **ناوه‌راسته Median** پيوانه‌يه بو نيشاندانی ناوهندی پيدراوه‌کاني کومه‌له‌يه که دوی پيزکردنيان به‌ره و ژورور يان به‌ره و ژير. که دهلييت ناوه‌راسته‌ي نمره‌کاني خویندکارانی پوټي يانزه‌هه‌می ويزهي له‌بیرکاری بریتيه له 65%، مانای ټويه‌يه ټو نمره‌يه، نمره‌کاني خویندکاران که وه‌ريانگرتووه بو دوو به‌شي يه‌کسان به‌شده‌کات دوی پيزکردنيان به‌ره و ژورور يان به‌ره و ژير. [بو دوزينه‌وي ناوه‌راسته تهنه‌ا ټوه له‌سهر ټويه پيدراوه‌کان به‌ره و ژورور يان به‌ره و ژير ريزيکه‌ي و سه‌يري ټو پيدراوه بکه‌يت که که‌وتوټه ناوه‌راسته. ټه‌گر ژماره‌ي پيدراوه‌کان تاکيټ، ټو کاته يه‌ک پيدراو ده‌که‌ويټه ناوهند پي دوتري ناوه‌راسته. به‌لام ټه‌گر ژماره‌ي پيدراوه‌کان جوت بيت ټوا دوو پيدراو ده‌که‌ونه ناوهند ټو‌کاته ناوهندی ټو دوو پيدراوه ده‌بيټه ناوه‌راستی کومه‌له‌که].
- **باو Mode** پيوانه‌يه بو ديار خستنی ټو به‌هايانه‌ي که زورتري دووباره بوونه‌ويان هه‌يه له کومه‌له پيدراوه‌کان بو دوزينه‌وي (باو)، خشته‌ي دووباره‌بوونه‌وه بو کومه‌له پيدراوه‌کان دروست بکه، که له دوو ريژ پيکديت ريژي يه‌که‌م پيدراوه‌کان له‌خووه‌ده‌گريټ به‌بي دووباره بوونه‌وه، ريژي دووهم له ژير ههر پيدراويک ژماره‌ي جاره‌کاني دووباره‌بووته‌وه له‌خووه‌ده‌گريټ [باو بریتيه له‌و پيدراوه‌ي که زورتري دووباره‌بوونه‌وي هه‌يه].
- **بو ههر کومه‌له پيدراويک يه‌ک ناوهنده ژميرهي يه‌ک ناوه‌راسته هه‌يه و ده‌کريټ پتر له‌يه‌ک باوي هه‌بيټ، يان باوي ههرنه‌بيټ.**

ناۋەندە ژمىرەى و ناۋەرپاستە و باو بۇ ئەم كۆمەلە پىدراۋانە بدۆزەۋە. $\{8,2,3,4,2,5,3,4,5,2,3,4\}$

$$\bar{x} = \frac{8+2+3+4+2+5+3+4+5+2+3+4}{12} = \frac{15}{4} = 3.75$$

ناۋەرپاستە: پىدراۋەكان بەرەو ژوور پىزىكە $2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,8$ واديارە كە ژمارەى پىدراۋەكان جووتە ئەو دوو پىدراۋە ۋەربگرە كە دىكەۋنە ناۋەندەكە برىتتىن لە 4 ، 3 ناۋەندىان بدۆزەۋە كە دىكەتە $3.5 = \frac{3+4}{2}$ واتا ناۋەرپاستەى كۆمەلەكە دىكەتە 3.5 .

باو: خىشتەى دووبارە بوۋنەۋەى پىدراۋەكان دروستىكە.

بەها	2	3	4	5	8
دووبارەبوۋنەۋە	3	3	3	2	1

كۆمەلەكە 3 باۋى ھىيە ئەمانەن 2 و 3 و 4 .

ھەۋلىدە

ناۋەندە ژمىرەى و ناۋەرپاستە و باو بۇ ھەرىكە لەم كۆمەلە پىدراۋانە بدۆزەۋە.

$$\{6,9,3,8\} \text{ ا } \quad \{2,5,6,2,6\} \text{ ب }$$

لەكاتى شىكرىدەۋەى پىدراۋە ئامارىيەكان لەكۆبۈنەۋەى چەشندارەكاندا، زۆرچار پىۋىست بەرىزكرىدنى ئەو پىدراۋانە دەبىت بەرەو ژوور يان بەرەو ژىر و ديارىكرىدنى بەشە كۆمەلەكانيان. ئامارناسەكان بۇ ئەم مەبەستە خىشتەى دووبارەبوۋنەۋەى كەلەكە بوۋى بەرەو ژوور يان بەرەو ژىر بەكاردەھىتن. «خىشتەى دووبارەبوۋنەۋەى كەلەكە بوۋى بەرەو ژوور» لە 3 ستون پىكىدېت يەكەمىيان چەشەكان لە خۇ دەگرېت كەبەرەو ژوور پىزىكاۋن ۋە دوۋەمىيان بەرامبەر ھەر چەشەك دووبارەبوۋنەۋەى كەلەكە لە خۇ دەگرېت بەلام سىيەمىيان سەرجمى دووبارەبوۋنەۋەى ئەو چەشە و دووبارەبوۋنەۋەى چەشەكانى پىشخۇى لە خۇ دەگرېت،

«خىشتەى دووبارەبوۋنەۋەى كەلەكە بوۋى بەرەو ژىر» لە 3 ستون پىكىدېت كەيەكەم و دوۋەمىيان ۋەك دووبارەبوۋنەۋەى كەلەكە بوۋى بەرەو ژوور ۋايە بەلام ستوۋنى سىيەم جياۋازى نىۋان سەرجمى دووبارە بوۋنەۋەكان و سەرجمى دووبارەبوۋنەۋەكانى پىشخۇى لە خۇ دەگرېت.

دروستكرىدنى خىشتەكانى دووبارەبوۋنەۋەى كەلەكەبوۋ.

ئەم خىشتەيەى خوارۋە دابەشبوۋنى ئەندامانى يانەى شەترەنج لە يەككە لە پارىزگاكان بەپىي تەمەنيان نىشانىدەدات. خىشتەى دووبارەبوۋنەۋەى كەلەكەبوۋى بەرەو ژىر و بەرەو ژوورى بۇ دروستىكە.

چەشنى تەمەن	$[10,12[$	$[12,14[$	$[14,16[$	$[16,18[$	$[18,20[$	$[20,22[$
دووبارەبوۋنەۋە	30	40	50	60	40	20

ب دووبارەبوۋنەۋەى كەلەكەبوۋى بەرەو ژىر

چەشنى	دووبارە بوۋنەۋە	دووبارەبوۋنەۋەى كەلەكەبوۋى بەرەو ژىر
$[10,12[$	30	240 \ominus
$[12,14[$	40	210 \ominus
$[14,16[$	50	170 \ominus
$[16,18[$	60	120 \ominus
$[18,20[$	40	60 \ominus
$[20,22[$	20	20 \ominus

ا دووبارەبوۋنەۋەى كەلەكەبوۋى بەرەو ژوور

چەشنى	دووبارە بوۋنەۋە	دووبارەبوۋنەۋەى كەلەكەبوۋى بەرەو ژوور
$[10,12[$	30	30 \oplus
$[12,14[$	40	70 \oplus
$[14,16[$	50	120 \oplus
$[16,18[$	60	180 \oplus
$[18,20[$	40	220 \oplus
$[20,22[$	20	240 \oplus

خشتەى دووبارەبوونەوھى كەلەكەبووى بەرەو ژوور يارمەتیت دەدات بۆ وللامدانەوھى ئەو پرسىارانەى وەك ژمارەى ئەو ئەندامانەى كە تەمەنيان لە 20 سال كەمترە چەندە؟ و خشتەى دووبارەبوونەوھى كەلەكەبووى بەرەوژر يارمەتیت دەدات بۆ وللامدانەوھى ئەو پرسىارانەى وەك ژمارەى ئەو ئەندامانەى كە تەمەنى ھەريەكەيان لە 20 سال كەمتر نييە؟ نوسىنى ئەو دوو خشتەيە وەك ئەو شۆوھى خوارەوھە يارمەتیت دەدات بۆ وللامدانەوھى ئەو جۆرە پرسىارانە.

چەشن	دووبارە بوونەوھە	دووبارەبوونەوھى كەلەكەبووى بەرەو ژوور
كەمتر لە 12	30	30
كەمتر لە 14	40	70
كەمتر لە 16	50	120
كەمتر لە 18	60	180
كەمتر لە 20	40	220
كەمتر لە 22	20	240

چەشن	دووبارە بوونەوھە	دووبارەبوونەوھى كەلەكەبووى بەرەو ژر
10 يان زياتر	30	240
12 يان زياتر	40	210
14 يان زياتر	50	170
16 يان زياتر	60	120
18 يان زياتر	40	60
20 يان زياتر	20	20

خشتەى دووبارەبوونەوھى كەلەكەبووى بەرەو ژوور و بەرەو ژر بۆ ئەم پيډراوھە كۆوھبووى چەشندارانەى خوارەوھە دروستبکە.

چەشن	[30,40[[40,50[[50,60[[60,70[[70,80[
دووبارەبوونەوھە	5	10	15	12	8

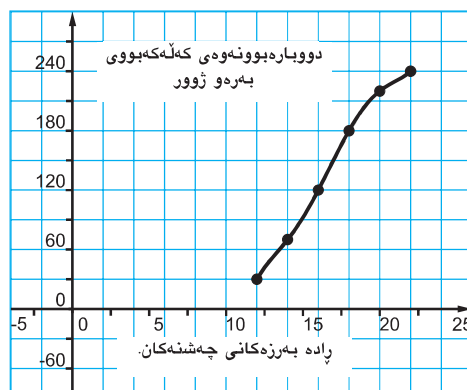
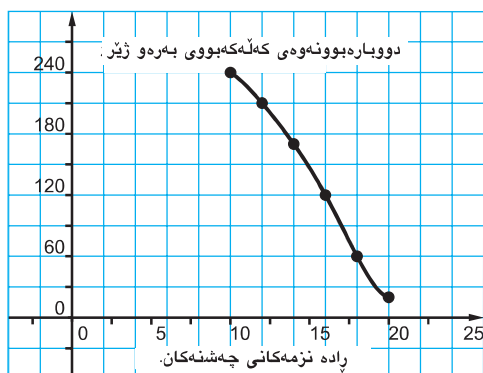
بۆ دۆزینەوھى ناوەندە ژميرەيى كۆمەلە پيډراوېكى چەشندار، خشتەيەكى دوو پړىزى دروستبکە يەكەميان چەقە چەشنە جياوازەكان لە خوځگرېت دووهميان لە ژر ھەر چەقە چەشنك ژمارەى دووبارەبوونەوھى چەشنى خوځى لە خوځ دەرگريت لە پاشان ناوەندى ئەو ناوەندە خشتەيەى بەدەستت ھيټاوە بدۆزەوھە.

ھەر وھە لە پيډراوھە چەشنەدارەكان چەشنى يان چەشنەكانى باو ديارىبکەكە برىتييە لە و چەشنەى يان ئەو چەشنانەى زۆرتريى دووبارە بوونەوھيان ھەيە. بەلام ديارىکردنى ناوھراستەى پيډراوھەكانى چەشندار كاريكى ئاسان نييە لەم وانەيەدا فير دەبيت چۆن بەشۆوھى جەبرى و روونکردنەوھيى دەيدۆزىوھە.

بۆ دۆزینەوھى ناوھراستە بە روونکردنەوھيى، خشتەى دووبارەبوونەوھى كەلەكەبووى بەرەوژوور بەويئەى روونکردنەوھى بنويئە كە پيى دەوتريت چەماوھى كەلەكەبووى بەرەوژوور. ھەر وھەا بەنواندى خشتەى دووبارەبوونەوھى كەلەكەبووى بەرەوژر بەشۆوھى ويئەى روونکردنەوھيى دەوتريت چەماوھى كەلەكەبووى بەرەوژر. ئەو كاتە ناوھراستى كۆمەلە پيډراوھەكە دەكاتە پۆوتانى يەكەم بۆ خالى يەكتر برپىنى چەماوھەكە لەگەل راستە ھيلى ئاسويى $y = m$ كە m دەكاتە نيوھى گەورەتريى دووبارەبوونەوھى كەلەكەبووھەكە.

بۆ دروستکردنى چەماوھى كەلەكەبووى بەرەوژوور: تەوھرى يەكەم x بۆ بەرزتريى راڊەى چەشنەكان دابنى و تەوھرى دووھم y بۆ دووبارەبوونەوھيان دابنى. ھەرچەشنك بەخالېك دەنويئريت كە پۆوتانى يەكەمى بۆ بەرزتريى راڊەى چەشنەكان و پۆوتانى دووھم بۆ دووبارە بوونەوھەكە. پاشان چەماوھەيەكى گونجاو بكيشەو خالەكان بەيەك بگەيئە: بۆ دروستکردنى چەماوھەيەكى كەلەكە بووى بەرەوژر: تەوھرى يەكەم x بۆ نزمترین راڊەى چەشنەكان و تەوھرى دووھم y بۆ دووبارەبوونەوھيان دابنى. بەمەرجيک ھەرچەشنك بەخالېك دەنويئريت كە پۆوتانى يەكەمى بۆ راڊە نزمەكانى چەشنەكان و پۆوتانى دووھمى بۆ دووبارەبوونەوھەكە، پاشان بە چەماوھەيەكى گونجاو خالەكان بەيەك بگەيئە.

چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوورو بەرەو ژێر بۆ پێدراوەکانی نمونە 2 بکێشه.



هەولێدە چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوورو و بەرەو ژێر بکێشه بۆ ئەم پێدراوانە ی لەم خشتەیدا نیشاندران.

چەشن	[55,60[[50,55[[45,50[[40,45[[35,40[[30,35[[25,30[[20,25[
دووبارەبوونەوه	5	7	8	12	7	5	4	2

بۆ دیاریکردنی ناوەراستە ی کۆمەڵە پێدراویکی چەشنەدار چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوورو یان بەرەو ژێر بەکار دێنین بۆ ئەنجامدانی ئەم کارە، ئەم هەنگاوانە ئەنجامبدە.

1. دروستکردنی خشتە ی دووبارەبوونەوه ی کەڵەکەبووی بەرەو ژووریان بەرەو ژێر.
2. دروستکردنی چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژوورو یان بەرەو ژێر.
3. دروستکردنی پاستەهێلی $y = m$ کە m دەکاتە نیو ی گۆرەترین دووبارەبوونەوه ی کەڵەکەبوو.
4. دیاریکردنی پۆتانی یەکەم بۆ خالی یەکتەرپینی چەماوەی کەڵەکەبووی بەرەو ژووریان بەرەو ژێرلەگەڵ پاستەهێلەکە.

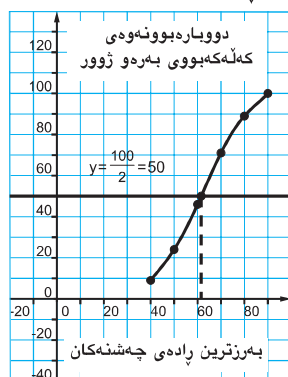
دیاریکردنی ناوەراستە بە پوونکردنەوه ی

ناوەراستە بۆ ئەم پێدراوانە بدۆزەوه.

چەشن	[30,40[[40,50[[50,60[[60,70[[70,80[[80,90[
دووبارەبوونەوه	9	15	22	25	18	11

وێنە ی پوونکردنەوه ی کەڵەکەبووی بەرەو ژوورو پاستەهێلی $y = m$

خشتە ی دووبارەبوونەوه ی کەڵەکەبووی بەرەو ژوورو



چەشن	دووبارەبوونەوه	دووبارەبوونەوه ی کەڵەکەبوو
[30,40[9	9
[40,50[15	24
[50,60[22	46
[60,70[25	71
[70,80[18	89
[80,90[11	100

و دیارە ناوەراستە بەنزیکارو ی دەکاتە 61.

چەشن	[40,50[[50,60[[60,70[[70,80[[80,90[[90,100[
دووباره‌بوونهوه	30	50	80	100	70	10

ههروه‌ها ده‌توانیت جەبر بەکاربهێنی بۆ دیاریکردنی ناوهراسته‌ی کۆمه‌له‌ پیدراویکی چه‌شدار، که هه‌نگاوکانی به‌م شیوه‌ ده‌بی‌ت.

1. خشته‌ی دووباره‌بوونه‌وه‌ی که‌له‌که‌بووی به‌ره‌وژوور دروستبکه.
2. ئەو چه‌شنه‌ دیاریبکه‌که‌ نیوه‌ی دووباره‌بوونه‌وه‌ی که‌له‌که‌بووی کۆتایی تێدايه. ئەو چه‌شنه‌ پێی ده‌لێن چه‌شنی ناوه‌راسته.

$$M = A + \left(\frac{\sum \frac{F_i}{2} - F_2}{F_3} \right) \times L \quad 3. \text{ ئەم یاسایه‌ به‌کاربهێنه‌ بۆ دۆزینه‌وه‌ی ناوه‌راسته.}$$

کاتیك

- A نزمترین پاده‌ی چه‌شنی ناوه‌راسته‌یه.
- $\sum \frac{F_i}{2}$ گه‌وره‌ترین دووباره‌بوونه‌وه‌ی که‌له‌که‌بووه.
- F_2 دووباره‌بوونه‌وه‌ی که‌له‌که‌بووی به‌ره‌و ژووره‌ که‌ راسته‌وخۆ پێش چه‌شنی ناوه‌راسته‌ دێت.
- F_3 دووباره‌بوونه‌وه‌ی چه‌شنی ناوه‌راسته.
- L درێژی چه‌شنه. (درێژی چه‌شنی ناوه‌راسته)

دیاریکردنی ناوه‌راسته‌ به‌پێگای جەبری

ناوه‌راسته‌ بۆ پیدراوه‌کانی نمونه‌ی 4 بدۆزهوه.

خشته‌ی دووباره‌بوونه‌وه‌ی که‌له‌که‌بووی به‌ره‌و ژوور

نیوه‌ی گه‌وره‌ترین دووباره‌بوونه‌وه‌ی که‌له‌که‌بوو ده‌کاته 50، ئەمه‌ش سه‌ر به‌ چه‌شنی [60,70]. که‌واته، چه‌شنی ناوه‌راسته‌ بریتیه‌ له [60,70] ده‌زانی که‌ $A = 60$ و $\sum \frac{F_i}{2} = 50$ نیوه‌ی گه‌وره‌ترین دووباره‌بوونه‌وه‌ی که‌له‌که‌بووه، $F_2 = 46$ دووباره‌بوونه‌وه‌ی که‌له‌که‌بووی به‌ره‌و ژووری ئەو چه‌شنه‌یه‌ که‌ راسته‌وخۆ پێش چه‌شنی ناوه‌راسته‌ دێت. $F_3 = 25$ دووباره‌بوونه‌وه‌ی چه‌شنی ناوه‌راسته‌یه، $L = 10$.

چەشن	دووباره‌بوونه‌وه‌ی که‌له‌که‌بووی به‌ره‌و ژوور	دووباره‌بوونه‌وه‌ی که‌له‌که‌بووی به‌ره‌و ژوور
[30,40[9	9
[40,50[24	15
[50,60[46	22
[60,70[71	25
[70,80[89	18
[80,90[100	11

له‌مه‌وه‌ ده‌رده‌چێت که:

$$M = 60 + \left(\frac{50 - 46}{25} \right) \times 10 = 61.6$$

ئەم ئەنجامه‌ شیاوی وه‌لامی نمونه‌که‌ی پێشوو دووپات ده‌کاته‌وه‌ (به‌نزیکه‌یی 61) که‌ به‌پێگای پرونکردنه‌وه‌یی دیاریکرا.

هه‌ولبده‌ به‌ پێگای جەبری ناوه‌راسته‌ بۆ ئەو پیدراوانه‌ی خواره‌وه‌ بدۆزهوه.

چەشن	[12,15[[15,18[[18,21[[21,24[[24,27[
دووباره‌بوونه‌وه‌	30	50	80	100	70

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

- 1 کام لە هەر سێ پێوه‌ره‌کانی پووکردنه چەق بۆ کۆمه‌له‌ پێدراوه‌ چه‌شنداره‌کان دیاریکردنیان گرانتره‌؟ وه‌لامه‌که‌ت پوونبکه‌وه‌.
- 2 وادابنی چه‌شنی یه‌که‌م و چه‌شنی کۆتاییه‌ت له‌ نیوان کۆمه‌له‌ پێدراوه‌کان لا‌برد، ئایا ناوه‌راسته‌ ده‌گۆریت؟ وه‌لامه‌که‌ت لێکبه‌ده‌ به‌نموونه‌.
- 3 کۆمه‌له‌ پێدراویک بنوسه‌ که‌ چه‌شندار نه‌بێت، به‌مه‌رجێک ناوه‌نده‌ ژمێره‌یی و ناوه‌راسته‌یان یه‌کسانبێت.

راهیانانی ئاراسته‌کراو

ناوه‌نده‌ ژمێره‌یی و ناوه‌راسته‌ و باو بۆ ئەم کۆمه‌له‌ پێدراوانه‌ بدۆزه‌وه‌.

$$\{5, 7, 4, 7, 6, 7\} \quad 5 \quad \{10, 14, 18, 22, 26\}$$

- 6 خشته‌ی دووباره‌بوونه‌وه‌ی که‌له‌که‌بووی به‌ره‌و ژوور و خشته‌ی دووباره‌بوونه‌وه‌ی که‌له‌که‌بووی به‌ره‌و ژێر بۆ ئەم پێدراوانه‌ی دیت دروستبکه‌.

چه‌ش‌ن	[20, 25[[25, 30[[30, 35[[35, 40[[40, 45[
دووباره‌ بوونه‌وه‌	11	16	19	14	5

- 7 چه‌ماوه‌ی که‌له‌که‌بووی به‌ره‌و ژوور و چه‌ماوه‌ی که‌له‌که‌بووی به‌ره‌و ژێر بۆ ئەم پێدراوانه‌ی دیت بکێشه‌.

ته‌مه‌ن	[8, 10[[10, 12[[12, 14[[14, 16[[16, 18[[18, 20[
دووباره‌ بوونه‌وه‌	80	110	100	60	30	20

- 8 ئەم خشته‌یه‌ی خواره‌وه‌ نمره‌کانی 24 خۆیندکاری له‌ بابته‌ی بیرکاری له‌خۆگرتوه‌ به‌ وێنه‌ی پوونکردنه‌وه‌یی به‌های نزیکه‌ی ناوه‌راسته‌ بدۆزه‌وه‌.

چه‌ش‌ن	[5, 10[[10, 15[[15, 20[[20, 25[[25, 30[[30, 35[[35, 40[
دووباره‌ بوونه‌وه‌	2	6	3	1	3	5	4

- 9 به‌رێگای چه‌بری ناوه‌نده‌ ژمێره‌یی ئەم کۆمه‌له‌ پێدراوانه‌ی دیت بدۆزه‌وه‌.

ته‌مه‌ن	[20, 25[[25, 30[[30, 35[[35, 40[[40, 45[
دووباره‌ بوونه‌وه‌	11	16	19	14	5

راهیانان و جیه‌جێکردن

ناوه‌نده‌ ژمێری و ناوه‌راسته‌ و باو بۆ هه‌ریه‌ك له‌م کۆمه‌له‌ پێدراوانه‌ی دیت بدۆزه‌وه‌.

$$\{5, 10, 15, 20, 25\} \quad 11 \quad \{4, 16, 25, 9, 36, 49\} \quad 10$$

خشته‌ی دووباره‌بوونه‌و‌ی که‌له‌که‌بووی به‌ره‌و ژوور و به‌ره‌و ژیر بۆ ئەم پیدراوانه دروست بکه.

12

چەشن	[28,30[[30,32[[32,34[[34,36[[36,38[[38,40[
دووباره بوونه‌و	2	3	9	12	1	5

چەماو‌ی که‌له‌که‌بووی به‌ره‌و ژوور و چەماو‌ی که‌له‌که‌بووی به‌ره‌و ژیر بۆ ئەم پیدراوانه‌ی دین بکێشه.

13

تەمەن	[30,35[[35,40[[40,45[[45,50[[50,55[[55,60[
دووباره بوونه‌و	80	110	100	60	30	20

ئەم خشته‌یه‌یی خواره‌وه تەمەنی 275 کرێکار به‌خۆوه ده‌گرت له‌یه‌ك له‌ کارگه‌کاندا به‌ وێنه‌ی پروونکردنه‌وه‌یی به‌های نزیکه‌یی ناوه‌راسته‌ بدۆزه‌وه.

14

تەمەن	[20,25[[25,30[[30,35[[35,40[[40,45[[45,50[
ژماره	45	65	75	44	34	12

ئەم خشته‌ی خواره‌وه تیکرای به‌کاربردنی هێکه‌یه بۆ یه‌ك کەس له‌یه‌ك له‌ شارەکان له‌هرزی زستاندا به‌ راپرسی له‌سه‌ر 380 کەس، به‌ رێگای جەبری ناوه‌راسته‌ بدۆزه‌وه.

15

چەشن	[3,7[[7,11[[11,15[[15,19[[19,23[
دووباره بوونه‌و	10	100	200	50	20

بیری ره‌خنه‌گر فیربووی که‌ نرخ‌ی نزیکه‌یی په‌سند بۆ ناوه‌راسته‌ی کۆمه‌له‌یه‌ك پیدراوێکی چه‌شدارنه‌بێت، ژماره‌یان جووت بێت دوا‌ی پیزکردنیان به‌ره‌و ژوور یان به‌ره‌و ژیر ده‌کاته ناوه‌نده‌ی دوو پیدراوه‌که‌ی ناوه‌راست. ئایا ناوه‌نده‌ی نزمترین پاده‌ی و به‌رزترین پاده‌ی چه‌شن ده‌کاته نرخ‌ی نزیکه‌یی په‌سند بۆ ناوه‌راسته‌ی کۆمه‌له‌ پیدراوه‌کانی کۆبووی چه‌شداره‌کان؟ بۆ پālپشتی وه‌لامه‌که‌ت پیدراوه‌کانی نمونه‌ی 5 به‌کاربێنه.

16

ئەم خشته‌یه‌ی خواره‌وه نمره‌کانی خویندکارانی پۆلی یانزده‌هه‌م نیشان ده‌دات له‌ تاقیکردنه‌وه‌ی بیرکاری بۆ وهرزی یه‌که‌م.

17

80	60	90	20	65	40	60	35	70	35
65	35	70	45	80	65	50	60	15	30
35	15	40	10	20	20	70	55	85	40

أ خشته‌ی دووباره‌بوونه‌وه دروستبکه به‌ کۆکردنه‌وه‌ی پیدراوه‌کانی خشته‌که له‌ و چه‌شانه‌ی که‌ درێژی چه‌شن هه‌ریه‌که‌یان 10 بێت له‌ نۆوانیادا چه‌شنی [0,10[هه‌بێت.

ب خشته‌ی دووباره‌بوونه‌وه‌ی که‌له‌که‌بووی به‌ره‌و ژوور به‌ره‌و ژیر بۆ چه‌شنه‌کان دروستبکه.

ج ناوه‌نده ژمیره‌یی ئەو پیدراوانه‌ پێش و دوا‌ی کۆه‌بووه‌یان بدۆزه‌وه. به‌راورد له‌ نۆوان دوو ناوه‌نده‌که بکه.

د باو یان باوه‌کانی پێش کۆه‌بووی پیدراوه‌کان دیاریبکه و چه‌شن یان چه‌شنه‌کانی باو دوا‌ی کۆبۆوه دیاریبکه.

هـ ناوه‌راستی ئەو پیدراوانه‌ی پێش و دوا‌ی کۆه‌بووه‌یان بدۆزه‌وه و به‌راورد له‌ نۆوان هه‌ردوو ناوه‌راسته‌که بکه.

18

ئەمانەى خوارەو درېژيەكانى خويندكارانى پۇلى يازدەھەمى ويژەيىيە بە سانتيمەتر لە يەككە لە خويندگاكانى ھەرېم.

179; 187; 181; 175; 175; 173; 172; 172; 175; 169; 167; 164; 171

173; 177; 178; 175; 185; 181; 172; 171; 177; 175; 175; 173; 178

168; 172; 174; 182; 178; 167; 168; 172; 174

أ خشتەى دووبارەبوونەوہى كۆۋەبووى چەشندار بۆ پېدراوہكان لە چەشنەكان

دروستبەكە كە درېژى چەشن ھەريەكەيان 5cm بېت.

ب خشتەى دووبارەبوونەوہى كەلەكە بووى بەرەو ژور و خشتەى دووبارەبوونەوہى

كەلەكەبووى بەرەو ژېر بۆ پېدراوہ چەشندارەكان دروستبەكە.

ج ناوہندە ژمېرەيى بۆ پېدراوہكان پېش و دواى كۆۋە بوويان بدۆزەوہ، بەراوورد لە نېوان

دو ناوہندەكە بکە.

د باويان باوہكانى پېدراوہكان ديارىبەكەپېش كۆۋەبوويان و چەشن يان چەشنەكانى

باو ديارىبەكە دواى كۆۋە بوويان.

ه ناوہراستەى ئەو پېدراوہ پېش و دواى كۆۋەبوويان بدۆزەوہ و بەراوورد لە نېوان

ھەردو ناوہراستەكە بکە.

روانين بۆ دواوہ



19

ئەم خشتەيەى خوارەو نمرەكانى خويندكارانى يەككە لە پۆلەكان نيشاندەدات لە

تاقىکردنەوہى بىركارى. ئەمانە بدۆزەوہ:

85	75	96	88	72
90	78	87	80	98
93	88	82	87	80
83	98	97	84	92

أ بەرزترين نمرە

ب نزمترین نمرە

ج ناوہندەى نمرەكان

د ناوہراستەى نمرەكان

ه باوى نمرەكان

روانين بۆ پېشەوہ



20

خشتەى بەرامبەر ئەم خالانە نيشاندەدات كە دوو ياريزان تۆماريانكردوہ لە تېپى تۆپى

باسكە لە 5 ياريدا.

رۆشنا	ناشنا
20	15
20	25
18	30
22	10
20	20

أ ناوہندە ژمېرەيى ژمارەى خالەكانى يارىەكە بدۆزەوہ كە

ھەرياريزانيك تۆمارى كردوہ.

ب كام لە دوو ياريزانەكان ئامادە باشيان ھەبوو لە تۆمارکردنى

خالەكان؟ وەلامەكەت ليكبدەرەوہ.

ئايا زانينى ناوہندى خالەكانى ھەرياريزانيك لە يارىەكەدا

يارمەتيت دەدات بۆ ديارىکردنى ئەو ياريزانەى كە زياتر ئامادە

باشى ھەبوو لە تۆمارکردنى خالەكان؟ وەلامەكەت ليكبدەرەوہ.

پیۆهرهکانی پهرتبوون

Measures of Dispersion



بۆچی؟

لهوانه پيشوو
فېرېبويت كه پيۆهرهكانى
پووكردنه چق بۆ كۆمهله
پيډراويك وهسفېكيان
بهدهستهوه دا. بهلام نهو
پيۆهرانه بهس نيهيه بۆ
وهسفكردى پيډراوهكان
بهتهواوى، بۆيه
نامارناسهكان پهنا دهيهنه
به پيۆهرهكانى تر نهوئيش
پيۆهرهكانى پهرتبوونه.

نامانجهكان

- دۆزينهوهى پيۆهرهكانى
پهرتبوون بۆ كۆمهله
پيډراويك بهرېگاي جهرى و
بهكارهينانى بژميرى
پوونكردهوهى.

زاراوهكان

Vocabulary

ليكنهچوون

Variance

لادانى پيوانهيه

Standard deviation

ئهگەر پيډراوهكانى ئهم دوو كۆمهلهيه $\{0, 20, 40\}$ و $\{19, 20, 21\}$ وهرېگريت و ناوهنده ژميرى و ناوهراستهى ههرهكهيان بدۆزيتيهوه دهبنيت ههمان ناوهنده ژميرى و ناوهراستهيان دهبيت، سههرپاي ئهوهى جياوازان: پيډراوهكانى كۆمهلهيه كههم له دورى ناوهنده ژميرى نزيكهدهنهوه، بهلام پيډراوهكانى دوهم دوچارى پهرتبوونىكى گهوره دهبن.

بهر هينانهوه.

- ليكنهچوون Variance پيۆهرىكه له پيۆهرهكانى پهرتبوون و هيمادهكرى به هيماي σ^2 .

ليكنهچوون برىتييه له ناوهندى دووجاكانى جياوازي نيوان پيډراوه جياوازهكان و (x_i) و ناوهندى پيډراوهكانى كۆمهلهيه (\bar{x}) واتا:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \right)$$

كه n ژماره پيډراوهكان دهنييت.

- لادانى پيوانهيه Standard deviation پيۆهرىكه له پيۆهرهكانى پهرتبوون و هيماي σ بۆ بهكارديت. لادانى پيوانهيه برىتييهله رهگى دووجاي موجهى ليكنهچوون.
- تا بههاى لادانى پيوانهيه بچووكتر بيت پيډراوهكه پهرتبوونيان كهمتره كه ئهوهدهگهيهنى ههمويان له دورى ناوهند كۆدهنهوه واى ليدهكات زياتر دهربرين له كۆمهلهيه پيډراوهكان بكات. بهلام تا بههاى لادانى پيوانهيه گهورتر بيت پيډراوهكان پهرتبوونيان زياتر دهبيت كه دهبيته هوى دوركهوتنهوه له ناوهند واى ليدهكات كهمتر دهربرين له كۆمهلهيه پيډراوهكان بكات.

دۆزينهوهى ليكنهچوون و لادانى پيوانهيه بهبهكارهينانى جهر.

بهرېگاي جهرى ليكنهچوون و لادانى پيوانهيه بۆ ئهم كۆمهله پيډراوه بدۆزهوه.

شيكار $\{14, 13, 16, 9, 3, 7, 11, 12, 11, 4\}$

ئهگەر بۆ پيناسهيه ليكنهچوون و لادانى پيوانهيه بگهرييتهوه بۆت دهرهكهويت كه دهبيت ئهم ههنگاوه نهجامبهى.

1. ههژماركردى ناوهندى كۆمهلهيه پيډراوهكان.

2. ههژماركردى دووجاي جياوازي نيوان ناوهندى ژميرى و ههر پيډراويك.

نوونه

3. ههژمارکردنی سهرجه می دووجاکانی دهستکهوت و دابهشکردنی بهسهر ژماره ی پیدراوهکان، بو بهدهست هیئانی لیکنهچوون.

4. ههژمارکردنی رهگی دووجای موجهی لیکنهچووهکان.

دهست به ههژمارکردنی ناوهراسته بکه.

$$\bar{x} = \frac{14+13+16+9+3+7+11+12+11+4}{10} = 10$$

ئهم خشته دروستبکه:

$(x_i - \bar{x})^2$	$x_i - \bar{x}$	پیدراو x_i
16	4	14
9	3	13
36	6	16
1	-1	9
49	-7	3
9	-3	7
1	1	11
4	2	12
1	1	11
36	-6	4
162	سهرجه م	

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \right) = \frac{162}{10} = 16.2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{16.2} \approx 4.025$$

بهپرگای جهبری لیکنهچوون و لادانی پیوانهیی بدۆزهوه بو ئهم کۆمهله پیدراوانه.

$$\{0, 3, 1, 1, 0, 5, 1, 0, 3, 0\}$$

«دۆزینهوهی لادانی پیوانهیی و لیکنهچوون به بهکارهیئانی

بژمیری پروونکردنهوهیی».

لیکنهچوون و لادانی پیوانهیی بو ئهم کۆمهله پیدراوانه

$$\{14, 13, 16, 9, 3, 7, 11, 12, 11, 4\}$$

پروونکردنهوهیی: له سهرهتادا دهستپیکه به بهتالکردنی لیستهکان Lists

له بژمیره پروونکردنهوهیهکه:

په نهجه بنی به 2^{nd} پاشان $+$ شاشه ی بهرامبهرت دهست دهکوهی.

په نهجه بنی به 4 بو ههلبژاردنی بهتالکردنی لیستهکان پاشان په نهجه بنی به

\boxed{ENTER} و پیدراوهکان تووماریکه. په نهجه بنی به \boxed{STAT} پاشان \boxed{ENTER}

ئهو شاشه ی بهرامبهرت دهستدهکوهی پیدراوهکان له لیستی L_1

تووماریکه یه که له دوایه که په نهجه بنی به \boxed{ENTER} ههرچه ند جار

پیدراویک توومار دهکوهی پاش تهواو بوون له توومارکردنی پیدراوهکان ئهو

شاشه ی بهرامبهرت دهست دهکوهی. په نهجه بنی به \boxed{STAT} و \boxed{CALC}

ههلبژیره پاشان په نهجه بنی به \boxed{ENTER} بو ههلبژاردنی ههژمارکردنی یه که

له پیوانهکانی گۆرانی ئاماری. په نهجه بنی به 2^{nd} پاشان $\boxed{1}$ بو ههلبژاردنی

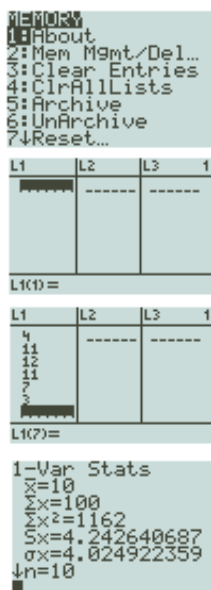
لیستی L_1 پاشان \boxed{ENTER} بو ئه نجامدانی کرداری ههژمارکردن، ئهو شاشه ی

بهرامبهرت دهستدهکوهی که به هاکانی ناوهنده ژمیره ی \bar{x} و لادانی پیوانهیی σx تیدا در دهکوهی.

ههولبده

نموونه

2



بژمیری پوونکردنەوویی بەکاربەھێنە بۆ دۆزینەووی لادانی پێوانەیی ئەو کۆمەڵە پێدراوانە
 $\{0, 3, 1, 1, 0, 5, 1, 0, 3, 0\}$

بۆ دۆزینەووی لایکنەچوون و لادانی پێوانەیی کۆمەڵە پێدراوە کۆووبوی چەشندارەکان ئەم ھەنگاوانە
 ئەنجامبە:

1. چەقەچەشنی x_i بۆ ھەر چەشنێک بدۆزەو جارانی دووبارە بوونەووی چەشنەکە f_i بکە.
 سەرچەمی ئەم لایکنانە بدۆزەو ئەنجامەکە \bar{x} بەسەر سەرچەمی دووبارەبووەکان دابەشکە
 بۆ بەدەستھێنانی ناوەندە ژمیری \bar{x} .
2. دووجاکی جیاوازی نیوان ناوەند \bar{x} و چەقی ھەر چەشنێک x_i بدۆزەو.
3. سەرچەمی ئەو دووجایانە دەستت کەوتوو بدۆزەو.
4. ھەر دووجایەک لە دووبارەبوونەووی چەشنەکە f_i بەدە پاشان سەرچەمی ئەنجامی لایکنانەکان
 بدۆزەو دابەشی بکە بەسەر سەرچەمی دووبارەبووەکان، لایکنەچوونت دەستدەکەوێت.
5. رەگی دووجای موحەبی لایکنەچوون بدۆزەو. لادانی پێوانەیی دەستدەکەوێت.

نموونه

3

دۆزینەووی لایکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ کۆمەڵە پێدراویکی کۆووبوی چەشندارەکان.
 لایکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم خشتەیی خوارەو بدۆزەو.

چەشن	$[20, 22[$	$[22, 24[$	$[24, 26[$	$[26, 28[$	$[28, 30[$
دووبارە بوونەو	5	10	20	10	5

ئەم خشتەیی خوارەو دروستیکە و لە پاشان تەواوی بکە:

چەشن	دووبارە بوونەو f_i	چەق x_i	$f_i \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
$[20, 22[$	5	21	105	-4	16	80
$[22, 24[$	10	23	230	-2	4	40
$[24, 26[$	20	25	500	0	0	0
$[26, 28[$	10	27	270	2	4	40
$[28, 30[$	5	29	145	4	16	80
کۆ	50	کۆ	1250	کۆ	کۆ	240

$$\bar{x} = \frac{1250}{50} = 25 \quad \text{ناوەندە ژمیری}$$

$$\sigma^2 = \frac{240}{50} = 4.8 \quad \text{لایکنەچوون}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4.8} \approx 2.2 \quad \text{لادانی پێوانەیی}$$

لایکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم خشتەیی خوارەو بدۆزەو

چەشن	$[18, 20[$	$[20, 22[$	$[22, 24[$	$[24, 26[$	$[26, 28[$
دووبارە بوونەو	8	12	20	12	8

پایان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

لەبەرچی لایکنەچوون و لادانی پێوانەیی بەردەوام دوو ژمارە موحەبن؟

1

2 چ پەيوەندىيەك لىكنەچوون و لادانى پىۋانەيى پىك دەبەستىتەو؟ ئايا ھەردەم لادانى پىۋانەيى لە لىكنەچوون بچوكتەر دەبىت؟

راھىنانى ئاراستە كراو

لىكنەچوون و لادانى پىۋانەيى بۇ ھەريەك لەم كۆمەللە پىدراوانە بە جەبرى بدۆزەو.

3 {10,8,6,4,2} 4 {3,3,4,5,5}

5 بژمىرى پروونكرىنەوئىي بەكاربەئىنە بۇ دۆزىنەوئى لادانى پىۋانەيى كۆمەللە پىدراوكانى. {4.82, 5.22, 8.32, 3.22, 1.56}

6 ئەم خىشتەي خوارەو دابەشكرىنى كرىكارەكان نىشانىدەدات لەيەكك لە دەزگاكان بەپىي تەمەنيان. لىكنەچوون و لادانى پىۋانەيى بۇ ئەم پىدراوانە بدۆزەو.

تەمەن	[20,22[[22,24[[24,26[[26,28[[28,30[[30,32[
دووبارە بوونەو	5	10	20	10	5	2

راھىنان و جىيەجىكرىن

لىكنەچوون و لادانى پىۋانەيى بۇ ھەر يەك لەم كۆمەللە پىدراوانە بەجەبرى بدۆزەو.

7 {4,4,4,4,5} 8 {8,12,30,35,48,50,62}

9 بژمىرى پروونكرىنەوئىي بەكاربەئىنە بۇ دۆزىنەوئى لادانى پىۋانەيى ئەو كۆمەللە پىدراو. {0.33,1.24,2.71,7.42,6.21}

10 ئەو خىشتەي خوارەو ئەنجامەكانى راپرسى نىشانىدەدات لەسەر نمونەيەك «سامپلىك» لە مۇسقىارنەكان دەربارەي ژمارەي ئەو كاتژمىرانەي كە تاييەتيان كىردە بۇ راھىنانى ھەفتانە، لىكنەچوون و لادانى پىۋانەيى بۇ پىدراوكان بدۆزەو.

چەشەن	[1,6[[6,11[[11,16[[16,21[[21,26[[26,31[[31,36[[36,41[
دووبارە بوونەو	13	9	9	14	16	8	8	3

11 تۆپى سەبەتە ئالان 13 يارى تۆپى سەبەتەي ئەنجامدا، و ئەم كۆمەللە خالانەي دىت يەك لەداوى يەك بەدەستەيىنا: 24, 16, 9, 17, 17, 23, 20, 26, 17, 14, 58, 27, 28. ناوئەندە ژمىرەيى و لىكنەچوون و لادانى پىۋانەيى بدۆزەو.

12 كۆمەللە پىدراوئىك ناوئەندە ژمىريان 4، و ناوئەپراستيان 3، و لادانى پىۋانەييان 1.6. أ. ھەر پىدراوئىك لە 5 درا. ناوئەندە ژمىرەيى كۆمەللە پىدراو نۆيىيەكە چەندە؟ ھەرۋەھا ناوئەپراستەيان و لادانى پىۋانەييان چەندە؟

ب. 5 بۇ ھەر يەك لە پىدراو سەرەككەكان (أصلى) زيادكرا. ناوئەندى كۆمەللەي پىدراوئەتازەكان و ناوئەپراستەو لادانى پىۋانەييان چەندە؟

13 پىۋان مامۇستا لە پۆلى چوار داواي لە قوتابىيەكانى كىركە بە (سم) درىژى مېزەكانى لەسەرى دانىشتون بپيئون. مامۇستا پىۋانەكانى لە لاي خوى تۆمار كىركە بەم شىۋەيە بوو. 49, 50, 49, 48, 49, 50, 49, 50, 49, 50. ناوئەندەو ناوئەپراستەو لادانى پىۋانەيى ئەو پىدراوانە بدۆزەو.

14 ئەگەر لە نۆوان كۆمەلە پېدراوهكان دانەيهەك هەبێت كە ماوهی نۆوانی لەگەڵ ناوەندە ژمێرهیی كۆمەلەكە گەرەتر بێت لە سێ ئهوهندەى لادانى پېوانەيهەكەى، ئامارناسەكان بە و دانەيه دەلێن بەهاى پەرگر (قيمه متطرفه). پېدراوهكانى راھینانى پېشوو بەكاربھێنە، و دیاریبکە ئەگەر لەنۆوانیاندا بەهاى پەرگر هەبێت. وەلامەكەت لێکبدەوه.

روانین بۆ دواوه

- 15 نەوزاد شەش پالووی ژمارەکانى هەدا.
- ا ئەگەرى دەرکەوتنى ژمارەى 3 چەندە؟
- ب ئەگەرى دەرکەوتنى ژمارەى 8 چەندە؟
- ج ئەگەرى دەرکەوتنى ژمارەيهەك مۆجەب نەبێت چەندە؟
- د ئەگەرى دەرکەوتنى ژمارەيهەكى جووت چەندە؟

روانین بۆ پېشەوه

پۆل	كوپ	كچ	كو
دە	53	51	
يازده	47	50	
دوازده	35	44	
سەرجهەم			

16 ئەم خشتەيهی بەرامبەر ژمارەى خویندکارانى پۆلهکانى دە و یازده و دوازده لەیهکێك لە ئامادهيهەكان نیشان دەدات.

ا خشتەكه بنووسه و پاشان تهواويبکە.

ب خویندکارێك هەلبژێردرا بەهەرپەمەكى ئەگەر چەندە كە خویندکارەكە پۆلى یازدەبێت؟

- ج خویندکارێك هەلبژێردرا بەهەرپەمەكى ئەگەر چەندە كە خویندکارەكە كچ بێت؟
- د خویندکارێك لەپۆلى دوانزە هەلبژێردرا بەهەرپەمەكى ئەگەرى چەندە كە خویندکارەكە كوپ بێت؟
- ه خویندکارێك لەپۆلى دە هەلبژێردرا بەهەرپەمەكى ئەگەرى چەندە كە خویندکارەكە كچ بێت؟
- و خویندکارێك هەلبژێردرا بەهەرپەمەكى ئەگەر چەندە كە خویندکارەكە كوپ بێت یان لە پۆلى دە بێت؟

ياساكانى ئەگەر Laws of probability



بۇچى؟

شارەزايان لە کاروبارى
هەلبەزاردن ئەگەر و پەيداوارەکانى پەيش
خستنى ديموگرافيا و ئەنجامەکانى
هەلبەزاردنى پەيشوو بەکاردهيەتن،
بۇ دارشتنى پەيشبەينىيەکان دەربارى
ئەنجامەکانى خوولى داماتوو.

لە پۆلهکانى پەيشوو چەمکە سەرەتايەکانى ئەگەر فيربوويت، ھەروەھا فيربوويت چۆن ئەگەرى
پووداويك دەدۆزیتەو ەك پووداوى دەرکەوتنى ژمارەى 5 لەھەلدانى بەردەزارىك، لەم وانەيە
فيردەبیت کەوا زۆر پەيوەندى ھەيە دەتوانیت ژمارەيەك لە پووداوەکان پیکەو بەستیتەو، و
دەتوانیت پووداوى نوێ پیکەيەنریت. بەدەستپیکردن بە پووداوەکانى تر بەبەکارھيەتانی ئامرازى
بەيەکتر بەستنى «و» یان ئامرازى بەيەکتر بەستنى «یان» ەك پووداوى «دەرکەوتنى ژمارەى
جووت یان دەرکەوتنى ژمارەى بچووکتر لە 3» کە پیکدیت لە پووداوى «دەرکەوتنى ژمارەى
جووت» و پووداوى «دەرکەوتنى ژمارەى بچووکتر لە 3» بەبەکارھيەتانی ئامرازى بەيەکتر بەستى
«یان». ئەم خستەى خوارەو پوختەى چەمکە سەرەکییەکانە کە پەيشتر فيربوويت.

وانەى
3

نامانجەکان

• بېرھینانەوێ ياساكانى
ئەگەر و بەکارھيەتانی.

زاراوەکان

Vocabulary

پووداوە جياکان

Mutually exclusive events

پووداوە سەرەخۆکان

Independent events

تەواوەکەرى پوودا

Complement of an event

دەرختە Outcome

چەمک	پوونکردنەو	نموونه
تاقیکردنەوێ ھەرەمەکی experience	کرداریکە پەيش بىنى ئەنجامەکانى دەرکەوتنى، بەلام ناتوانين بە تەواوى دياربکەين کاميان پوودەدات، بەھەر ئەنجامیکى لە تواناداييت دەوتریت دەرختە	لەھەلدانى بەردەزارىك دەزانين ئەنجامەکانى لە توانادايە بریتییە لە 1، 2، 3، 4، 5، 6 و نازانين کاميان بە دياردە کەوێت.
بۆشايى نموونەکە Sample space	کۆمەڵەى ھەموو ئەنجامەکانى لە توانادايە واتا کۆمەڵەى ھەموو دەرختەکان.	بۆشایى نموونەلەکاتى ھەلدانى بەردە زارێک دەکاتە کۆمەڵەى {1, 2, 3, 4, 5, 6}
پوودا Event	بەشێکە لە بۆشايى نموونەى. پووداوەکە سادە دەبێت ئەگەر تەنها يەك دەرختەى ھەبێت	دەستکەوتنى ژمارەيەکی تاک لە ھەلدانى بەردەزارىك بریتییە لە پووداوى {1, 3, 5}. پووداوى {5} پووداويکی سادەيە.
ئەگەر Probability	ئەگەرى پووداويك بریتییە لە ژمارەى P کە پاسادانى $0 \leq P \leq 1$ دەکات. ئەگەرى پووداوى ستم بریتییە لە $P = 0$ ئەگەرى پووداوى دەلنای $P = 1$ سەرچەمى ئەگەرەکانى پووداوە سادەکانى تاقیکردنەوێکە ھەرەمەکی دەکاتە 1.	ئەگەرى A پووداوى «دەستکەوتنى ژمارەيەك بچووکتر بێت لە 5» لەھەلدانى بەردەزارىك ئەکاتە ئەگەرەکە بریتییە لە: $p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
يەکسانبوونى ئەگەرەکان Equally likely	ئەگەرەکانى تاقیکردنەوێکە ھەرەمەکی يەکسان دەبێت ئەگەر ھەموو ئەگەرەکانى پووداوە سادەکان يەکسان بن. واتا چانسى ھەموو دەرختەکان يەکسان بن لە دياردا ئەگەرى پووداويك دەکاتە پۆژەى ئەنجامەکانى پووداوەکە بۆ ژمارەى ھەموو ئەنجامەکانى لە توانادايە	لەھەلدانى بەردەزارىك تاقیکردنەوێکە ھەرەمەکی ئەگەرەکانيان يەکسان ئەگەر A بریتی بێت لە پووداوى دەستکەوتنى ژمارەيەك کەمتر بێت لە 5 ئەوا ژمارەى ئەنجامەکان کە پاسادانى پووداوەکە دەکات دەکاتە 4 بەلام ژمارەى ئەنجامەکانى لە توانادايە دەکاتە 6 کەواتە: $p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ب ئەگەرى پرووداى $A \cup B$ و ئەگەرى پرووداى $A \cap B$ بدۆزەو، كاتىك A برىتییە لە پرووداى «دەرکەوتنى ژمارەى جووت» و B برىتییە لە پرووداى (دەرکەوتنى ژمارەى بچوكتەر لە 2) پرووداى A برىتییە لە $A = \{2, 4, 6\}$ و پرووداى B برىتییە لە $B = \{1\}$ لەو وەدە دەرکەوتىت كە: $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ و $p(B) = \frac{1}{6}$.

لەلایەكى ترەو پرووداى $A \cap B$ برىتییە لە $A \cap B = \{\} = \emptyset$ و اتا دوو پرووداوەكە جیان: $p(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$: لەو وەدە دەرکەوتىت كە:

بۆ پاسادانکردنى وەلامەكە، تىبىنى دەكەین كە پرووداى $A \cup B$ برىتییە لە $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$ لە دوايیدا $p(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

هەولبەدە لە تاقىکردنەوێهەكى هەپمەكى پىووستىکرد يەك گۆ راپكىشريت لە توورەگەيەك كە 7 گۆى رەنووسكراوى لە 1 تا 7 تىدايە.

ا ئەگەرى پرووداى $A \cup B$ ، و ئەگەرى پرووداى $A \cap B$ بدۆزەو، كە A پرووداى «دەستكەوتنى ژمارەى جووت بىت» و B «پرووداى دەستكەوتنى ژمارەى گەرەتر لە 3» بىت.

ب ئەگەرى پرووداى $A \cup B$ ، و ئەگەرى پرووداى $A \cap B$ بدۆزەو، كە A پرووداى «دەستكەوتنى ژمارەى جووت» و B پرووداى «دەستكەوتنى ژمارەى گەرەتر لە 6» بىت.

ئەگەر A و B دوو پرووداى جیان، ئەو كاتە هەردووکیان پیکەو نایەنە دى، چونكە هاتنە دى يەكێکیان دەبێتەهۆى نەهاتنە دى ئەوتريان لەهەمان كاتدا؟ ئایا نەهاتنە دى يەكەکیان مەرجه ئەوى تریان بێتە دى؟ لەوانەيە وابىت و لەوانەيە وانەبىت. ئەگەر A پرووداى «دەرکەوتنى ژمارەى جووت» بىت لە هەلدانى بەردەزارىك و B پرووداى «دەرکەوتنى ژمارەى 3» بىت ئەوا نەهاتنە دى يەكێکیان مەرجه نىيە ئەوتريان بێتە دى، چونكە دەرکەوتنى 5 هېچ يەكەیان نایەتە دى. بە پێچەوانەى ئەو وەدە، ئەگەر A پرووداى «دەستكەوتنى پرووى خەت» بىت لە هەلدانى پارچە دراویكى كانزایی و پرووداى B «دەستكەوتنى پرووى شير» بىت، ئەوا نەهاتنە دى يەكێکیان مەرجه ئەو وەكەى تریان بێتە دى، و اتا دوو پرووداوەكە پاسادانى $A \cap B$ كە پرووداى ئەستەمە و $A \cup B$ پرووداى دلىايیە دەكەن.

لەوبارەدا بە پرووداى B دەوترىت تەواوەكەرى پرووداى A .

هیمای \bar{A} بەكاربەهێنە بۆ مەبەستى تەواوەكەرى پرووداى A . ئەمەى دىت تىبىنى بكە:

ئەگەر B تەواوەكەرى A بىت ئەوا A تەواوەكەرى B دەبىت.

دۆزینەوێهەى پرووداى تەواوەكەر

نموونه

پرووداى تەواوەكەر لە هەر بارىك بدۆزەو

ا لە تاقىکردنەوێهەكى هەپمەكى پىووستىکرد بە هەلدانى پارچە دراویكى كانزایی دووجار

لە دوايیەك. A پرووداى «دەستكەوتنى شير يەكجار بەلایەنى زۆرەو».

ب لە تاقىکردنەوێهەكى هەپمەكى پىووستىکرد بە هەلباردننى نوینەرى پۆلى يانزەهەمى

وێژەيى بە پىگای دەنگدان پرووداى A (هەلباردننى كچه)

شىكار

ا بۆشایی نموونەيى ئەمەيە: $\{(T, T), (T, I), (I, T), (I, I)\}$ كاتى I شيربىت T خەت بىت.

پرووداى A دەكاتە $\{(T, T), (T, I), (I, T)\}$

لەمەو دەرەچىت $\bar{A} = \{(I, I)\}$. و اتا دەستكەوتنى شير دووجار.

ب پرووداى تەواوەكەر برىتییە لە پرووداى (هەلباردننى كوپ)

پووداوی تەواوکەر بۆ ھەریەک لەمانەى دیت بدۆزەو

ا) لەتاقیکردنەوێهەکی ھەرپەمەکی پۆیستیکرد بەردە زاریک ھەلبەدریت، پووداوی A بریتییه لە «دەستکەوتنی ژمارەى تاک».

ب) لەتاقیکردنەوێهەکی ھەرپەمەکی پۆیستیکرد بە ھەلدانى پارچە دراویکی کانزایی 3 جار لە دوايیهک. پووداوی A بریتییه لە (دەستکەوتنی بەلایەنى کەمەو پوویەک شیر بێت)

ئەگەرى پووداوی تەواوکەر

بۆ ھەژمارکردنی ئەگەرى تەواوکەرى پووداوی A ئەم رێسایە بەکاربھێنە:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

نموونه

دۆزینەوێ پووداوی تەواوکەر

لە یەكێك لە ئامادەییەكان سى جۆرە تیپ ھەیە: تیپی شانۆ لە 32 ئەندام

پێکھاتوو و تیپی بیرکاری لە 33 ئەندام پێکھاتوو و

تیپی تۆپی بالە لە 39 ئەندام پێکھاتوو، ھەندى لە

خوێندکاران سەر بە تیپێک زیاتر ھەرۆک لەم

ھێلکارییەى بەرامبەر پوونکراوەتەو. بەرپۆتەبەر

یەكێك لە ئەندامەكانى تیپەكانى بەشیوێھەکی ھەرپەمەکی

ھەلبژارد بۆ نوێنەرایەتى کردنى خوێندنگا لە کۆبونەوێھەکە

لە بەرپۆتەبەراییەتى پەرۆردە ئەنجامدەدریت. ئەگەرى ئەندام بوونی

خوێندکارەکە بەلایەنى کەم لە دوو تیپ چەندە؟

ئەگەر پووداوی A «بەلایەنى کەمەو ئەندام بێت لەدوو تیپ» ئەوا پووداوی تەواوکەر \bar{A} بریتییه لە

«ئەندام تەنیا لە یەك تیپ». دانەكانى بۆشایی نموونەكە 60 دانەيە.

(ژمارەى ئەندامانى ھەرسى تیپەكە $10 + 10 + 11 + 8 + 8 + 7 + 6 = 60$.)

ژمارەى دەرخستەكانى پووداوی تەواوکەر بریتییه لە $10 + 8 + 6 = 24$ لەوێو. $P(\bar{A}) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

و $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0.60 = 60\%$

ئەگەر چەندە ئەو نوێنەرەى کە ھەلبژێردرا تەنھا لە دوو تیپ ئەندام بێت؟

ئەگەر A و B دوو پووداوی تەواوکەر ھەرپەمەکی، لەوانەيە ھاتنەدى یەكێکیان

کاربکاتە سەر ھاتنە دى ئەوى تریان و لەوانەيە کار نەکاتەسەرى، ئەگەر ھاتوو توورمگەيەکت

ھەبوو کە 5 گۆى سوور و 3 گۆى شینی تێدابیت و تاقیکردنەوێھەکەش بریتیبوو لە پراکیشانی دوو گۆ

یەك لەدواى یەك، ئەوا ئەگەرى گۆى دووهم بێت جیاوازدەبیت لە نیوان گەرانەوێ گۆى

یەكەم بۆ ناو توورمگەكە و نەگەرانەوێ بۆ ناو توورمگەكە. با A پووداوی (گۆى یەكەمى سوور

بیت) و B پووداوی (گۆى دووهمى سوور بیت). گەرانەوێ گۆى یەكەم بۆ ناو توورمگەكە پێش

پراکیشانی گۆى دووهم ئەو کاتە پووداوی یەكەم کارناکاتە سەر ئەگەرى پووداوی B کە دەکاتە

$\frac{5}{8}$ ، بەلام ئەگەر گۆى یەكەم نەگەرپێنریتەوێ بۆ ناو توورمگەكە پێش پراکیشانی گۆى دووهم ئەوا

ئەگەرى B دەکاتە $\frac{5}{7}$.

بە دوو پووداوی A و B دەوتریت سەرەخۆن ئەگەر ھاتنەدى یان نەھاتنەدى یەكێکیان کار

نەکاتە سەر ئەگەرى ھاتنەدى ئەوێھە تریان.

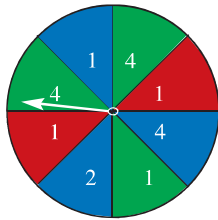
	نیر	می	سەرجه
لهگهل	18	9	
دژ	12	25	
بی پا	20	16	
سەرجه			

4 له پاپرسییه کدا دهرباره ی نوکړدنه وهی شپوازه
په وروډه بیه کان، بۆچوونی 100 له وانه ی له یواری په وروډه دا
کار ده کهن ودرگیرا. ئەم خشته یه ی بهرام بهر ئەنجامی ئەم
پاپرسییه پوونده کاته وه، خشته که بنووسه و ته وای بکه
ئەگەر یه کک له وانه پاپرسییه که یان ئاراسته کرابوو
به هه پرمه کی هه لېژێردا. ئەگه ری ئەوه ی ئەو هاو لا تیه ی دژ
نوێخوازی بێت یان هیچ پایه کی نه بێت چهنده؟

5 له تاقیکردنه وه هه پرمه کییه که ی پرسیاره کی پېشوو، پوودای ته واکه ری پوودای
«هه لېژاردنی یه کک له وانه ی پاپرسییه که یان ئاراسته کرابوو له وانه بی که پای داوه» بدۆزه وه.

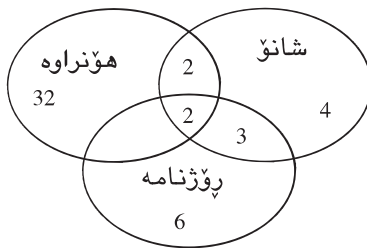
6 پوودای ته واکه به کار به ی نه بۆ دۆزینه وهی ئەگه ری ئەو هاو لا تیه ی
که به شداری کردوه له پاپرسییه که پای دابیت.

7 له تاقیکردنه وه یه کی هه پرمه کی پېویستیکرد به خولاندنه وهی چه رخی میلدار ی بهرام بهر
دوو جار یه که له دوا ییه که ئەگه ری ده سته که وتنی ژماره ی 4 له هه ردوو جاردا چهنده؟



8 له تاقیکردنه وه یه کی هه پرمه کی پېویستیکرد به خولاندنه وهی
چه رخی میلدار سی جار یه که له دوا ی یه که ئەگه ری ده سته که وتنی
پهنگی سوور پاشان سهوز دیسان پهنگی سوور چهنده؟

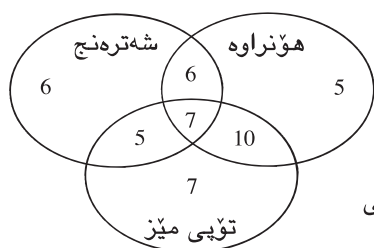
پرسیار و جیه جیکردن



9 له یه کک له ئاماده ییه کان سی تیپ بۆ چالاکییهکانی
دهره وهی پۆل هه یه، تیپی هۆنراوه 36 ئەندام و تیپی
شانۆ 11 ئەندام و تیپی پۆژنامه گه ری 11 ئەندام
له خو دگرن. هه ندیک له خویندکاره کان سه ربه تیپیک
زیاترن وه که ئەم هیلکارییه ی بهرام بهر پوونی
ده کاته وه، یه که له ئەندامهکانی تیپه کان به شپوه ی
هه پرمه کی هه لېژێردا، ئەگه ری ئەو ئەندامه سه ر به
دوو تیپ بێت چهنده؟

10 هه قال خویندکاریکی پۆلی یازده هه می ویژیه یه له هۆیه ی A که 18 خویندکاری تیدایه و
خوشکه که ی له هۆیه ی B که 20 خویندکار به خو دگریت، ده سته که به هه لېژاردنی نوینه ر بۆ هه ر
هۆیه یه که به ریگای ده نگدان، ئەگه ر چهنده که هه قال و خوشکه که ی نوینه ری هۆیهکانیان بن؟

11 ئەگه ری ده سته که وتنی خه ت پاشان شێر ئینجا شێر له هه لدانی پارچه دراویکی
کانزایی 3 جار یه که له دوا ی یه که چهنده؟



12 لە يەككەك لە كۆمەللە پۇشەنبىرىيەكان سى تىپ ھەيە. تىپى شەترەنچ 24 ئەندام و تىپى تۆپى سەرمىز 29 ئەندام و تىپى ھۆنراو 28 ئەندام لەخۇ دەگرن، ھەندى لە ئەندامان سەربە تىپك زياترن ھەروەك لەم ھىلكارىيەى بەرامبەر پوونكراوئەو، ئەگەرى ھەلبژاردنى ئەندامك بەھەرەمەكى كە بەلایەنى زۆر سەربە دوو تىپ بىت چەندە؟

13 پووداوەكان A و B و C سەربەخۆن و ئەگەرەكانیان بریتیيە لە: $P(A)=0.5$ ، $P(B)=0.25$ ، $P(C)=0.75$ ئەم ئەگەرەنەى دىن بدۆزەو. $P(A \cap B)$ [ا] ، $P(A \cap C)$ [ب] ، $P(A \cup B)$ [ج].

لە پرسىارى 14 تا 16، ديارىبەكە ئەگەر دوو پووداوى A و B سەربەخۆن يان نا؟ و ئەگەرى $A \cap B$ ھەژمارىكە.

14 تاقىکردنەوھى ھەپمەكى: ھەلدانى بەردەزار. پووداوى A : (دەستكەوتنى ژمارەى جوت) پووداوى B : «دەستكەوتنى ژمارەى 2 يان 4».

15 تاقىکردنەوھى ھەپمەكى: ھەلدانى بەردەزار. پووداوى A : (دەستكەوتنى ژمارەى 6) پووداوى B : «دەستكەوتنى ژمارەى بچوكتەر لە 5».

16 تاقىکردنەوھى ھەپمەكى: ھەلدانى بەردەزار. پووداوى A : (دەستكەوتنى ژمارەى 4) پووداوى B : «دەستكەوتنى ژمارەى گەورەتر لە 3».

17 **فرۆكەوانى** ئامارەكانى يەككەك لە كۆمپانىياكانى فرۆكەوانى پيشانى دەدات ئەگەرى گەشتەكەيان لە تاران بۆ ھەولير كە لەكاتى خۆيدا دەگات لە 92% ى گەشتەكانە، و گەشتەكەيان كە لە ھەوليرەو بۆ عەممان دەردەچيەك كە لەكاتى خۆيدا دەگات لە 97% ى گەشتەكانە، كرمانج ويستى گەشتك بكات لە تارانەو بۆ عەممان بە ھەوليردا بروت. ئەگەرى چەندە بۆ گەيشتنى ئەو فرۆكەيەى كە دەيگوازيتەو بۆ ھەولير لە كاتى خۆيدا، و دەرچوونى بەرەو عەممان لە كاتى خۆيدا؟

18 ئەگەرى ئامادەبوونى كامەران لە ئاھەنگەكەدا 80% و ئەگەرى ئامادەبوونى كاروان 95%. ئەگەرى ئامادە بوونيان لە ئاھەنگەكەدا پيەكەو چەندە ئەگەر بزانيەت ئامادەبوونى يەككيان كارناكاتە سەر ئامادەبوونى ئەويتريان؟

19 تورەگەيەك 15 گۆى رەنوسكراوى لە 1 تا 15 ى تيداىە، فيان گۆيەكى راکيشا لە پاشاندا گۆيە راکيشراوہكى خستە وە ناوتوورەگەكە پيش راکيشانى گۆيەكى تر لە جارى دووہم.

[ا] ئەگەر چەندە كە ھەردوو گۆيەكە ژمارەى 8 ى لەسەربيت؟

[ب] ئەگەر چەندە كە فيان تەنھا يەك جار ئەو گۆيە راکيشيت كە ژمارەى 8 ى لەسەربيت؟

20 لە تاقىکردنەوھى ھەپمەكى پيوستىکرد دوو

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	بەردەزار ھەلبدریت يەكيان سوور و ئەوى
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6	تريان شين. پووداوى A بریتیيە لە پووداوى
3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6	«دەركەوتنى ژمارە 1 لەبەردەزارى سوور» و B
4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6	بریتیيە لە پووداوى «دەركەوتنى سەرجەمى
5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6	ژمارەى دوو پووەكە كە مەتریت لە 4».
6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6	[ا] $P(A)$ و $P(B)$ بدۆزەو.

[ب] ئەو ئەنجامانە بنووسە كە پاسادانى پووداوى $A \cap B$ دەكەن و ئەگەرى ئەو پووداوە دەربەھینە.

[ج] وەلامى دوو پرسىارەكەى پيشو بەكاربەھینە بۆ برياردان ئەگەر دوو پووداوەكە

سەربەخۆن يان نا.

21 پېنج قوتابی ھاتنه ناو شانۆی قوتابخانه، ھەریەكەیان پېژیکیان ھەلبژارد بۆ دانیشتن له ده پېزی کورسییهکانی شانۆ. ئەگەری چەندە که بەلایەنی کەمەوه دوو قوتابی ھەمان پېز ھەلبژێرن.

22 **بیری رەخنەگر:** ئەگەر A و B دوو پروودای سەربەخۆین ئایا دوو پروودای تەواوکەری: \bar{A} و \bar{B} سەربەخۆ دەبن؟ وەلامەكەت لیکبەوه.

23 **بنووسە** دوو پێگە بەپێنەوه بۆ دۆزینەوهی ئەگەری دەستکەوتنی بەلایەنی کەم پروویکی خەت لەکاتی ھەڵدانی پارچە دراویکی کانزایی دووجار لە دوا یەکتر.

24 پارچە پارەیهکی کانزایی بە جۆریک دروستکراوه ئەگەری دەرکەوتنی پرووی شیر دوو ئەوەندە ئەگەری دەرکەوتنی پرووی خەت بیّت لە ھەر ھەڵدانیکدا، ئەگەری ھەریەكە لە پرووی شیرو خەت بدۆزەوه.

روانین بۆ دواوه

25 شیرین لە ماوهی 10 ھەفتەدا ناوەندی ژمارەکی کیلۆمەترەکانی تۆمارکرد که ئۆتۆمبیلەکی بریویەتی بۆ ھەر گالۆنێک، بەم شێوە بوو: 18، 17، 19، 18، 18، 25، 29، 30، 26، 19.

ا
ب
ج
د

 ناوەند و ناوەراستە و باو بۆ پێدراوەکان بدۆزەوه.

ب

 گەورەترین بەھاو بچووکتەین بەھاو مەودا بدۆزەوه.

ج

 لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بدۆزەوه.

د

 ئەو پێدراوانە چین که لە ناوەندە ژمێریی دوورترە زیاتر لە لادانی پێوانەییەك؟

روانین بۆ پێشەوه

26 نمونەیهك له شوفیرەکان که 3510 کەس لەخۆ دەگریت له نیوانیاندا 1950 پیاو که 103 کەسیان تووشی رەنگ کویری بوون. تەنها 6 کەس لەوانە ی تووشی رەنگ کویری بوون ئافرەتن. ئەگەری ئەو کەسە ی که بە ھەرپەمەکی ھەلبژێردراوه لە پیاوەکان بیّت یان لە تووشبوانی رەنگ کویری بیّت چەندە؟

تەکنیکی ژماردن Counting techniques



شېرىن تەكنىكى ژماردن
بەكار دەھىنى بۇ دۆزىنە دەى ژمارەى
رېڭاكانى نىشان دانى ئەو تابلۇيانەى
كەوېنەى كر دوون.

وانەى 4

نامانجەكان

- تەكنىكى ژماردن
بەكار دەھىنى بۇ
هەژمار كر دى ئەگەرەكان.

زاراوەكان

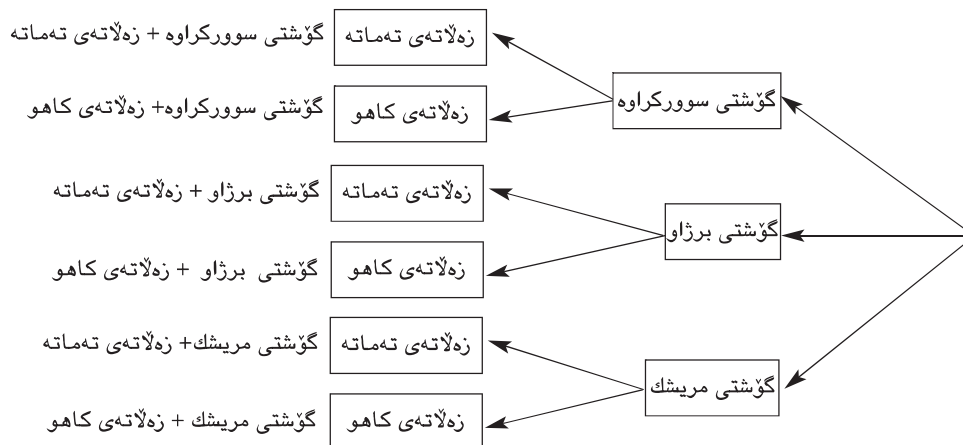
Vocabulary

- گۆرپىنەكان
Permutations
- رېزكر دىنەكان
Arrangements
- گونجېنەكان
Combinations
- ياساى بنەرەتى ژماردن
Fundamental
counting principle
- هېلكارى درەخت
Tree diagram

فېربوويت كە هەژمار كر دى ئەگەرەى هاتنەدى پروداوېك له تاقىكر دىنە دەى هەپمەكى يەكسان له
ئەگەرەكان برىتېيە له دابەشكر دى ژمارەى دەر خستەكانى هاتنەدى پروداوېك بەسەر ژمارەى
گشت دەر خستەكان. لېرەدا پېوېستى تەكنىكى ژماردن سەرى هەلدا كە يارمەتيت دەدا بۇ
دۆزىنە دەى ئەم جۆرە ژمارانە.
ئەم خستەيەى خوارەو كور تەى هەندېك له تەكنىكى ژماردنە كە پېشتر فېربوويت.

تەكنىك	پروونكر دىنە دەى	نمونه
ياساى بنەرەتى ژماردن Fundamental counting principle	دەقى ئەو ياساىە برىتېيە له: ئەگەر m رېڭا هەبى بۇ هېلزار دىنە يەكەم و n رېڭا بۇ هەلزار دىنە دووم , ئەوا بۇ هەلزار دىنە پېكەو $m \times n$ رېڭا هەبە.	ژەمىكى نانخواردن پېكدېت له قاپېكى زەلاتە و قاپېكى سەرەكى, ئەگەر ژمارەى قاپەكانى زەلاتە پېنج بېت و ژمارەى قاپەكانى سەرەكى 3 بېت. دەرئانېت ژەمەكەت بە رېڭا هەلزارىت $3 \times 5 = 15$
لېدراوى n factorial n	ئەگەر n ژمارەيەكى تەواى سالىب نەبېت, ئەوا لېدراوى n دەكاتە: $n! = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 1 \times 2 \times \dots \times n & n>0 \end{cases}$	$3! = 3 \times 2 \times 1$ $0! = 1$
گۆرپىنەكان Permutations	گۆرپىنە n شت برىتېيە له دانانېان له رېزكر دىنەى ديارىكراو. ژمارەى گۆرپىنەكانى n شت برىتېيە له لېدراوى n واتا $n!$.	گۆرپىنە پېتەكانى A, B, C برىتېيە له: ABC, BCA, CAB ACB, CBA, BAC كە ژمارەيان $3! = 6$
رېزكر دىنەكان Arrangements	رېزكر دىنە r شت له بنچىنەى n برىتېيە له هەلزار دىنەى r شت له شتەكانى n بەرېزكر دىنەى ديارىكراو, ژمارەى رېزكر دىنەكانى r شت له بنچىنەى n برىتېيە له. ${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	AB و BA دوورېزكر دىنەى جياوازان بۇ دوو پېت له بنچىنەى سى پېتى A, B, C ژمارەى رېزكر دىنەكانى دوو پېت له بنچىنەى 3 برىتېيە له ${}_3 P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$
گونجېنەكان Combinations	گونجېنەى r شت له بنچىنەى n برىتېيە له هەلزار دىنەى r شت له شتەكانى n بەبى وەستان له رېزكر دىنەى ژمارەى گونجېنەكانى r شت له بنچىنەى n شت برىتېيە له. ${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	$\{A, B\}$ برىتېيە له گونجېنەى دوو پېت له بنچىنەى سى پېتى A, B, C ژمارەى گونجېنەكانى دوو پېت له بنچىنەى 3 برىتېيە له. ${}_3 C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

كەسىك چوۋە چېشتخانەيەك بۇ خواردنى ژەمى نيوەرۇ، بىنى بۇى ھەيە جورىك ھەلېزىرېت لە نېوان 3 جورە گۆشت: گۆشتى برزاو و گۆشتى سوركراره و گۆشتى مريشك، و جورىك لە نېوان دوو جورە زەلاتە، زەلاتەى كاھو و زەلاتەى تەماتە. ھېلكارى درەختى بىكىشە بۇ پوونكرەنەوى گشت رېگايەكانى لە توانا دايە بۇ ھەلېزاردنى قاپىك گۆشت و قاپىك زەلاتە، ئەگەرى ھەلېزاردنى قاپىك گۆشتى برزاو و قاپىك زەلاتە ھەژمارىكە.



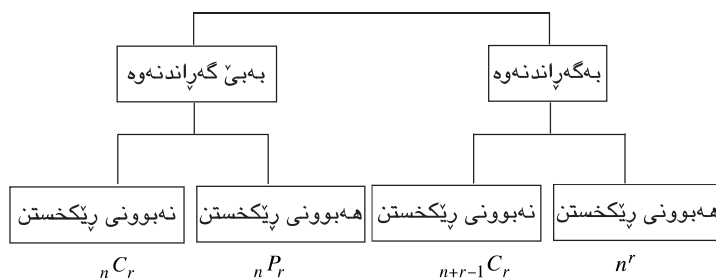
ئەو كەسە دەتوانىت قاپىك گۆشت و قاپىك زەلاتە بە 6 رېگا ھەلېزىرېت. و ئەوكەسە بۇ ژەمى نيوەرۇ دەتوانىت بە دوو رېگا قاپىك گۆشتى برزاو و قاپىك زەلاتە ھەلېزىرېت، لەوۋە ئەگەرى ھەلېزاردنى قاپىك گۆشتى برزاو و قاپىك زەلاتە دەكاتە $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

ھەولېدە ئەگەرى ھەلېزاردنى قاپىك گۆشت و زەلاتەى تەماتە چەندە؟

ھېلكارى درەختى بەكارىدېت كاتىك ژمارەى دەرختەكان كەم بېت. لە زۆر جاردا ئەم كارە بە ئاسانى ناكرىت. ئەگەر ھەولتدا بۇ دروستكرەنى ھېلكارى درەختى بۇ دۆزىنەوى چەند ژمارە كە لە 5 پەنوسى جياواز دەتوانىت بېكېھېنى بەبەكارھېتانی پەنوسەكانى 1، 2، 3، 4، 5، 6 ئەوا دەبىنىت ژمارەى گەلەكانى درەختەكە زۆر دەبېت. لېرەدا پېويستى بۇ تەكنىكى تر سەرى ھەلدا بۇ ژماردن، لەم تەكنىكانە بنەرەتى ژماردنە. ئەم بنچىنە ھەلدەستېت بەوى كە ھەلېزاردنى r دانە لە n دانە يەك لەدوايىەك ژمارەى ھەلېزاردنەكانى كە لەتوانادايە يەكسان دەبېت بە ئەنجامى لېكدانى ژمارەى ھەلېزاردنەكانى كە لە توانادايە. ئەنجامەكان جياواز دەبن ئەگەر دانە ھەلېزىراو كە بخرىتە يان نەخرىتەوۋە ناو كۆمەلەكە پېش ھەلېزاردنى دانەكەى دواتر، ھەروەھا رېكخستەن ھەبېت يان فەرامۆش كرابېت. ئەو شىان دەمانخاتە 4 بارەو.

ژمارەى رېگاكانى پاكېشانی نمونەيەك

لە r دانە بېت لە نېوان n دانە كە $r \leq n$.



تېيىنى

ئەگەر باسى جورى راکېشانەكە نەھاتېوۋە لە پرسىارەكەدا، ئەوا راکېشانەكە بى گەپاندەوۋە و بى رېكخستەن دادەنرېت.

نمونہ

2

بہکارہینانی یاسای ژماردنی بنہ پرتی بؤ دؤزینہ وھی ژماردی دانہ کانی نمونہ یهك چہند ژماره كه هریهكهیان له 5 پهنوسی جیاواز دتوانی پیکبهینیت بهبهکارهینانی پهنوسه کانی 1، 2، 3، 4، 5، 6؟ بؤ پیکبهینانی ئه و ژمارهیه، سه رها پهنوسی یه کان هلبژیره. دتوانی له نیوان 6 پهنوس هلبژیریت ژماردی هلبژاردنه کان 6 پیگایه، له دوایدا پهنوسی دهیان. دتوانیت له نیوان ئه و پینچ پهنوسه ماوه هلبژیری ژماردی هلبژاردنه کانی 5 پیگایه، بهم شیویه ژماردی هلبژاردنه کانی پهنوسی سه دان 4 پیگایه، و ژماردی هلبژاردنه کانی پهنوسی ههزاران 3 پیگایه، و ژماردی هلبژاردنه کانی پهنوسی دههزاری 2 پیگایه، یاسای ژماردنی بنه پرتی بهکارینه بؤ ئه وھی بزانت چهند ژماره پیک دیت.

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$$

دتوانیت 720 ژماره پیکبهینی.

ههولبد

چهند ژماره له 4 پهنوسی جیاواز دتوانیت پیکبهینی بهبهکارهینانی پهنوسه کانی 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7؟

نمونہ

3

دؤزینہ وھی ژماردی پیگاکانی پاکیشانی نمونہ یهك. سندوقیک 7 گۆی پهنوسکراوی له 1 تا 7 تیدایه ژماردی پیگاکانی پاکیشانی 3 گۆ له م باراندا بدؤزهو:

ا) به گه پاندنه وه و پهچاوکردنی پیکهستن. ب) به گه پاندنه وه و بی پهچاوکردنی پیکهستن. ج) به بی گه پاندنه وه و پهچاوکردنی پیکهستن. د) به بی گه پاندنه وه و بی پهچاوکردنی پیکهستن.

ا) به گه پاندنه وه و پهچاوکردنی پیکهستن.	$n^r = 7^3 = 343$
ب) به گه پاندنه وه و بی پهچاوکردنی پیکهستن.	${}_{n+r-1}C_r = {}_{7+3-1}C_3 = {}_9C_3 = 84$
ج) به بی گه پاندنه وه و پهچاوکردنی پیکهستن.	${}_7P_3 = 210$
د) به بی گه پاندنه وه و بی پهچاوکردنی پیکهستن.	${}_7C_3 = 35$

ههولبد

سندوقیک 10 گۆی پهنوسکراوی له 1 تا 10 تیدایه ژماردی پیگاکانی پاکیشانی 4 گۆ له م باراندا بدؤزهو:

ا) به گه پاندنه وه و پهچاوکردنی پیکهستن. ب) به گه پاندنه وه و بی پهچاوکردنی پیکهستن. ج) به بی گه پاندنه وه و پهچاوکردنی پیکهستن. د) به بی گه پاندنه وه و بی پهچاوکردنی پیکهستن.

نمونہ

4

هه ژمارکردنی ئه گهر به بهکارهینانی تهکنیکی ژماردن سندوقیک 20 گۆی پهنوسکراوی له 1 تا 20 تیدایه. دوو گۆ پاکیشرا یهك له دواوی یهك به بی گه پاندنه وهی گۆی یهكهم بؤ ناو سندوقه كه پیش پاکیشانی گۆی دووهم. ئه گهر چهنده كه هه گۆیهك پهنوسی تاکی له سه ر بیئت.

هه موو دهرخسته یهك له دهرخسته کانی ئه و تاقیکردنه وه هه رهمه کییه بریتیه له جووته پیکهراوی (n_1, n_2) كه n_1 هیمای ئه و ژماره یهك له سه ر گۆی یهكهمه وه n_2 هیمای ئه و ژماره یهك له سه ر گۆی دووهمه. ژماردی دهرخسته کان به پیی یاسای بنچینه یی ژماردن بریتیه له ئه نجامی لیكدانی ژماردی گۆیه کانی ناو سندوقه كه له کاتی پاکیشانی گۆی یهكهم (20) له ژماردی گۆیه کان له کاتی پاکیشانی گۆی دووهم 19 واته $20 \times 19 = 380$ ژماردی ئه و دهرخسته نی كه پاسادانی پروداوه كه دهكهن بریتیه له ئه نجامی لیكدانی ژماردی ئه و گۆیه نی ژماردی تاك هه لده گرن له کاتی پاکیشانی گۆی یهكهم (10) له ژماردی ئه و گۆیه نی كه ژماردی تاك هه لده گرن له کاتی پاکیشانی گۆی دووهم 9 واتا 90، له وه وه ئه گهری ئه وهی كه هه ردوو گۆیه كه ژماردی تاك هه لده گرن دهکاته $\frac{90}{380} = \frac{9}{38}$

ئه گهر چهنده هه رگۆیهك ژماردی جووتیان له سه ربی؟

✓ خالی جاودیری

غزونه

هه ژمارکردنی ئه‌گهر به‌به‌کاره‌ینانی ته‌کنیکی ژماردن

سندوقیك 6 گۆی سوور و 4 گۆی سپی تیدایه. دوو گۆله یه ککاتدا ږاکښرا. نهگه ری دوو گۆیه که سوور بن جهنده.

ژماره‌ی دهرخسته‌کانی ټو تاقیکړنه‌وه‌یه بریتیه له ژماره‌ی گونجینه‌کانی دوو‌گوله‌بڼه‌رتی 10

$${}_{10}C_2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45 \quad \text{گۆ(4 + 6)واته:}$$

ژماره‌ی دهرخستنه‌کانی ئه‌و پروداوه بریتیییه له ژماره‌ی گونجینه‌کانی دوو گۆ له بنه‌رته‌ی 6 گۆ

(ژمارهی گۆیه سووره‌کان) واتا: ${}_6C_2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$

لهوهی پېشو د درده چیت که نه گهري دوو گوښه که سووربن $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

ههولېده

ئەگەرى ھەر گۆشەيەك سېى، بىت چەندە؟

غزو و نه

هه ژمارکردنی ئه گهر به به کارهینانی تهکنیکی ژماردن.

کارگری زانگو ژمارهی دۆسیه که پیکهاتوو له 4 رهنوس بۆ ههر خۆبندکاریکی سالی یه کهم تایبه تکر دووه. ئەگهري ژمارهی کاروان چه نه که پیکهاتوو له 4 رهنوسی یه که له دواي یه که له لای

چەپەو دەستپێدەكات. بۆ دیاریکردنی ژمارەی دەرخیستەکانی ئەو تاقیکردنەویە لە سەرمانە

دياريكهين كه ههر ده‌رخته‌يه‌ك ريزكردي 4 رهنوسه له بنچينه‌ي 10 يان گونجيني 4 رهنوسه

له بنچینه‌ی 10. له بهر ئه‌وه‌ی ریک‌خستنه‌که ژماره‌ی دۆسیه‌کان له چه‌په‌وه‌ بو راست پێی پله

دهكړيڼ بابه‌څي پيډه‌درېټ، بويي ده‌رخسته‌كه ريزكړنه نه‌ك گونجېڼ. ژماره‌ي ټه‌و ده‌رخستانه

$${}_{10}P_4 = \frac{10!}{4!} = 5040 \quad \text{بریتییه له:}$$

دهرخته‌گانی رووداو که بریتیه له 0123، 1234، 2345، 3456، 4567، 5678، 6789 ژماره‌یان

7ه. له‌وهی پېښو بوټمان ددره‌چیت نه‌گه‌ری ژماره‌ی کاروان که پیکه‌تووه له 4 ره‌نوس‌ی یه‌ک له

دواى يهك به ده ستيپيكر دن له لاي چه په وه بريتييه له $\frac{7}{5040} = \frac{1}{720}$

ههولبده

ئەگەر زىمارى دۆسيە خەندەكە پىكەتتە 4 رەنۇسى يەك بەدۋاى يەك، ئەگەر

خویندنه و هت له راسته وه به رهو چهپ یان به پیچه وانه بیت چهنده؟

هه ژمارکردنی ئه گهر به به کارهینانی تهکنیکی ژماردن.

سندوقيك 7 گۆي سوورو 3 گۆي رهشي تيدايه. سي گۆ لهيهك كاتدا راكيشرا، نهگهري چهنده كه

بہ لایہ نی، کہ مہ وہ گوئیہ ک سوور بیٹ؟

ژماره‌ی درخسته‌کانی، نه‌و‌تاقیکردنه‌وه‌ی بریتیه‌ی له‌گونجینی، 3 گۆ‌له‌ی بنجینه‌ی 10 گۆ‌(7+3)

چونکہ گویہ کان بہیہ کہ وہ پراکیڈشان پڑکردنی تیدا نیہ، واتا گونجینن:

$${}_{10}C_3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

دەرڅسته‌کان که پاسادانی رووداو ده که نه وانەن که پیکدین له‌گۆیه‌کی سوور و دوو گۆی رهش

وہ ٹھوانہ پیکیڈین لے دوو گوی سوور و گویہ کی رہش و ٹھوانہ کی کہ پیکیڈین لے 3 گوی سوور.

ژماره‌ی دهرخسته‌کان که پیکدین له گوڤیه‌کی سوور و دوو گوڤی رهش بریتیه له ${}^7C_1 \times {}^3C_2 = 7 \times 3 = 21$

ژماره‌ی درخستنه‌کان که پیکدین له دوو گۆی سوور گۆیه‌ک، رهش بریتیه له ${}^7C_2 \times {}^3C_1 = 21 \times 3 = 63$

ژماره‌ی دهرخسته‌کان که پیکدین له 3 گۆی سوور بریتیه له ${}^7C_3 = 35$

21+63+35=119 (ثماره‌ی درخسته‌کان که یاسه‌دان‌ی ده‌کهن بریتبه له

له ووه دهردهكه ویت ئه گهری به لایه نی كه مه وه یه كه له سی گویه كه سوور بیټ بریتیه له $\frac{119}{120}$ دهوانرا ئه م پرسیاره شیکار بکهین به به کارهینانی پروداوی تهواو کهر. که پروداوی تهواو کهر بۆ پروداوی A «گویه كه له 3 گویه کان سوور بیټ» بریتیه له پروداوی \bar{A} «هرسی گویه كه رهش بیټ» ژماره ی ئه و درخستنهانی كه پاسادانی پروداوی تهواو کهر دهکن بریتیه له گونجینی 3 گۆ له بنچینه ی 3 كه دهکاته 1. له ووه دهردهكه ویت.

$$P(\bar{A}) = \frac{1}{120}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{120} = \frac{119}{120}$$

ههولبده ئه گهری به لایه نی زۆره یه کێك له گویه کان سوور بیټ چهنده؟

راهینان

به رده وامبون له بیر کاریدا

- 1 په یوهندی نیوان هیلکاری درهختی و یاسای ژماردنی بنه پرتی پونبکه وه.
- 2 په یوهندی نیوان یاسای ژماردنی بنه پرتی و هه ژمارکردنی ژماره ی پیزکردنه کان پونبکه وه.

راهینانی ئاراسته کراو

- 3 له تاقیکردنه وه یه کی هه پهمه کی پیوستیکرد 3 پارچه پارهی کانزایی هاوشیوه هه لبریت.
- 4 هیلکاری درهختی به کار بهینه بۆ دۆزینه وهی گشت درخستهکانی ئه و پروداوه. هیلکاری بهینه بۆ هه ژمارکردنی ئه گهری درکه وتنی دوو پرووی شیر به لایه نی كه مه وه.
- 4 كه سیك چوه پیشه نگیه کی ئۆتۆمبیله کان بۆ کپینی ئۆتۆمبیلێك، له پیشه نگیه بینی ئۆتۆمبیله کان جۆری فۆرد و مه رسیدیس و تویوتا هیه، وه بینی له هه ر جۆریك له ئۆتۆمبیلهکانی پهنگی سپی و رهش و زیوی هیه، هیلکاری درهختی به کار بهینه بۆ دۆزینه وهی ئه گهری ئه وهی ئۆتۆمبیلێکی مه رسیدیس بکریټ.
- 5 چه ند ژماره ی 3 په نووسی دهوانیت پیک بهینیت به به کارهینانی هه موو په نووسه کان جگه له 0 ؟
- 6 سندوقێك 11 گۆی په نووسکراوی له 1 تا 11 ی تیدایه. ژماره ی پێگاکانی هه لپژاردنی 3 گۆ له م بارانه ی خواره وه بدۆزه وه.
- ا به گه پاندنه وه و په چا وکردنی پیکهستن.
- ب به گه پاندنه وه و بی په چا وکردنی پیکهستن.
- ج به بی گه پاندنه وه و په چا وکردنی پیکهستن.
- د به بی گه پاندنه وه و بی په چا وکردنی پیکهستن.
- 7 سندوقێك 13 گۆی په نووسکراوی له 1 تا 13 تیدایه، له تاقیکردنه وه هه پهمه کی به پیوستیکرد دوو گۆ رابکیشریټ یه كه له دوا یه كه ئه گهری ئه وهی گویه کان ئه و ژماره یان له سه ر بیټ كه متره له 10 چه ند له کاتی گه پاندنه وهی گۆی یه که م بۆ ناو سندوقه که پیش راکیشانی گۆی دووهم، وه کاتی نه گه پاندنه وهی گۆی یه که م.
- 8 توور هگه یه كه 7 گۆی رهش و 3 گۆی سووری تیدایه، له تاقیکردنه وه هه پهمه کی به پیوستیکرد دوو گۆ پیکه وه رابکیشریټ، ئه گه ر ئه وهی كه دوو گویه که رهشبن چه ند؟

- 9 **۹** ووشەى نەھنى چوونە ناو ئىنتەرنىت لە 5 پىت لە پىتەكانى ئەبجەدى ئىنگلىزى پىكىدەت. نىان لە توورەگەيەك چەند كاغەزىكى ھاوشىوھى دانا كە ھەريەكەيان پىتەك لە پىتەكانى ئەبجەدى ئىنگلىزى لەسەرە كە ژمارەيان 26 پىتە، لە پاشاندا 5 كاغەزى پاكىشا. ئەگەرى چەندە ئەو پىتە، پىتەكانى دواى يەكەن بە پىي رىزبەندى ئەبجەدى؟
- 10 **۱۰** سىندوقىك 9 گۆى سوور و 4 گۆى رەشى تىدايە، ئەو گۆيانە گشتيان ھاوشىوھن تەنھا لە پەنگا جىياوزن لە تاقىكرەنەو ھەرمەكەيەكە پىويستىكر 3 گۆپەكەو ھاوشىرەت، ئەگەرى چەندە بەلايەنى زۆرەو دوو گۆ لە سى گۆيەكان رەشەن؟

پرسىار و جىيە جىكرەن

- 11 **۱۱** ژمارەى خوئىندكارانى يەكەك لە پۆلەكان 40 خوئىندكارە، لە نىوانياندا 25 خوئىندكار دەرچوونە لە تاقىكرەنەو ھى بىركارى، و 28 خوئىندكار لە تاقىكرەنەو ھى زمانى بىانى و 15 خوئىندكار لە ھەردو تاقىكرەنەو ھەكە دەرچوونە. لە تاقىكرەنەو ھەرمەكەيەكە پىويستىكر يەك لە خوئىندكارەكانى پۆلەكە ھەلپىزىردىت لەرپىگى دەنگانەو تا بىتە نوئەريان، ئەگەر چەندە ئەو خوئىندكارە لەوانە بىت كە:
- أ **۱** تەنھا لە تاقىكرەنەو ھى بىركارى دەرچووبىت.
- ب **۲** تەنھا لە تاقىكرەنەو ھى زمانى بىانى دەرچووبىت.
- ج **۳** لە ھەردو تاقىكرەنەو ھەكە دەرچووبىت.
- د **۴** لە ھەردو تاقىكرەنەو ھەكە دەرچووبىت.
- 12 **۱۲** ھىلكارى درەختى دروستبەكە بۆ دۆزىنەو ھى ھەموو ئەو ژمارانەى كە پىكەتاون لە دوو رەنووسى جىياوز، كە دەتوانى پىكى بەئىت لەرەنووسەكانى 1، 2، 3، 4، 5.
- 13 **۱۳** ئەگەر لە سىندوقىكدا 5 گۆى رەنووسىكار لە 1 تا 5 دابىت، و دوو گۆ يەك لە دوايەك رابكىشەت بەگەراندەو ھى گۆى يەكەم بۆ سىندوقەكە پىش پاكىشانى دووھم، ئەگەرى رابكىشانى ئەو دوو گۆيە چەندە كە ھەمان رەنووسىيان لە سەربىت.
- 14 **۱۴** لە سىندوقىكدا 18 گۆپى كارەباى تىدايە لە نىوانياندا 5 گۆپ لەكارەوتوھ. لە تاقىكرەنەو ھەرمەكەيەكە پىويستىكر بە رابكىشانى دوو گۆپ لە سىندوقەكە يەك لە دوايەك بەبى گەراندەو ھى گۆپى يەكەم بۆ ناوسىندوقەكە پىش پاكىشانى گۆپى دووھم. ئەگەرى چەندە:
- أ **۱** دوو گۆپەكە لەكار كەوتەن؟
- ب **۲** بەلايەنى كەمەو يەكەيان لەكار كەوتەن؟
- 15 **۱۵** ئەگەرى بەدەستەينانى دووجار پووى خەت و دووجار پووى شىر لە كاتى ھەلدانى پارچە دراويكى كانزايى 4 جار يەك لە دوايەك چەندە؟
- 16 **۱۶** لە تاقىكرەنەو ھەيەكى ھەرمەكى پىويستىكر بە ھەلدانى دوو بەردەزار يەكەيان سوور ئەويتريان شىن، و تۆماركرەنى سەرجمى ئەو دوو ژمارەيەكى كە بەديار دەكەون. ھەر ئەگەر ئىك بدۆزەو بۆ:
- أ **۱** سەرجمى دوو ژمارەكە تاكىبەت يان گەورتەبى لە 11.
- ب **۲** سەرجمە ژمارەيەكى جووتى بچوكتەر بىت لە 8.
- ج **۳** سەرجمە ژمارەيەكى تاك بىت و لەيەك رەنووس پىكەتەبى.

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6



پارچه	ژماره‌ی خانه‌کان
ویرانگر	2
پاپوړی جهنگی	3
پاپوړی ژیر ناو	3
پاپوړی زه‌خیره	4
هه‌لگری فروکه‌کان	5

17 له‌یاری «جهنگی دهریا» هر یاریزانیك له‌سهرتادا خاوه‌نی ویرانگر و پاپوړیكی جهنگی و ژیر ناو و پاپوړی زه‌خیره و هه‌لگری فروکه‌یه، که له‌سهر تابلویه‌کی چوار گۆشه‌یی دانراوون که له 100 خانه‌پیک هاتووه، ئهم خشته‌ی بهرام‌بهر ژماره‌ی خانه‌کان نیشاندهدات که هر پارچه‌یه که له‌سهر تابلویه‌که داگیری ده‌کات. ئه‌گری چهنده که یاریزانی یه‌که‌م له لیډانی یه‌که‌می له هیچ پارچه‌یه‌کی یاریزانی دوهم نه‌دات.



18 ئازاد 5 به‌رده‌زاری هه‌لدا و ئه‌وانه‌ی له وینه‌که‌دا دیاره به‌ده‌سته‌یه‌ننا، بریاریدا به هیشتنه‌وه‌ی ئه‌و به‌رده‌زارانه‌ی که 4 خالی له‌سهره، وه دوو به‌رده زاره‌که‌ی تری جارپکی تر هه‌لدا.

ا) ئه‌گری چهنده هر 5 به‌رده‌زاره‌که‌ی ئازاد 4 خالی بیټ.

ب) ئه‌گر چهنده به‌لایه‌نی که‌مه‌وه 4 به‌رده‌زاری 4 خالی بیټ.

ج) ئه‌گر چهنده که‌ته‌ن‌ها 3 به‌رده‌زاری 4 خالی ده‌بیټ.

د) په‌یوه‌ندی چیه له نیوان وه‌لامه‌کانی ا، ب، ج دا؟

خویندکاریك هه‌ولی شكاندن‌ی وشه‌ی نه‌ینی د‌دات که ری پیډه‌دات بجپته ناو بژمیری خویندنگایه‌کی: وشه نه‌ینی‌ه‌که پیکدیت له 5 په‌نووس.

19 ئه‌گری چهنده که خویندکاره‌که وشه نه‌ینی‌ه‌که بشکینی کاتی دووباره‌بوونه‌وه‌ی په‌نوس ری پیډریټ؟

20 ئه‌گری چهنده که خویندکاره‌که وشه نه‌ینی‌ه‌که بشکینی کاتی دووباره‌بوونه‌وه‌ی په‌نوس ری پیډه‌دریټ؟

21 ئه‌گری چهنده که خویندکاره‌که بتوانیت وشه نه‌ینی‌ه‌که بشکینیت ئه‌گر ری به دووباره‌بوونه‌وه‌ی په‌نوس نه‌دریټ و سهرجه‌می په‌نوسه‌کان بکاته 10 ؟

22 A و B دوو پروداوی یه‌که تاقیکردنه‌وه‌ی هه‌رپه‌مه‌کین. $P(A) = 0.4$ و $P(B) = 0.5$ له کاتی‌کدا $P(A \cap B) = 0.2$.

ا) نایا دوو پروداوه‌که سهربه‌خون؟

ب) ئه‌گری $P(A \cup B)$ بدوزه‌وه.

23 سى ئەسپ سوار A ۋ B ۋ C پىشېركىدەكەن، ئەگەرى بىردىنەۋەى ھەر ئەسپىك چەندە، ئەگەر بىزانىت كە ئەگەرى بىردىنەۋەى A دوو ئەۋەندەى ئەگەرى بىردىنەۋەى B بىت، ۋ ئەگەرى بىردىنەۋەى B دوو ئەۋەندەى ئەگەرى بىردىنەۋەى C بىت؟ ئەگەرى بىردىنەۋەى B يان C چەندە؟

24 ژن ۋ پىاۋىك شەست سال تەمەنيانە. ئەگەرى گەيشتنى پىاۋەكە بۇ تەمەنى حەفتا سال دەكاتە $\frac{1}{4}$ بىت، ۋ ئەگەرى گەيشتنى ژنەكەى بۇ تەمەنى حەفتا سال لەتەمەنى $\frac{1}{3}$ بىت.

ا ئەگەرى چەندەكە پىكەۋە بگەنە حەفتا سال؟

ب ئەگەرى چەندە بەلايەنى كەمەۋە يەككىيان بگاتە حەفتا سال؟

ج ئەگەرى چەندە كە ھىچ كامىكىيان نەگەنە حەفتا سال؟

روانىن بۇ دواۋە

دوو بەردەزار ھەلدرا

25 ئەگەرى سەرجمى دوو ژمارە دەرگەۋتوۋەكە 12 بىت چەندە؟

26 ئەگەرى سەرجمى دوو ژمارە دەرگەۋتوۋەكە كەمتر بىت لە 5 چەندە؟

27 ئەگەرى يەك لە دوو ژمارە دەرگەۋتوۋەكە بەلايەنى كەمەۋە تاك بىت چەندە؟

28 ئەگەرى يەك لە دوو ژمارە دەرگەۋتوۋەكە بەلايەنى كەمەۋە بچوكتربىت لە 5 چەندە؟

روانىن بۇ پىشەۋە

29 لە تاقىكردنەۋەيەكى ھەرەمەكى پىۋىستىكرد بە ھەلدانى دوو بەردەزار، يەك لە دوايىيەك، ۋ تۆماركردنى سەرجمى ئەۋ دوو ژمارەى كە لەسەر پۈۋى دوو بەردەزارەكە دەرەكەۋىت. ئەۋ سەرجمە كامەيە كە ئەگەرى دەستكەۋتنى ناگۆر بىت، ھەر ژمارەيەك لەسەر بەردەزارى يەكەم دەرەكەۋىت؟ ئەۋ ئەگەرە چەندە؟

نەخشەکان لە پرسپارەکانی ژبانی پوژانەدا بەکار دێن
بەهۆی بەکارهێنانی هێندەکان لە دەرپرینی گۆرانیەکان و
لە پەيوەندی نۆوان دور گۆراو. نموونە لەسەر ئەو دەتوانرێ
پەيوەندی نۆوان خێرای سۆرانیەوێ شەمەندەفەری
پێچاوپێچ و ئەو هێزە سەرنشینەکان جیگیر دەکات لە
شوێنەکانیان بە هۆی نەخشە بنوێنرێت.

بەشی

2

وانەکان

1. نەخشەکان.
2. نەخشە هێکلیەکان.
3. شیوە جیاوازیەکانی
هاوکیشەمی راستەهێل.
4. تەریببوون و ئەستوون
بوونی راستە هێلکان.
5. نەخشە دووجاگان.

گەورەیه وەك نەهەنگ
نەهەنگی قەمبۆر یەكێكە
لە گەورەترین
گیانەوەرەكان لە جیهاندا.
دەتوانیت نەخشەكان بۆ
بەراورد كردنی
پێوانەكانی ئەم
نەهەنگانە لەگەڵ شتە
جیاوازیەكان بەکار بهێنی.

Functions

نەخشەكان

وانەى

1

ئامانجەكان

- نواندىنى پەيۋەندى ئىۋان دوو گۇپراو بە پرونىكرىنەۋەيى.
- دىيارىكرىنى بوۋر مەۋداى پەيۋەندىيەكە.
- دىيارىكرىنى ئىگەرى ئەۋەى كە ئايا پەيۋەندىيەكە نەخشە دەنۋىيىت.
- ھەژماركرىنى بەھايى نەخشە كاتىك گۇپراۋەكە بەھايەكى دىيارىكراۋ ۋەردەگرىت.

زاراۋەكان

Vocabulary

پەيۋەندى Relation

گۇپراۋى ئازاد

Independent Variable

گۇپراۋى پەيۋەست (بەستراۋ)

Dependent Variable

خىشتەى بەھاكەن

Table of Values

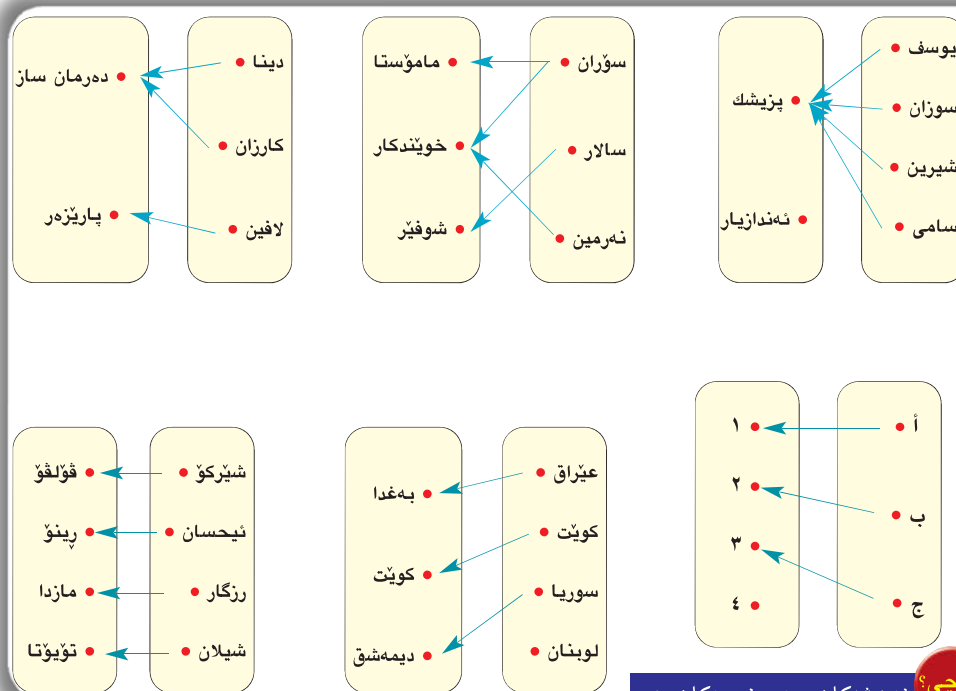
بوۋر Domain

مەۋدا Range

پرونىكرىنەۋە Graph

نەخشە Function

ۋىنە Image



بۇچى؟
نەخشەكان ۋەپەيۋەندىيەكان بە زۆرى بەكاردېن بۇ بنىاتنانى نمونە بىركارىيەكان كە دەرېپن لە ژيانى رۇژانە يان ياسايەكى زانستى دەكات.

چالاقى

Relations and Functions

پەيۋەندىيەكان ۋەنەخشەكان

1. كارزان پەراۋى تەلەفۇنى كىردەۋە ۋىيىنى:



ناو	ژمارەى تەلەفۇن
شكرى	235 246
هيو	456 987
خەسرەۋ	852 369
خەسرەۋ	369 852
قىيان	741 236

ژمارەى تەلەفۇنى قىيان چەندە؟ ژمارەى تەلەفۇنى خەسرەۋ چەندە؟

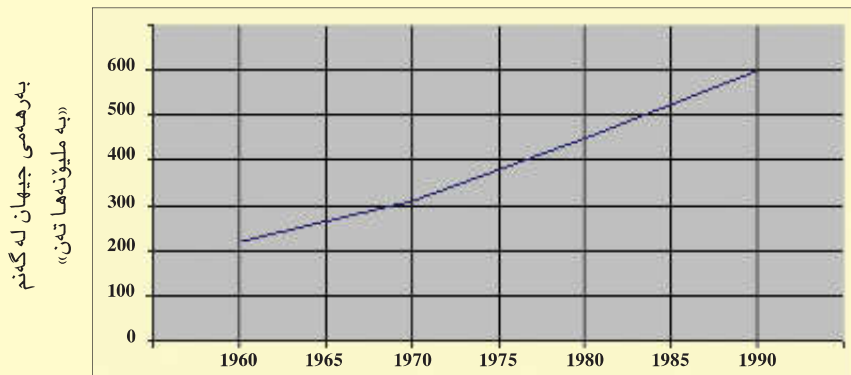
2. بژمىر بەكاربەھنە بۇ تەۋاۋكرىنى ئەۋ خىشتەى دىت كە

پروۋبەرى بازىنەت دەداتى بەپپى بەھا جىاۋازەكانى نىۋەتيرەكەى،

پاشان پرونىبكەۋە چۆن خىشتەكەت تەۋاۋ كىردەۋە.

10	2.5	0	3	0.75	0.5	4	1.5	1	نىۋەتيرە
								3.14	پروۋبەر

3. ئەم وئە پرونە كرنە وە يەى خوارەو پېشكەوتنى بەرھەمى جىھانى گەنم لە نىوہى دووہمى سەدەى بىستەم پروندەكاتەو بە مليۇنەھا تەن.



وئە پرونە كرنە وە يەى بەكاربەتتە بۇ خەملاندنى بەرھەمى گەنم لە جىھان بۇ ئەوہى ئەو خشتەيەى دېت تەواو بكتەيت.

ساڵ	1990	1985	1980	1975	1970	1965	1960
بېرى بەرھەمى گەنم							

4. ئەم خشتەيەى دېت تېكراى پلەكانى گەرما لە كەركوك ديارىدەكات لە ھەفتەى يەكەمى مانگى نىسان.

پۇژانى ھەفتە	شەممە	يەكشەممە	دوشەممە	سێشەممە	چوارشەممە	پنجشەممە	ھەينى
تېكراى پلەى گەرماو	26	24	23	20	22	24	26

تېكراى پلەى گەرماى پۇژى يەكشەممە چەند بوو؟ تېكراى پلەى گەرماى پۇژى چوارشەممە چەندبوو؟ پۇژى پېنج شەممە چەندبوو؟



ئەگەر چوار نمونەى پېشوت پشكنى دەبىنيت ھەريەكەيان دووگۇپراوى تېدايە. وە بەھاي يەككە لەو دووگۇپراوانە بەھاي ئەوى تريان ديارىدەكات.

5. ئەم خشتەيەى دېت تەواوبكە بە ديارىكردى گۇپراوى يەكەم لەھەر نمونەيەك كە بەھاي گۇپراوى دووہم ديارىدەكات.

خالى چاودېرى ✓

نمونه	گۇپراوى يەكەم	گۇپراوى دووہم
1		
2		
3		
4		

باس لە ھەبوونى پەيوەندى Relation نىوان دووگۇپراوى x و y دەكات، ئەگەر بەھاكانى يەككەيان زانراوبېت وەك x بەھاكانى دووہم y ديارىدەكات، لەو بارەدا دەلېين گۇپراوى يەكەم گۇپراوىكى ئازادە Independent Variable و دووہم گۇپراوى پەيوەستە Dependent Variable.

لە نموونەى یەكەم دوو دۆل دەبیت لە وەلامى ئەو پرسپارە: نمرەى تەلەفۆنى خەسەرە چەندە؟ چونکە گۆرپاوى ئازادە کە ناویکە دوو بەهای گۆرپاوى پەيوەستى بەرامبەرە. بەلام لە نموونەکانى تر، تۆ تووشى ئەم کێشەىە نابیت چونکە هەر بەهایەکی گۆرپاوى ئازاد بەرامبەر تەنها یەك بەهای گۆرپاوى پەيوەستە.

بە پەيوەندى ئیوان دوو گۆرپاوى x و y دەوتریت نەخشە **Function** ئەگەر هەر بەهایەکی a لە بەهاکانى گۆرپاوى x تەنها یەك بەهای b لە بەهاکانى گۆرپاوى y بەرامبەر بێت. ئەو بەها تاکانەى b پێى دەوتریت وینە **Image** ی a لە نەخشەکە.

سەر لە نوێ هەر چوار نموونەکە بخوینەو، وە لەهەر باریکدا دیاریبکە ئایا پەيوەندىیەکە نەخشەىە یان نا. وەلامەکەت پروونیکەو.

✓ خالى چاودێرى

ئایا پێدراوەکانى ئەم خستەىە نەخشە دەنویئن؟ ئەو پروونیکەو.

نموونه

(ب)

بەهاکانى گۆرپاوى پەيوەست	بەهاکانى گۆرپاوى ئازاد
7	3
8	3
10	3
42	4
34	10
18	11
52	52

(أ)

بەهاکانى گۆرپاوى پەيوەست	بەهاکانى گۆرپاوى ئازاد
-3.6	1
-3.6	2
4.2	3
4.2	4
10.7	5
12.1	6
52	7

شیکار

(أ) پێدراوەکانى خستەى یەكەم نەخشە دەنویئن. چونکە هەر بەهایەك لە بەهاکانى گۆرپاوى ئازاد یەك بەهای گۆرپاوى پەيوەستى بەرامبەرە.

(ب) پێدراوەکانى خستەى دووم نەخشە نەنویئن، چونکە بەهای 3 بۆ گۆرپاوى ئازاد سێ بەهای گۆرپاوى پەيوەست 7، 8، 10 بەرامبەرەتى واتە خستەى (ب) تەنها پەيوەندى دەنویئیت.

Different ways to define a function

شیۆەکانى پیناسەکردنى نەخشە

ئەگەر بروانیتە نموونەکانى پێشوو دەبینیت زۆر شیۆە بۆ پیناسەى نەخشە هەیه. دەتوانریت پیناسەى نەخشە بکریت بە هۆى:

1. **خستەى بەهاکان Table of Values**: لەم بارەدا نەخشە پیناسە دەکریت بە هۆى خستەىەکی دوو ستوونى، یەكەمیان بەهاکانى گۆرپاوى ئازاد دەگریتە خوێ، و ئەوى تریان بەهاکانى گۆرپاوى پەيوەست بەرامبەرەیان دەگریتەو، بە مەرجێك بەهای گۆرپاوى ئازاد و بەهای گۆرپاوى پەيوەست بەرامبەر لە هەمان ریز بنووسریت.
- نموونه: نەخشەى نموونه 4.

په یونډییه کی پیناسه کراو به هوی خشته وه نه خشه پیک ناهینیت، ئه گهر ستوونی گۆپاوی ئازاد به هایه بگریته خوی له بهرام بهرکه کی دوو به های جیاواز بۆ گۆپاوی په یوه ست هبیت.

لیره وه په یوه ندی پیناسه کراو به هوی خشته وه له نمونه یی یه کهم نه خشه نانوینیت، چونکه به های گۆپاوی ئازاد (خه سه وه) دوو به های جیاوازی گۆپاوی په یوه ست (ژماره ی ته له فون) بهرام بهریه تی.

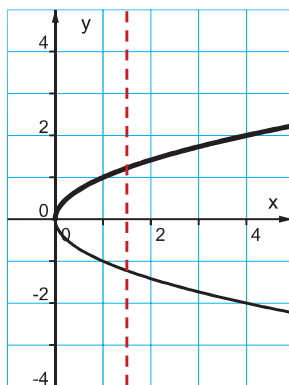
2. رپسا Rule : نه خشه پیناسه ده کریت به هوی رپسایه کی یان یاسایه کی، که به های گۆپاوی په یوه ست به پیی گۆپاوی ئازاد دهرده بریت.

نمونه: نه خشه ی نمونه یی دووهم کاتیک به های گۆپاوی په یوه ست A (پو بهری بازه) دهرده بریت به پیی گۆپاوی ئازاد r (نیوه تیره)، ئه م رپسایه ئه مه یه $A(r) = \pi r^2$.

3. وینه ی پوونکردنه وه یی Graph : نه خشه به هوی وینه ی پوونکردنه وه یی پیناسه ده کریت کاتیک به های گۆپاوی ئازاد له سه ر ته وه ری یه کهم (ته وه ری x) و به های گۆپاوی په یوه ست له سه ر ته وه ری دووهم (ته وه ری y) بن. به های گۆپاوی په یوه ست که بهرام بهر به های گۆپاوی x له به هاکانی گۆپاوی ئازاد پۆوتانی دووهمی ئه و خاله دیاریده کات له سه ر وینه پوونکردنه وه بییه که کاتیک پۆوتانی یه کهمی خاله که ده کاته x .
نمونه: نه خشه ی نمونه یی 3.

تاقیکردنه وه ی راسته هیلی ئه ستوونی Vertical Line Test

ئه گهر راسته هیلیکی ئه ستوونی وینه یه کی پوونکردنه وه ی زیاتر له خالیکیا بری، ئه و ئه م وینه پوونکردنه وه بییه نه خشه نانوینیت.



ئایا ئه و په یوه ندییه پیناسه کراو به هوی وینه ی پوونکردنه وه یی بهرام بهر نه خشه یه؟

شیکار

په یوه ندی پیناسه کراو به وینه پوونکردنه وه بییه کی بهرام بهر نه خشه نانوینیت، چونکه هه به هایه کی موجه بی گۆپاوی ئازاد x بهرام بهر دوو به های گۆپاوی په یوه ست y ، وئاشکراشه راسته هیله ئه ستوونه که وینه پوونکردنه وه بییه که له دوو خالی جیاوازا ده بریت.

نمونه

Studying Functions

خویندنی نه خشه کان

بۆ خویندنی نه خشه یه کی وه $f(x)$ ، پیویسته ئه م خالانه جیبه جییکریت:

1. دیاریکردنی کۆمه له ی ژماره راستیه کان ی گۆپاوی ئازاد x که ده توانریت هه ژمار ی وینه ی

$y = f(x)$ بکات. ئه و کۆمه له یه پیی دهوتریت بواری پیناسه ی نه خشه یان به کورتی

بواری نه خشه Domain.

2. دیاریکردنی کۆمه له ی ژماره راستیه کان ی گۆپاوی په یوه ست دهیگریته وه، و پیی دهوتریت

مه ودا ی نه خشه Range.

3. نواندنی نه خشه که به پوونکردنه وه یی واته نواندنی هه موو جووته ریکخوا وه کان ی (x, y) کاتیک x

دانه بیت له بواری نه خشه که $y = f(x)$. کۆمه له ی ئه و خالانه پییان دهوتریت

هیلی پوونکردنه وه ی نه خشه Graph.

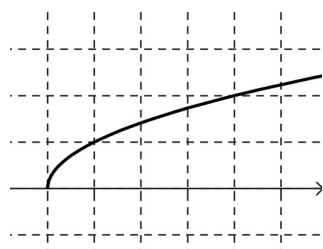
4. پوخته کردنی سیفه ته کان ی نه خشه به هوی خویندنی هیلی پوونکردنه وه که ی.

چۆن پروونکردنەوێی نەخشەیهك پێكدههێنیت؟

ئەگەر نەخشەكە بەھۆی خستەى بەھاكانەو پیناسە كرابێت،، ھەموو خالەكانى (x, y) كە لە خستەكەدا ھاتوون بنوێنە، پاشان ئەو خالانە بە ھێلێكى گونجاو بگەینە. ئەگەر نەخشەكە بە پێناسەك پیناسەكرابێت. خستەى بەھاكانى نەخشەكە پێكبھێنە و خالەكانى بنوێنە و ھێلێ پروونکردنەوێیەكە بە پێگای پێشوو بكێشە. ھەروەھا دەتوانیت بژمێر (كۆمپیوتر) یان بژمێر پروونکردنەوێیەكان بەكاربھێنیت بۆ دروستکردنى ھێلێ پروونکردنەوێی نەخشەكە.

راھێنان

بەردەوامبوون لە بیركاریدا



- 1 جیاوازی نیوان نەخشە و پەيوەندى پروونبکەو، نموونەیهك لەسەر وێنەى پروونکردنەوێى بۆ پەيوەندىبەك بھێنەو نەخشە نەبێت.
- 2 سێ پێگا بۆ پیناسەکردنى نەخشە باسبکە.
- 3 چۆن بواری نەخشەى پیناسەکراو بە ھێلێ پروونکردنەوێی بەرامبەر پرووندەکەیتەو، و مەوداکەى دیاریدەکەیت؟

راھێنانى ئاراستە کراو

ئەو خستنانەى دێن نەخشە دەنوێنن؟ ئەو پروونبکەو.

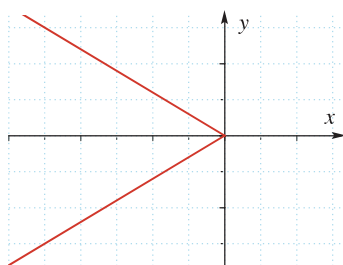
x	y
3	9
2	2
8	-3
2	1

x	y
10	7
20	11
30	9
40	7

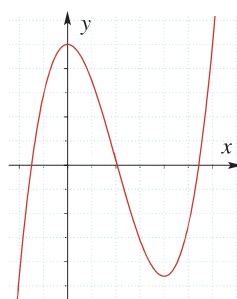
x	y
0	3
1	8
2	8
3	-7

x	y
5	3
8	4
5	7
9	2

دیاریبکە ئەگەر ئەم وێنە پروونکردنەوێیانە نەخشە دەنوێنن یان نا، ھۆی وەلامەکەت



9



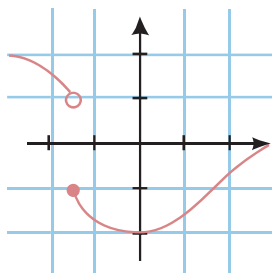
8

روونبکەو.

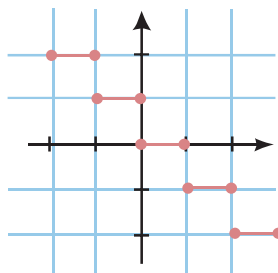
10

ئۆتۆمبیلەکان: گۆراوی A ئەو ئۆتۆمبیلانە دەنۆینێت کە پێگایان پێدراوە لە شارەکتدا پێکەن و گۆراوی N تابلۆی ژمارەیی ئەو ئۆتۆمبیلانە دەنۆین. ئایا پەيوەندییەك لە نێوان A و N دا هەیە؟ ئەگەر وەڵامەكەت «بەڵێ»یە، ئایا ئەو پەيوەندییە نەخشەییە؟ کام لە دوو گۆراوەکە گۆراوی ئازادە و کامیان گۆراوی پەيوەستە؟ هۆی وەڵامەكەت دیاریبکە.

بوارو مەودای نەخشەیی نوێنراو بەم وێنە پوونکردنە وەدیانیە دیاریبکە.



12



11

بەهای نەخشەیی $f(x) = x^2 + 2x - 1$ هەژماربکە کاتی $x = 3$ و کاتی $x = 1.5$.

13

داھات: زیڕنگرێک 24 هەزار دینار لە هەر کاتژمێرێکی کارکردندا وەردەگرێت، سەرپرای 20 هەزار دینار بۆ خستنه پووی لەکارکەوتنەکان.

14

نەخشەییەك بنوسە داھاتی زیڕنگرەكە R بەپێی ژمارەیی کاتژمێرەکانی کار x بنۆینیت.

ب) داھاتی زیڕنگرەكە هەژماربکە ئەگەر 5.5 کاتژمێر کاربکات.

راھێنان و جیبە جیکردن

ئایا ئەم خشتانەیی دین نەخشە دەنۆین؟ ئەو پوونبکەرەو.

x	4	4	6	6
y	-2	2	-3	3

17

x	1	2	3	4
y	6	6	9	9

16

x	0	2	2	4
y	3	-5	1	7

15

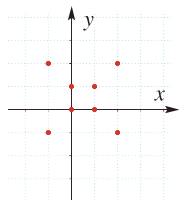
x	-2	-2	0	2
y	-5	-3	4	6

19

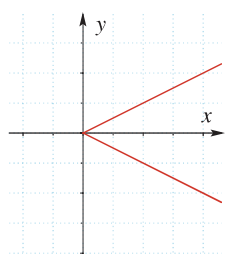
x	-5	-3	-1	1
y	8	8	-2	-2

18

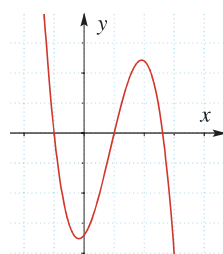
ئایا ئەو وێنە پوونکردنەوانەیی خوارەو نەخشە دەنۆین؟ ئەو پوونبکەرەو.



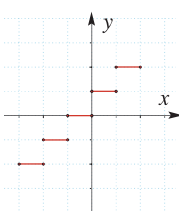
22



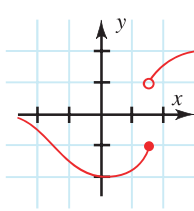
21



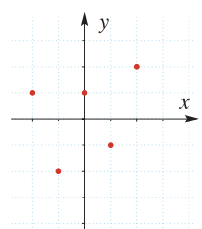
20



25



24



23

بەھاي نەخشەكە ھەژمارىكە بە لەجىياتىدانان

$$f(x) = 2x - 6 \text{ كاتىك } x = 1, x = 3 \quad 26$$

$$f(x) = 5 - 3x \text{ كاتىك } x = 1, x = 3 \quad 27$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{5} \text{ كاتىك } x = -9, x = 1 \quad 28$$

$$f(x) = \frac{x-4}{5} \text{ كاتىك } x = -9, x = 9 \quad 29$$

$$f(x) = 2x^2 - 3x \text{ كاتىك } x = 3, x = -2.5 \quad 30$$

$$f(x) = x^2 + 4x - 1 \text{ كاتىك } x = 2, x = 1.5 \quad 31$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 \text{ كاتىك } x = -1, x = \frac{3}{4} \quad 32$$

$$f(x) = -4x^2 \text{ كاتىك } x = \frac{3}{2}, x = -2 \quad 33$$

ھىلى پروونكرىنەوھى بۇ نەخشەكە بىكىشە بە بەكارھىتەنى بزمىرى پروونكرىنەوھى يان بە
پىگى ئاسايى ، لە پاشان بوار ومەوداكە دىاربىكە.

$$y = -\frac{x}{2} \quad 34 \quad y = -\frac{2}{3}x - 5 \quad 35 \quad y = -2x^2 \quad 36 \quad y = 2 \quad 37$$

$$y = -6 \quad 38 \quad y = x^2 \quad 39 \quad y = x^2 + 2 \quad 40$$

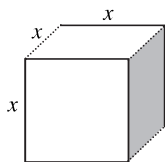
پروونكرىنەوھى نەخشەكە بىكىشە بوارەكە $3 \leq x \leq -3$ ومەوداكە $5 \leq y \leq -5$ بىت.

پروونكرىنەوھى نەخشەكە بىكىشە بوارەكە $5 \leq x \leq -2$ ومەوداكە $4 \leq y \leq 0$ بىت.

بەھاي نەخشەكە $f(t) = t^2 - 3$ لە ھەر بارىكدا ھەژمارىكە.

$$t = \sqrt{2} \quad 43 \quad t = \sqrt{2} - 1 \quad 44 \quad t = c + \sqrt{2} \quad 45$$

بەردەنگارى



ئەندازە: ھىماي گۇراوى V بۇ قەبارە شەشپالووى بەرامبەر دابنى.

نەخشەكە بنووسە بۇ قەبارە شەشپالووكە V بەپىي درىزى لاکە x .

پرووبەرى پرووبەك لە پرووبەكەنى شەشپالووكە ھەژمارىكە كاتىك

قەبارەكە 27m^3 بىت.

بەكاربردن: فروشگايەكى جلو بەرگ داشكانىكى

بەپىزە 30% لەسەر ھەموو جلو بەرگەكان راگەيان.

أ) دانا 47.25 ھەزار دىنارى دا بۇ نرخی كراسىك لە وەرزى

داشكاندەكە، ئايا نرخی كۆنى كراسەكە چەندبوو؟

ب) زانا پانتۇلىكى كرى نرەكە 52 ھەزار دىنار بوو

پىش وەرزى داشكاندەكە. ئايا نرە تازەكە چەندە؟



روانين بۆدواوه



49 ئەم خستەيەي خوارەو بە مليۆنەھا ئەو كەسانە دياريدەكات كە لە تەمەني 21 تا 24 سالیدا دەستیان لە خويندن هەلگرتوو.

أ ئەگەری ئەو چەندە يەكێك لە دەرچووكان لە ئاستی ماجستیر یان دكتورادابى وکاربکا؟

ب ئەگەری ئەو چەندە كەسێك كە بە هەرمەكى هەلبژێردرایت لە ئاستی بنەپەتی بیت و کار نەكات؟

کارکردنی دەرچووكان 21 تا 24 سالی (بەهەزار)		
ناستی خويندن	کار دەكەن	کار ناکەن
بنەپەتی	1.060	0.834
دواناوەندی	2.793	1.157
پیشەیی	4.172	1.634
بەكەلۆریۆس	1.53	0.372
ماجستیر یان دكتورا	0.104	0.041

50 بپی $2 \div [7 - (5 - 3) - 2]$ بە بەکارهێنانی پزیهتی کردارەکان هەژمار بکە.

روانين بۆپیشەوه



51 وێنەى پروونکردنەوهیى بۆ پهيوەندى $y = x^2 - 2x - 10$ بکێشه لە نێوان x و y . و پروونیکهوه بۆچی ئەم پهيوەندییه نەخشە دەنوێنێ. بوار و مەودای نەخشەكە دیاریبکە.



نەخشەى ھېلى سادەترىن شېۋى
نەخشەى جەبرىيە و ھەروەھا لە
بىناىتەنى نمونە بىرکارىيەكان لە
بارەكانى ژيانى پۆزانەدا زۆر بەكاردىن.

بۆجى

نامانجەكان

- ناسىنەۋەى نەخشەى ھېلى.
- نەخشەى ھېلى بۆ بىناىتەنى
نمونە بىرکارىيەكان
بەكاردەھىترىت.
- بوار و مەوداى نەخشەى
ھېلى و خالەكانى
يەكتەرىپىنى لەگەل دوو
تەۋەرى پۆوتانەكاندا
دىارىدەكات.

زاراۋەكان

Vocabulary

نەخشەى ھېلى
Linear function
لارى Slope

Exploring linear function

دۆزىنەۋەى نەخشەى ھېلى

دەزانى كە پەلى كۆلانى ئاۋ 100 پەلى سەدىيە. بەلام پەنگە نەزانىت كە 100 پەلى سەدى پەلى
كۆلانى ئاۋە لە شوئىنكە لە ئاستى پۈۋى دەريابىت (بەرزىيەكەى لە پۈۋى دەريا سفر دەبىت)
پەلى كۆلانى ئاۋ دەگۆرپىت بە گۆرانى بەرزى شوئىنكە لە پۈۋى دەرياۋە. ئەۋ پەلىە لەسەر
چىاكانى ھىمالايا كەمتەرە لە 100 پەلى سەدى بەلام زىاتەرە لە 100 پەلى سەدى لە دەرياي
مردوۋ. ئەم خشتەيەى دىت ھەندىك شوئىنى جىهان و بەرزىيەكانى دىاركردوۋە، لە ئاستى پۈۋى
دەرياۋ پەلى كۆلانى ئاۋ تىياندە.

پەلى كۆلانى ئاۋ	بەرزى لەئاستى پۈۋى دەريا (بەمەتر)	شوئىن
100	0	بەسرە (عىراق)
99.68	586	فىرېۋرگ (سوئىسرا)
99.135	1 250	سوفەر (لوبنان)
98.995	1 832	كولۇرادۆ سېرنگر (ئەمىرىكا)
98.23	3 220	قورنە سەۋدا (لوبنان)
100.23	-420	دەرياي مردوۋ (ئوردون)

1. پىدراۋەكانى خشتەكە لە پۈۋەختى پۆوتاندا بنوئىنە كە تەۋەرى يەكەم x بۆ بەرزى لە پۈۋى
دەريا بە مەترە، ۋە تەۋەرى دوۋەم y بۆ پەلكانى گەرمى بە پۈۋەرى سەدى.
2. خالەكان بە پارچە راستەھىل بگەينە. چى تىبىنى دەكەيت؟
3. ئايا پەيوەندى نىۋان بەرزى لە پۈۋى دەرياۋ پەلى كۆلانى ئاۋ نەخشەيە؟ ئەۋ پۈۋىنكەۋە.
4. ئەۋ وئىنە پۈۋىنكردەنەۋەيىيە دەستكەۋت بەكاربەيئە بۆ خەملاندنى پەلى كۆلانى ئاۋ لە
بەرزى 3000 مەتر لە پۈۋى دەرياۋە.
5. ئەۋ وئىنە پۈۋىنكردەنەۋەيىيە دەستكەۋت بەكاربەيئە، بۆ خەملاندنى بەرزى شوئىنكە لە پۈۋى
دەرياۋە، ئەگەر بزانىت پەلى كۆلانى ئاۋ تىايدا 97 پەلە بىت.
6. لە كۆيدا وئىنە پۈۋىنكردەنەۋەيىيە تەۋەرى y دەپرىت؟ ئەم خالە چى دەنۆئىنەت؟

جىبەجىكرن

فىزىيا

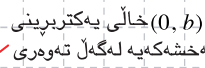
نه‌خشه‌ی هیلی

نه‌خشه‌ی هیلی: نه‌خشه‌یه‌که پروونکردنه‌وه‌که‌ی هیلیکی راسته.

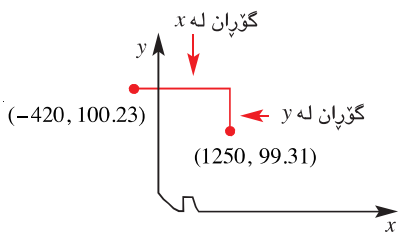
رېښای نه خښه ی هیلی بهم شیوه ده نو سریت: $f(x)=mx+b$

دەتوانیت نەخشە ھێڵییەکان بۆ بنیاتنانی نموونەى بیرکای بەکاربھێنیت بۆ ھەندى له پەيوەندییەکانى نۆوان دوو گۆراو وەك پەيوەندییەكەى پېشوو (بەرزى له پرووى دەریاو پلەى كولانى ئاو).

هه‌روه‌ها ده‌توانیت برپوانیته پ‌ژیدی
گۆرانی به‌های نه‌خسته‌که بۆ
گۆرانی به‌های گۆرپ‌وی ئازاد که
نه‌گۆرمو ده‌کاته لاری پاسته
هیل‌ه‌که.



پژدهی گوپانی بهای نهخشهی هیلی $f(x)$ بوگوپانی بهای x نهگورده و نهو پژدهیهش پیی دهوتریت لاری Slope نهخشهی هیلی.



پیداوه‌مکانی خشته‌ی لاپه‌په‌ی پېښو به‌کاربېښه بو
پوونکردنه‌وه‌ی چوښه‌تی گوږانی پله‌ی کولانی ناو
کاتیک به‌رزی له‌ رووی دهریا ده‌گوریت.

ب رڼسای نه‌خشه‌ی پله‌ی کولانی ئاو به پڼی به‌رزی له
رووی دریاوه بنووسه.

شیکار

ا x به‌کاربھیٽه ٻو به‌ری (به‌متر) له پروی دریاوه و y ٻو پلهی کولانی ټاو به پیوهری سه‌دی. دوو به‌ها ٻو گورپوی ئازادی x به‌کاربھیٽه دوو به‌های نه‌خشکه‌ی به‌رامبه‌ریان وه‌ک به‌ری سوفهر له لوپنان و دریاى مردوو له ئوردن. پڙه‌ی گورپانی پلهی کولانی ټاو ٻو گورپانی به‌ری له رووی دریاوه هژماریکه ٻو ټه‌وه‌ی لاریت ده‌ستیکه‌وټ.

$$m = \frac{\text{گۆران له نه خشه}}{x \text{ گۆران له}} = \frac{99.31 - 100.23}{1250 - (-420)} = -0.00055$$

ئەمەش وادەگەيەنیت زىادىبونى ھەر مەترىك لە بەرزى لە پووى دەرياو دەيىتە ھۆى گۆرپن لە پلەى كۆلانى ئاوبە برى 0.00055-پلە.

ب) پلہی کولانی ناو = پلہی کولانی ناو له ئاستی پووی دهریا + $m \times$ بهرزی

$$f(x) = 100 + (-0.00055)x$$

کهواته ریّسای نه‌خشه‌که $f(x) = 100 - 0.00055x$

بیری پەخەنگەر

ئایا پلەى كولانى ئاو زىاد دەكات يان كەم دەكا ئەگەر بەرزى لە پووى دەريا زيادبكات؟
پوونىبەكەو چۆن خستەى سەرەتاي وانەكە بەكار دەهينيت بۆ وەلامدانەوئى ئەم پرسيارە.
پوونىبەكەو چۆن پوونكر دنەوئى نەخشەى $f(x) = 100 - 0.00055x$ بەكار دەهينيت.

$$m = -0.00055$$

$$f(x) = mx + b$$

$$100 = -0.00055(0) + b$$

$$100 = b$$

پيساي نەخشەكە ئەمەيه:

$$f(x) = -0.00055x + 100$$

شارا پيساي نەخشەيهكى هيلى دۆزيبەوئە هەروەك لە بەرامبەردا هاتووە.

پيگاكاني شارا باسبە.

دوو شويني تر لە خستەكە بەكار بهينه بۆ دۆزبنەوئى پيساي

نەخشەكە. ئايا هەمان پيسات دەستدەكهوئى؟

بەرەنگارى

نموونه

هەژمارى $f(9)$ بكە كاتيك $f(x) = \frac{1}{3}x + 17$ بەهاى x چەندە ئەگەر $f(x) = -1$ ؟

شيكار

لە جياتى x بەهاى 9 دابنى.

$$f(9) = \frac{1}{3} \times 9 + 17$$

$$= 3 + 17$$

$$= 20$$

لە جياتى $f(x)$ بەهاى -1 دابنى وشيكاريبە.

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 17$$

$$-1 = \frac{1}{3}x + 17$$

$$-18 = \frac{1}{3}x$$

$$-54 = x$$

پوونىبەكەو چۆن نەخشەى نموونه 1 بەكار دەهينى بۆ ديارىكر دنى پلەى كولانى ئاو لە شوينيك
8000m لە پووى دەريا بەرزبىت. ئەو پلەيه دياربە.

پوونىبەكەو چۆن نەخشەى نموونه 1 بەكار دەهينى بۆ ديارىكر دنى بەرزى شوينيك لە پووى دەريا
كە پلەى كولانى ئاو تييدا 85 پلەى سەدى بىت. ئەو بەرزيبە دياربە.

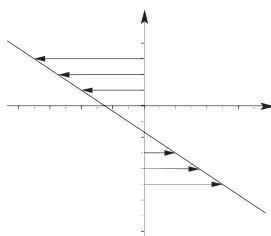
بەرەنگارى

بەرەنگارى

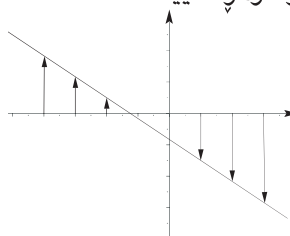
Studying linear function

خويندنى نەخشەى هيلى

پيساي نەخشەى هيلى $f(x) = mx + b$ پيگا بە هەژماركر دنى بەهاى نەخشەكە دەدات كاتيك
بەهاى گوپاوى x هەرچەند بىت. لەوئەو دەردەچىت كە $f(x)$ پيناسە كراو دەبىت بەهاى x
هەرچيبەك بىت. بەمەش بوارەكەى كۆمەلەى ژمارە راستيبەكان دەبىت. وە لە لايەكى تريشەو،
هەر ژمارەيهكى راستى دەكرىت ببىت بە بەها بۆ نەخشەى هيلى، چونكە دەتوانيت هەژمارى
بەهاى x بكەيت، ئەگەر بەهايهكى نەخشەكەت زانى. لەوئەو دەردەچىت كە مەوداى نەخشەى هيلى
كۆمەلەى ژمارە راستيبەكانە.



لەهيلى پوونكر دنەوئى نەخشەى هيلى
دەردەكهوئى كە مەوداكەى هەموو
تەوئى لا بە تەواوى دەگرىتەو.



لەهيلى پوونكر دنەوئى نەخشەى هيلى
دەردەكهوئى كە بوارەكەى هەموو
تەوئى x بەتەواوى دەگرىتەو.

كاتيك نەخشەكە بارىكى ژيانى پۆژانە دەنوئىت، ئەمە وادەكات بوارو مەوداكەى سنووردار بىت.

لووتكهى ئىقەرئىست كه دهكهوئته چياكانى هيمالايا، بهرزىيهكهى 8848m له پرووى دهرىابهززه، به بهرزترين شوئن له پرووى زهوى دانهزئىت. ههوهها دهرىايى مردوو كه 420m له پرووى دهرىا نزمه، بهنزمترين شوئنى پرووى زهوى دانهزئىت. ئهوه دوو زانىارىيهى پئىشو بهكاربهئنه بۆ ئهوهى به ووردى بوار و مهوداى نمونه 1 دىاييكهيت.

شيكار

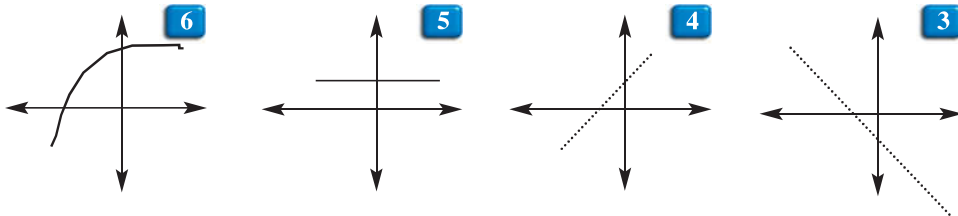
نەخشەى نمونه 1 نمونهيهكى بيركارى بۆ بارئىكى ژيانى پۆژانه پئىكههئىت. لهوهوه دهردهچئت كه گۆراوى ئازاد x سنوورداره به چهند بههايهكى ديارىكراو. بهپئى دوو زانىارىيهكهى پئىشو ئهوه بههايانه وهردهگرئت كه دهكهوئته نيوان -420، 8848، لهبهر ئهوه بوارى نەخشەى نمونه 1 كۆمهلهى ئهوه ژماره راستىيانهيه كه پاسادانى لا سەنگهى $-420 \leq x \leq 8848$ دهكهن. بۆ ديارىكردى مهودا لهم باردا دهبنين كه بههاكهى كه مدهكات ههچهنده بهرزى h زياد بكات، ئهههش ئهوه دهگهيهئىت كه بهرزترين بههاى بهرامبهز نزمترين بههاى گۆراوه ئازادهكهيه، واتا: $f(-420) = 100.23$ و نزمترين بههاى بهرامبهز بهرزترين بههاى گۆراوى X دهپئت، واتا: $f(8848) = 95.13$. بهم شۆدهيه مهوداى نەخشەى نمونه 1 كۆمهلهى ئهوه ژماره راستىيانهيه كه پاسادانى $95.13 \leq y \leq 100.23$ دهكهن.

راهيىنان

بهردهوامبوون له بيركاريدا

- 1 چۆن پاسادانى ئهوه دهكهيت كه خالئىك پۆوتانهكهى زانراوئىت دهكهوئته سهر راستههئىك هاوكئشهكهى زانراوئىت.
- 2 پروونيكهوه چۆن پئىساي نەخشەيهكى هئىلى ددهؤزىتهوه بهزانينى هئىلى پروونكردنهوهكهى.

ئايا ئهه وئنه پروونكردنهوهييانه نەخشەى هئىلى دهنوئىن؟ ئهوه پروونيكهوه.



راهيىنانى ئاراسته كراو

ئايا ئهه نەخشانه هئىلئىن؟ ئهوه پروونيكهوه.

$g(x) = 4 + 10x$ 9	$f(x) = -3x - 6$ 8	$f(x) = 2 - x^2$ 7
$g(x) = \frac{1}{x}$ 12	$f(x) = \frac{3}{2}x + 4$ 11	$f(x) = x^3 - x$ 10

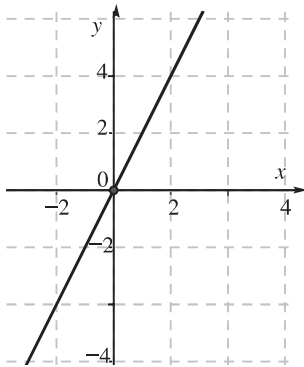
13 خشتهى خوارهه تئچوونى پهيوهندييه تهلهفۆنيهكانى نيودهولهتتیه، لهگهئ باجه نهگۆرهكهى كه بههاكهى دووههزار دیناره.

ژمارهى خولهك	1	2	3	4	5	6
تئچوون بهههزاردينار	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00

خشتهكه بهكاربهئنه بۆ نووسينى نەخشەيهك، بوار و مهوداى نەخشەكه ديارىيكه.

جئبهجئکردن

بىركارى بهكاربهز



14 شۆۋەي بەرامبەر پروونكردنهۋەي نەخشەيەكى
ھېللى ديارىدەكەت، خشتەي بەھاكانى پېكېھېنەو
رېساکەي بنووسە.

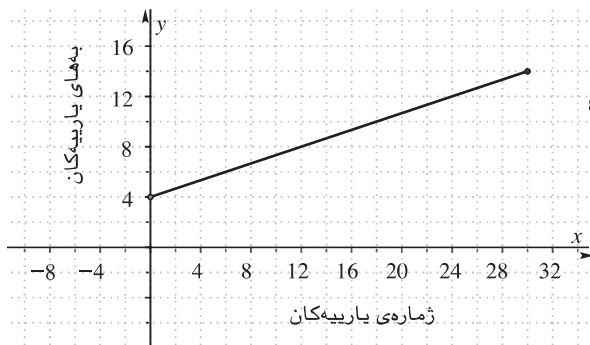
جووتە رېكخراۋەكە تەۋاۋىكە بە مەرجىك خالەكە
بەكەۋىتە سەر راستەھېللى $y = -4x + 21$.

- | | |
|-----------|-----------|
| (?, 9) 16 | (5, ?) 15 |
| (?, 0) 18 | (0, ?) 17 |

راھىنان وجىبە جىكردن

جووتە رېكخراۋەكە تەۋاۋىكە بە مەرجىك خالەكە بەكەۋىتە سەر راستەھېللى $y = 2x - 14$.

- | | | | |
|------------|------------|------------|-----------|
| (?, 0) 22 | (0, ?) 21 | (10, ?) 20 | (8, ?) 19 |
| (?, 3) 26 | (3, ?) 25 | (-5, ?) 24 | (5, ?) 23 |
| (?, 10) 30 | (?, -7) 29 | (?, -4) 28 | (?, 6) 27 |



31 ئەندازەي پۈتۈن وېنەي

پروونكردنهۋەكە پەيوەندى نىۋان
ژمارەي يارىيە ئەلىكترونىيەكانى
(نىۋان 0 و 30) و نرخەكەي
ديارىدەكەت. خشتەي بەھاكانى
ئەم نەخشەيە پېكېھېنە
ورېساکەي بنووسە.

32 نۆتۆمبىلەكان كاتىك تانكى

سووتەمەنى نۆتۆمبىلەكەت پېر دەكەيت، بېرى سووتەمەنى لە تانكىكە نەخشەيەكە، گۇپراۋە
ئازادەكەي ژمارەي خولەكەكانە. ۋاى دابنى كە ئەو سووتەمەنىيەي دەرژىتە ناۋ تانكىيەكە
بە تېكراي 18 لىترە لەھەر خولەكېكدا و فراۋانى تانكىيەكە دەگاتە 35 لىتر.

ا رېساي نەخشەيەكە بنووسە بېرى ئەو سووتەمەنىيەي كە دەرژىتە ناۋ تانكىيەكە بە پېرى
كات بنوئىت.

ب بۋار و مەۋداي ئەم نەخشەيە ديارىيەكە.

33 **بۇ خۇشى** يانەى ژيان CD دەفرۆشېت وەك لەم خىشەيەى خوارەوۈ ديارىكراوۈ لەگەل پارەى باجى بەشداربوونى لە يانەكەدا كە دەگاتە 35 ھەزار دىنار.

14	12	10	8	6	4	2	0	ژمارەى CD
147	131	115	99	83	67	51	35	تېچوون (بەھەزار دىنار)

نەخشەيەك بنووسە ئەمە بنوئىت.

34 **تەكنەلۇژيا** بژمىرى پرونكردنەوۈى بەكاربەينە بۇ كېشانى ھىلى پرونكردنەوۈى دوو نەخشەكەى دوو پرسىارەكەى پېشوو لە ھەمان پروتەختى پۇوتاندا. بەراوردى نىوان ھەردوو دەرختەكە بكة. كام يانەيان دەرختە باشتىر پېشكەش دەكات؟ ئەوۈ پرونكەوۈ.

بەرەنگارى

روانىتېك بۇدواوۈ

خىشەى بەھاكانى ھەر نەخشەيەك پېكېپتە بە لە جياتيدانانى بەھاكانى 1، 2، 3، 4، 5، 10 لە جياتى x و ھىلە پرونكردنەوۈكەى بېشە.

$$y = 5x - 1 \quad \text{36}$$

$$y = 2x + 1 \quad \text{35}$$

بە ھزرى بەھاي ژمارەى ھەر بىرېك ھەژماربەكە.

$$1\,000 \times 1\,000 \quad \text{40}$$

$$\frac{480}{16} \quad \text{39}$$

$$10 \times 30 \quad \text{38}$$

$$300 - 196 \quad \text{37}$$

روانىتېك بۇيېشەوۈ

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	4	9	16	25	36	49	64

41 لە خىشەى سەرەوۈ ووردبەرەوۈ. ئايا نەخشەى ھىلى دەنوئىت؟

42 رېسايەك بۇ پەيوەندى نىوان x و y بنووسە. پىدراوۈكانى خىشەكە بە پرونكردنەوۈى بنوئە و ۈلەمەكەى پېشوت ساغبەكەوۈ.

شیۆه جیاوازهکانی هاوکیښه‌ی راسته‌هیل

Various forms of the equation of a line



بۆچی

هاوکیښه‌ی راسته‌هیل
رۆلکی گرنګ له بیرکاری دهگیری،
ساده‌ترین شیۆه‌ی نه‌خشه
جه‌ریه‌کان ده‌نوینی. ه‌روه‌ها بۆ
بنیاتنانی نمونه‌کانی زۆریه‌ی
پرسپاره‌کانی ژیان به‌کار دیت.

وانه‌ی
3

ئامانجه‌کان

- ناسینی شیۆه جیاوازه‌کانی
هاوکیښه‌ی راسته‌هیل.
- نووسینی هاوکیښه‌ی
راسته‌هیل به شیۆه
جیاوازه‌کانی

زاراوه‌کان

Vocabulary

شیۆه‌ی لاری - یه‌کتربیرین
Slope - Intercept form

شیۆه‌ی لاری - خال
Slope - Point form

یه‌کتربیرینی ستونی
y - Intercept

یه‌کتربیرینی ئاسۆیی
x - Intercept

شیۆه‌ی دووخال
Two - points Form

شیۆه‌ی گشتی
Standard Form

چالاک‌ی 1

Slope-Intercept Form هاوکیښه‌ی راسته‌هیل به شیۆه‌ی لاری - یه‌کتربیرین

نه‌وزاد سه‌ردانی کۆمپانیایه‌کی به‌کریډانی ئۆتۆمبیلی کرد. فه‌رمانبه‌ری کۆمپانیایه‌که پیتی
راگه‌یانده‌یی 100 ه‌زار دینار بدات کاتیڤ ئۆتۆمبیله‌که وه‌رده‌گریت و 1.5 ه‌زار دینار بدات
بۆ ه‌ر کیلۆمه‌تریک ده‌ییرپیت.

1. ئەم خسته‌ی دیت ته‌واویکه.

ژماره‌ی کیلۆمه‌تره‌کان	30	20	10	
ئه‌وه‌ی پۆیسته‌ بیدات			$1.5 \times 10 + 100$	

2. هاوکیښه‌ی گوژمه‌ی y که پۆیسته‌ بیدات به‌پیتی ژماره‌ی کیلۆمه‌تره‌کانی x بنوسه.

3. ئەم هاوکیښه‌یه به‌رونکردنه‌وه‌یی بنوینه.

جیبه‌جیکردن

بازرگانی

شیوہی لاری - یهکتربرین Slope - Intercept Form

هاوکیشه ی راسته هیل به شیوہی لاری - یهکتربرین بریتییه له $y = mx + b$ ، کاتیک m و b دوو ژماره ی راستین، ژماره ی m لاری راسته هیله که یه b پووتانی دووه می خالی یهکتربرینی راسته هیله که یه له گهل تهوهری y ، یان یهکتربرینی ستوونی **y-intercept** راسته هیله که یه.

لاری راسته هیله که یه یهکتربرینه ستوونییه که یه دیاریبکه.

ج $y = 5$

ب $y = -5x + 3$

ا $y = 3x - 4$

شیکار

ا لاری 3 و یهکتربرینه که یه -4 .

ج لاری 0 و یهکتربرینه که یه 5 .

ب لاری -5 و یهکتربرینه که یه 3 .

نمونه

ههلبده ئەو راسته هیله بکیشه که ئەم هاوکیشه یه $y = 2x - 8$ دهنوینی.

چالاکي 2

Slope - Point Form

شیوہی لاری - خال

ئەگەر لاری راسته هیلێک m و خالێک (h, k) که پێیدا بروات بزانیته، ئەوا دهتوانیت هاوکیشه که یه بنووسیت:

1. هاوکیشه ی راسته هیل به شیوہی لاری - یهکتربرین بریتییه له $y = ax + b$. ئایا په یوهندی

نیوان لارییه که m و هاوکیله که x لهو هاوکیشه دا چیه؟

2. بنووسه که راسته هیله که به خالی (h, k) دا ده پروات، پاشان له جیاتی x به های h و له جیاتی y به های k دابنی.

3. هاوکیشه که شیکاربکهو به های b به یی m و h و k بدۆزهوه.

4. له جیاتی b به ها که ی دابنی. و هاوکیشه ی راسته هیله که به شیوہی لاری - یهکتربرین بنووسه.

Slope - Point Form خال شیوہی لاری -

هاوکیشه ی راسته هیل به شیوہی لاری - خال بریتییه له $y - y_1 = m(x - x_1)$ کاتیک:

• m لاری راسته هیله که یه.

• (x_1, y_1) خالێکه راسته هیله که پێیدا ده پروات.

هاوکیشه ی راسته هیلێک بنووسه لارییه که یه -2 بیته و به خالی $(1, -1)$ دا ده پروات پاشان وینه که یه بکیشه.



شیکار:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = -2(x - 1)$$

$$y + 1 = -2x + 2$$

$$y = -2x + 1$$

نمونه

ههلبده هاوکیشه ی راسته هیلێک بنووسه که لارییه که یه 3 بیته و به خالی $(-2, -1)$ دا بروات پاشان وینه که یه بکیشه.

چالاکى 3

Two Points Form

شیۆهى دووخال

هاوكيشهئى ئه و راسته هیل به نووسه كه به دوو خالى (5, 3) و (7, 4) دا ده پوات.

1. لارى راسته هیل كه هه ژمارىكه.
2. هاوكيشهئى به نووسه له سه ر شیۆهئى لارى - خال. پاشان له سه ر شیۆهئى لارى - يه كتر برپىن.

Two Points Form شیۆهئى دووخال

هاوكيشهئى راسته هیل كه به دوو خالى (x₁, y₁) و (x₂, y₂) دا ده پوات.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \text{بریتیه له:}$$

هاوكيشهئى ئه و راسته هیل به دوو خالى (5, 65) و (7, 71) داده پوات به شیۆهئى لارى - يه كتر برپىن به نووسه.

هه ولبده

Standard Form شیۆهئى گشتى

چالاکى 4

Standard Form

شیۆهئى گشتى

به پۆه به رایه تى باخچه ئاژه لان بلیتى چوونه ژووره وئى به 10 هه زار دینار بۆ گه و ره كان و به 5 هه زار دینار بۆ مندا لان ديارى كرده ووه. ده سكه و تى پۆژى چوار شه ممه ئى گه یشته 1 350 000 دینار.

خشته ئى به هاكان	
x	y
50	
	120
	70
120	

1. به كار به یئنه بۆ ژماره ئى گه و ره كان و y بۆ نواندنى ژماره ئى بچو كه كان دا بنى. هاوكيشه ئه كه به نووسه بۆ ده برپىنى ده سكه و تى پۆژى چوار شه ممه كه 1 350 000 دینار بوو.
2. خشته كه ته و او بكه بۆ پیکه یئنانى جووته پیکه را وه كانى كه پاسادانى هاوكيشه ئه كه ده كن.
3. به پوونكر د نه و یى هاوكيشه ئه ده سكه و توه كه ت به نو یئنه به به كار ه یئنانى جووته پیکه را وه كان. شیۆه ئى و یئنه پوونكر د نه و كه چۆنه؟
4. وه لامه كه ت له باره ئى و یئنه پوونكر د نه و یه كه ساغ بكه وه له پى گای شى كار كرده ئى هاوكيشه ئه كه به نووسىنى y به پى x.

جیه جیكردن

بۆخوشى

Standard Form شیۆهئى گشتى

هاوكيشهئى راسته هیل به شیۆهئى گشتى بریتیه له $ax + by = c$ كاتىك:

- a و b و c ژماره ئى راستىن.
- به لایه ئى كه م یه كه له دوو ژماره ئى a و b یه كسان نه بێت به 0.

نموونه

3

$$\begin{aligned} \text{أ} \quad y &= -2x + 3 \\ \text{ب} \quad x &= -13y + 4 \\ \text{ج} \quad \frac{3}{4}x - 2 &= 3y \end{aligned}$$

شىكار

$$\begin{aligned} \text{أ} \quad y &= -2x + 3 \\ 2x + y &= 3 \\ \text{ب} \quad x &= -13y + 4 \\ x + 13y &= 4 \\ \text{ج} \quad \frac{3}{4}x - 2 &= 3y \end{aligned}$$

ئهم شیۆهئى گشتیه چوونكه بهم شیۆهئى ده نووسریت $\frac{3}{4}x + (-3)y = 2$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x - 2 - 3y &= 0 \\ \frac{3}{4}x - 3y &= 2 \end{aligned}$$

هاوکیشه ی هەر راسته هیلک به شیوه ی لاری - یه کترپرین بنووسه.

$2y - 2x = 6$ **ا** $6x + 4y = 4$ **ب** $\frac{3}{4}y - 6x = 3$ **ج**

شیکار:

$2y - 2x = 6$ **ا** $6x + 4y = 4$ **ب**

$2y = 2x + 6$ $4y = -6x + 4$

$y = x + 3$

$y = -\frac{3}{2}x + 1$

$\frac{3}{4}y - 6x = 3$ **ج**

$\frac{3}{4}y = 6x + 3$

$y = 8x + 4$

هه لیده هاوکیشه ی $y - 23 = 5(x - 4)$ به شیوه ی لاری - یه کترپرین، پاشان به شیوه ی گشتی بنووسه.

راسته هیلک ئاسوییه کان و ئهستونه کان Horizontal and Vertical Lines

هاوکیشه ی راسته هیلک ئاسوییه بریتییه له $y = b$ کاتیک b یه کترپرینی راسته هیلک هیه.

له گه ل ته وهری y . لاری راسته هیلک ئاسوییه هه میسه ده کاته 0.

هاوکیشه ی راسته هیلک ئهستونی بریتییه له $x = b$ کاتیک b یه کترپرینی راسته هیلک هیه.

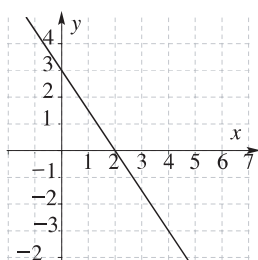
له گه ل ته وهری x . لاری راسته هیلک ئهستونی پیناسه نه کراوه.

Various Form of the Equation of a Line شیوه جیاوازه کانی هاوکیشه ی راسته هیلک

نمونه	شیوه ی هاوکیشه که	ناوی شیوه که
$y = 3x + 5$	$y = mx + b$	لاری - یه کترپرین
$3x - 2y = 5$	$ax + by = c$	گشتی
$y - 2 = -3(x - 1)$	$y - y_1 = m(x - x_1)$	لاری - خال
$y - 65 = \frac{71-65}{7-5}(x - 5)$	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$	دوو خال

راهی نان

به رده و امبون له بیر کاریدا



1 هاوکیشه ی راسته هیلک بنووسه لارییه که m و به خالی بنه پرتدا بپوات.

2 چون راسته هیلک $y = mx + b$ ده گۆپیت کاتیک به های b بگۆپیت؟

3 چون راسته هیلک $y = mx$ ده گۆپیت کاتیک به های m بگۆپیت؟

4 چون شیوه ی لاری - خال به کارده هینیت بۆ نووسینی هاوکیشه ی

ئه و راسته هیلک به دوو خالی $(1, 1)$ و $(-2, 4)$ داده پوات؟

5 پوونیکه وه چون هاوکیشه ی ئه و راسته هیلک وینه ی به رامبه ر ده نووسیت؟

6 چون هاوکیشه ی $3x + 3y + 2 = 0$ به شیوه ی لاری - یه کترپرین ده نووسیت؟

راڻينانى ٿاڙا سته ڪراو

هاوڪيشي هر ڀاڙهه هيلڪ به شيوڊي گشتي بنووسه.

$$3x = -7y - 17 \quad 9 \quad 2y = 3x - 4 \quad 8 \quad y = 3x + 7 \quad 7$$

هاوڪيشي ڀاڙهه هيلڪ به شيوڊي لاري - يهڪٽرپرين بنووسه به زانيني لاريهڪي وخالڪ ڪه پيدا دهرواٽ.

$$\begin{array}{ccc} \text{لاري خال} & \text{لاري خال} & \text{لاري خال} \\ 12 & 11 & 10 \\ (3, -4) \quad \frac{1}{3} & (-3, 4) \quad -2 & (3, 4) \quad 2 \end{array}$$

هاوڪيشي ڀاڙهه هيلڪ به شيوڊي لاري - يهڪٽرپرين، و به شيوڊي گشتي بنووسه.

$$y = 10(-4x + 3) \quad 15 \quad 3y = 9x + 15 \quad 14 \quad y - 50 = 8(x - 4) \quad 13$$

هاوڪيشي ڀاڙهه هيلڪ به شيوڊي لاري - يهڪٽرپرين بنووسه به زانيني دوخال پيدا دهرواٽ.

$$(3, -2) \quad 18 \quad (-4, 4) \quad 17 \quad (5, -2) \quad 16$$

راڻينان وجيهه جيڪردن

يهڪٽرپرين ڀاڙهه هيلڪ لهگل دوو تهوڊي پوٽانهڪان دياربڪه.

$$y = -3x + 5 \quad 21 \quad y = 8x - 1 \quad 20 \quad y = 4x + 5 \quad 19$$

$$y = -5x - 9 \quad 24 \quad y = 17x - 4 \quad 23 \quad y = -2x + 13 \quad 22$$

$$5x + 4y = 12 \quad 27 \quad 3x - 2y = 12 \quad 26 \quad y + x = 10 \quad 25$$

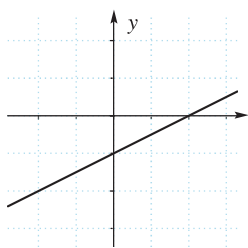
$$9x + y = 18 \quad 30 \quad 2x - 7y = 14 \quad 29 \quad 4x - 5y = 20 \quad 28$$

لاري ڀاڙهه هيلڪو يهڪٽرپرين لهگل تهوڊي لاري دياربڪه، بهي وينهڪيشان.

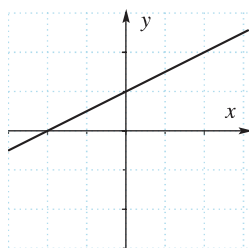
$$y = 7 \quad 33 \quad y = -5x + 3 \quad 32 \quad y = -5x \quad 31$$

$$y = \frac{1}{3}x - 5 \quad 36 \quad y = 7 - x \quad 35 \quad x = 7 \quad 34$$

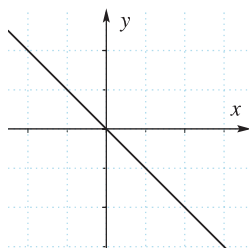
هاوڪيشي ڀاڙهه هيلڪ به شيوڊي لاري - يهڪٽرپرين بنووسه.



39



38



37

40 لاري ڀاڙهه هيلڪ چنده ڪه هاوڪيشهڪي $6x + 2y = 40$ بيت؟

ناتوانرڻ هاوڪيشي ڀاڙهه هيل $x = 4$ به شيوڊي لاري - يهڪٽرپرين بنووسرڻ چونڪه لاريهڪي پيناسه نهڪراوه، به لام دهوانرڻ به شيوڊي $1 \times x + 0 \times y = 4$ بنووسرڻ. ٽه خسته به تهواوبڪه:

هاوڪيشي دراو	شيوڊي لاري - يهڪٽرپرين	شيوڊي گشتي
41	$x = 1$	
42	$y = 4$	
43	$x + y = 5$	
44	$y = 4x$	
45	$x = 4y$	

وېنەى ھەردوۋ پاستەھېلى $4x + 2y = 12$ و $2x + y = 10$ بېكىشە. چى تېبىنى دەكەيت؟

زىنگە وا دابنى بەرزى ئاۋ لە ھەزىك 35cm ، و ئەو بەرزىيە بە تىكپاي 5cm پۇژانە زىاد دەبىت. ھاۋكىشەيەك بنووسە بەرزى ئاۋەكە h و ژمارەى پۇژەكان d بنوئىنى. ئەم ھاۋكىشەيە بە پوونكرىنەۋەيى بنوئىنە. پاش چەند پۇژ بەرزى ئاۋەكە دەبىتە 260cm ؟

بازرگانى نرخی بلىتى چوونە ژوورەۋەى ئاھەنگى كۆتايى سالى خويىندىن 5000 دىنارە بۇ گەرەكان و 3000 دىنارە بۇ بچوۋكەكان. ھاۋكىشەيەك بنووسە دەستكەۋتى ئاھەنگەكە بنوئىنى كە دەگاتە 700 000 دىنار. بە بەكارھېنانى x بۇ ژمارەى گەرەكان، و y بۇ ژمارەى بچوۋكەكان. لارى ئەو پاستەھېلە چەندە كە ئەو ھاۋكىشەيە دەنوئىنى؟ يەكترېرىنى لەگەل تەۋەرى y چەندە؟

روانىن بۇدۋاۋە



رېساي ھەژماركرىنى چىۋەى بازىنە p بەپىى نىۋە تىرەكەى r بنووسە. لە پاشان ئەم رېسايە بەكاربھېنە بۇ ھەژماركرىنى چىۋەى بازىنەك نىۋەتىرەكەى 8cm بېت. ژمارە 3.14 بەكاربھېنە ۋەك بەھاي نىزىكراۋە بۇ ژمارە π .

خىشەكە بنووسەۋە و پاشان تەۋاۋى بىكە. كەرەكان بەسادەترىن شىۋە بنووسە.

شىۋەى كەرتى	شىۋەى دەيى	ژمارەكە ۋەك پېژەى سەدى
	$0.\bar{3}$	$33\frac{1}{3}\%$
	0.875	
		2%
$\frac{1}{20}$		
		$12\frac{1}{2}\%$
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{6}$		
		0.01%
	0.80	
$\frac{2}{5}$		
	0.45	
$5/6$		

روانىنىك بۇپېشەۋە



لە ھەمان پروتەختى پۇتۋاندا دوۋ پاستەھېلى $y = 2.12x - 3.7$ و $y = x + 5.4$ بېكىشە و خالەكانى يەكترېرىن دىارىبىكە.

ته‌ریب‌وون و ئەستوونبوونی

Parallel and Perpendicular Lines

نامانجه‌کان

- ته‌ریب‌وونی دوو راسته‌هێڵ
یان ئەستوونبوونیان به
به‌راوردکردنی لاریه‌کانیان
ده‌ناسیت.
- هاوکێشهی راسته‌هێڵی
ته‌ریب به راسته‌هێڵێک یان
ئەستوون له‌گه‌ڵیدا
ده‌نووسیت.

بۆچی

ناسینی راسته‌هێڵه
ته‌ریبه‌کان یان ئەستوونه‌کان له
پێگه‌ی به‌راوردکردنی لاریه‌کانیان
به هه‌نگاوێکی گه‌رنج داده‌نریت بۆ
جیاکردنه‌وه‌ی په‌یوه‌ندی نۆوان
راسته‌هێڵه‌کان به‌بێ نه‌وه‌ی
وێنه‌کانیان بکێشین

جێبه‌جێکردن

فیزیا

کالفن	سەدی	فهرنهایت	
373	100	212	کولانی ئاو
273	0	32	به‌ستنی ئاو
0	-273	-460	سفری پووت

ئه‌و هه‌لمه‌ی له‌زه‌وی به‌زده‌بێته‌وه دياره.
خشته‌ی به‌رامبه‌ر پله‌کانی گه‌رمی به‌سێ پێوانه
ديارده‌کات، پێوه‌ری فهرنهایت و پێوه‌ری سەدی
و پێوه‌ری کالفن. گۆرینی پله‌ی گه‌رمی له پێوانی
سەدی بۆ پێوانی فهرنهایت به پێی ئەم یاسایه

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

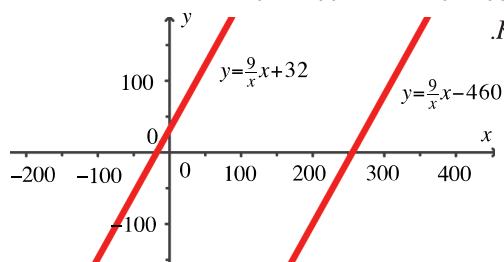
$$\text{یاسای } F = \frac{9}{5}K - 460 \text{ ده‌بێت. ده‌توانریت ئەم دوو هاوکێشه‌یه بنوسینه‌وه به}$$

له جیاتیدانانی y له بری F و x له بری C یان K .

$$y = \frac{9}{5}x - 460, y = \frac{9}{5}x + 32 \text{ سه‌رنجده ئه‌و}$$

دوو راسته‌هێڵه‌ی دوو هاوکێشه‌که ده‌نوێنن

که ته‌ریبن و لارییان یه‌کسانه.



Parallel Lines راسته‌هیللە تەریبەکان

ئەگەر لاری دوو راسته‌هیللە یەكسانبوون ئەوا تەریب دەبن.
ئەگەر دوو راسته‌هیللە نائەستوون تەریببوون ئەوا لاریەکانیان یەكسان دەبن.

بە شیۆە لاری - یەکتەریپین ھاوکیشە راسته‌هیللە بنووسە تەریبە بە راسته‌هیللە $y = 3x - 7$ و تەوهری y لە 4 دا دەبریت.

شیکار

لاری ئەو راسته‌هیللە دەکاتە 3. لەبەر ئەوەی تەوهری y لە 4 دا دەبریت ئەوا ھاوکیشەکی دەبێتە $y = 3x + 4$.

نموونه

1

بە شیۆە لاری - یەکتەریپین ھاوکیشە راسته‌هیللە بنووسە تەریبە بە راسته‌هیللە $y = 0.5x + 5$ و تەوهری y لە 2- دا دەبریت.

لەبیرت بێت دوو راسته‌هیللە ئەستوون دەبن ئەگەر یەکتەریان بری و گۆشە وەستاویان پلکەهێنا. لەم چالاکییە دادیت پەیوەندی نیوان لارییەکانی دوو راسته‌هیللە ئەستوون دەدۆزیتەوه.

هەولبە

چالاکى

دۆزینەوێ پەیوەندی نیوان ئەستوون بوونی راسته‌هیللەکان ولاریەکانیان
Explor Relation between Slope of Perpendicular Lines

لەم چالاکییەدا پۆیستمان بە راستەى ستوونى و کاغەزى پوونکردنەوێی هەیه که دوو تەوهرى پووتەختى پۆوتانى لەسەر کێشرا بێت.

1. ئایا دوو راسته‌هیللە $y = -2x + 3$ و $y = 0.5x - 2$ یەکتەریپین؟ ئەو پوونیکەوه.

2. ئەو دوو راسته‌هیللە لە هەمان پووتەختى پۆوتاندا بکێشە و پوونکردنەوێی پۆوتانى خالی یەکتەریپینیان دیاریکە.

3. بەپای تۆ پەیوەندی نیوان دوو راسته‌هیللە که چییە؟ راستەى وەستاو بۆ ساغکردنەوێ و ئەلامەکت بەکاربھێنە.

4. لاری راسته‌هیللە یەكەم ولاری راسته‌هیللە دووهم لیکبە، ئەنجامی لیکدانە که چیە؟

Perpendicular Lines ئەستوونبوونی راسته‌هیللەکان

ئەگەر ئەنجامی لیکدانى لاری دوو راسته‌هیللە بکاتە -1، ئەوا ئەستوون دەبن.
ئەگەر دوو راسته‌هیللە ئەستوون بن ئەوا ئەنجامی لیکدانى لارییەکانیان دەکاتە -1.

بە شیۆە لاری - یەکتەریپین، ھاوکیشەى ئەو راسته‌هیللە بنووسە که تەوهرى دووهم لە 4 دا دەبریت و لەگەڵ راسته‌هیللە $y = 3x + 2$ ئەستوونە.

شیکار

لاری راسته‌هیللە که دەکاتە $-\frac{1}{3}$ چونکە ئەستوونە لەگەڵ راسته‌هیللە $y = 3x + 2$ که لارییەکی بریتییه لە 3. ھاوکیشە داواکراوە که دەکاتە $y = -\frac{1}{3}x + 4$.

نموونه

2

بە شیۆە لاری - یەکتەریپین، ھاوکیشەى ئەو راسته‌هیللە بنووسە که تەوهرى دووهم لە 6 دا دەبریت و لەگەڵ راسته‌هیللە $y = 4x + 2$ ئەستوونە.

هەولبە

به شیوهی لاری - خال، هاوکیشهی نهو راسته هیله بنووسه به خالی (4, 5) دا دهروات و لهگهل راسته هیلی $2x + 3y = 7$ نهستونه.

شیکار

دهسبکه به نووسینی هاوکیشهی راسته هیله دراوهکه به شیوهی لاری - یهکترپرین: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$
 دهپیت لاری نهو راسته هیلهی نهستونه لهگهلی بکاته $\frac{3}{2}$. و لهبر نهو هی هاوکیشهی راسته هیله
 به شیوهی لاری - خال دهکاته $y - y_1 = m(x - x_1)$ نهو هاوکیشه داواکراوهکه دهکاته $y - 5 = \frac{3}{2}(x - 4)$

ههولبد هه شیوهی لاری - خال هاوکیشهی نهو راسته هیله بنووسه به خالی (3, -2) دهروات و نهستونه
 لهگهل راسته هیلی $4x - 2y = -6$.

راهیانان

به رده و امبون له بیر کاریدا

- 1 پرونیبکه وه چۆن هاوکیشهی راسته هیلیک تهریب به راسته هیلی $y = 4x + 3$ دنووسی.
- 2 راسته هیلیک لاریه که $\frac{2}{3}$ پرونیبکه وه چۆن لاری راسته هیلیکی نهستون لهسهری ددوژیتیه وه؟
- 3 چۆن لاری راسته هیلی نهستون لهگهل راسته هیلی $y = \frac{1}{3}x + 2$ دیاریده کهیت؟
- 4 پرونیبکه وه چۆن هاوکیشهی راسته هیلیکی نهستون لهگهل راسته هیلی $y = 4x + 3$ ددوژیتیه وه؟

راهیانانی ئاراسته کراو

به شیوهی لاری - یهکترپرین، هاوکیشهی راسته هیلیک بنووسه، تهوهری y له 5 دا دهپیت و تهریبه به راسته هیله دراوهکه.

$y = -6x + 2$ 8 $4y = x$ 7 $y = -3x$ 6 $y = 2x + 3$ 5

به شیوهی لاری - یهکترپرین، هاوکیشهی راسته هیلیک بنووسه، تهوهری y له 5 دا دهپیت و نهستونه لهگهل راسته هیله دراوهکه.

$-6y = x$ 12 $5y = x$ 11 $y = -3x$ 10 $y = 3x - 3$ 9

به شیوهی لاری - خال، هاوکیشهی راسته هیلیک بنووسه، به خالی (4, 5) دا دهروات و نهستونه لهگهل راسته هیله دراوهکه.

$-2x - 8y = 16$ 15 $x - 3y = 8$ 14 $2x + 3y = 4$ 13

راهیانان و جیه جیکردن

لاری ههریه که لهو راسته هیلانه دیاریبکه.

$10 = -5x + 2y$ 18 $3x + y = 7$ 17 $y = 4x + 10$ 16
 $3x - y = 7$ 21 $y = \frac{1}{3}x - 3$ 20 $4x - 3y = 12$ 19

$$13 = 20x - 5y \quad 24$$

$$4x + \frac{1}{4}y = 8 \quad 27$$

$$3x + 2y = 51 \quad 23$$

$$\frac{2}{3}x + 6y = 1 \quad 26$$

$$2x - y = 14 \quad 22$$

$$3y = -4x + 2 \quad 25$$

لاری راسته هیئلی ئەستوون لەگەڵ راسته هیئلی دراو دیاریبکە.

$$13 = -x + y \quad 30$$

$$3x + y = 2 \quad 33$$

$$2y = 5x + 11 \quad 36$$

$$4y = 20x - 3 \quad 39$$

$$-\frac{1}{2}x - y = 20 \quad 29$$

$$y = 5x + 10 \quad 32$$

$$4x + 4y = 12 \quad 35$$

$$12x + 3y = 10 \quad 38$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 10 \quad 28$$

$$3x + 12y = 12 \quad 31$$

$$20 = -5x + 2y \quad 34$$

$$-4x + 8y = 17 \quad 37$$

بە شیۆدی گشتی، هاوکیشەیی ئەو راسته هیئە بنووسە بە خالی (2، 3) دا دەروات و تەریبە بە راسته هیئە دراودە.

$$y = 2x - 3 \quad 42$$

$$11 = 3y + 2x \quad 45$$

$$3x = 7y + 2 \quad 41$$

$$7x - 2y = 10 \quad 44$$

$$x + y = 1 \quad 40$$

$$3y = 2x \quad 43$$

بە شیۆدی لاری - یەکتەریپین، هاوکیشەیهک بنووسە بۆ ئەو راسته هیئەیی بەم پیدراوانە دیاریکراوە.

دەروات بە	ئەستوون لەگەڵ راسته هیئە
$(3, -3)$	$5x + 2y = 10$
$(2, 7)$	$y = 3x - 4$
$(2, -4)$	$y = 7$
$(-2, 4)$	$3x + y = 5$
$(-1, 4)$	$y = 2x - 5$

51

52

53

54

55

دەروات بە	تەریب بە راسته هیئە
$(3, -5)$	$5x - 2y = 10$
$(-2, 7)$	$y = 3x - 4$
$(2, 4)$	$y = 7$
$(2, -4)$	$y = 3x - 4$
$(-1, 4)$	$y = 2x + 5$

46

47

48

49

50

وینەیی راسته هیئە $y = 5x$ بکێشە.

56 راسته هیئە تەریب بە راسته هیئە $y = 5x$ بکێشە و هاوکیشەیهک بنووسە.

57 راسته هیئە ئەستوون لەگەڵ راسته هیئە $y = 5x$ بکێشە و هاوکیشەیهک بنووسە.

دەتوانیت دەریاردی لاری هەریهکە لەو راسته هیئەیی جی بلیت؟

58 تەریب بلیت بە راسته هیئەیی ئاسۆیی. 59 ئەستوون بلیت لەگەڵ راسته هیئەیی ئاسۆیی.

60 تەریب بلیت بە راسته هیئەیی ئەستوونی. 61 ئەستوون بلیت لەگەڵ راسته هیئەیی ئەستوونی.

ئەندازە هاوکیشەیی چوار راسته هیئە بنووسە کە یەکتەریان بریبت بۆ ئەو جوار گۆشەیهک پیکههین، کە لاکانی:

62 بە دوو تەوهری پۆتانهکان تەریب بن.

63 بە دوو تەوهری پۆتانهکان تەریب نەبن.

64 ئەندازە یەکتە لایەکانی چوار گۆشەیهک دیکه ویتە سەر راسته هیئە $y = \frac{3}{4}x + 5$.

هاوکیشەیی ئەو راسته هیئە بنووسە کە دەشیت لایەکانی تری چوار گۆشەیهک بکەوێت سەری.

فيزيا: ياسايهڪ بنووسه بڻوڳورپني

پلهڪاني گهرمي له پڻوانهي

فهرنهايت بڻو پڻوانهي سهدي.

ياسايهڪي تر بڻوڳورپني پڻوانهي

فهرنهايت بڻو پڻوانهي كالفن. ٺهو

دو ياسايه له شيوهي دوو هاوڪيشه

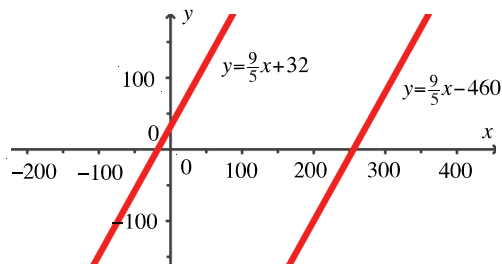
بنووسه، به بهڪارهيناني x بڻو

پلهڪاني گهرما به پڻوانهي

فهرنهايت، و y بڻو پلهڪاني گهرما به

پڻوانهي كالفن، يان پڻوانهي سهدي،

ويئهي دوو راسته هيلڪه بڪيشه.



هاوڪيشه $y = \frac{9}{5}x + 32$ له پڻوانهي

سهدي بڻو پڻوانهي فهرنهايت

دهگورپت و هاوڪيشه $y = \frac{9}{5}x - 460$

له پڻوانهي كالفن بڻو پڻوانهي

فهرنهايت دهگورپت.

پهيوهندي نيوان دوو راسته هيلڪه پرسیاري 65 چيهه؟ لاري ههريهڪه يان بنووسه.

پهيوهندي نيوان دوو راسته هيلڪه پرسیاري 65 و ٺهو دوو راسته هيلڪه كه گوران

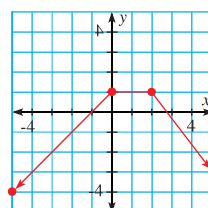
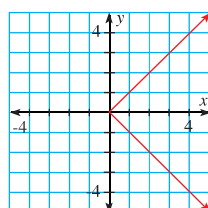
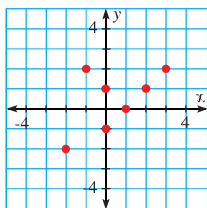
دهنوئينن له پڻوانهي كالفن وسهدي بڻو پڻوانهي فهرنهايت، چيهه؟

روانين بڻو دواوه



تافيڪردنه وهي راسته هيلڪي ٺهستووني بهڪاربهيئنه بڻو برياردان ٺهگر ٺهم ويئنه

روونڪردنه وانهي خواره وه، نهخشه دهنوئينن يان نا؟



روانين بڻو پيشه وه



چهند جووته ريڪخراو شيڪاري سيستمهي دوو هاوڪيشه هيئي به دوو گوراو پيڪدههينن،

ٺهگر ٺهو دوو راسته هيلڪه كه دوو هاوڪيشه دهنوئينن.

ستوون بن؟

تهريب بن؟



نامانجەكان

• نەخشەى دوچا

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

دەناسىت و بەپۆنکردنەوهى
دەپۆنێت.

• وێنەى پۆنکردنەوهى نەخشە
دوچاكان دەپۆنێت و ناوى
(بەرگەى هاوتا) بۆ
پۆنکردنەوهى
بەكاردهێنێت.

• سەرى بەرگە هاوتا و تەورەكەى
دەناسىت.

• پۆلە زىادپۆن و پۆلە
كەمپۆن نەخشە بە

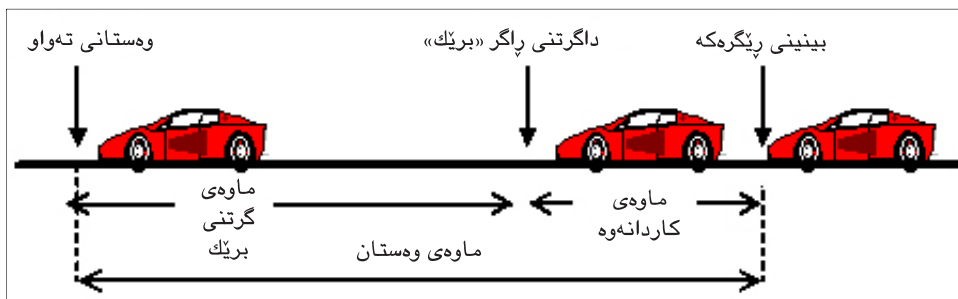
پۆنکردنەوهى ديارىدەكات a

• بەپێى نیشانەى هاوكۆلكەى
پۆلى كرانهوى بەرگە هاوتا

Quadratic Expressions

بەر دوچاكان

ئەو دورىيەى كە ئۆتۆمبىلێك دەبێت لە كاتى تىبىنىكردى شوفێرەكەى بۆ رېگرێك تا وەستانى
بە تەواوتى لە دوو دورى پىكدێت وەك لەم وێنەدا ديارە:



دەتوانىن دورى پۆيست بۆ وەستاندى ئۆتۆمبىلێكە بەم بەرگە جەبرىە دەربېرېن: $d(x) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{160}x^2$

كاتێك x خىراى ئۆتۆمبىلێكەى لە كاتى بىنىنى رېگرەكە (بە كم / كاتژمېر)

$d(x)$ دورى وەستان بەتەواوتى (بەمەتر) دەپۆنێت. بېرى $d(x)$

لە سەرجهەمى بېرى $\frac{1}{5}x$ كە دورى كاردانەوهكەى و بېرى $\frac{1}{160}x^2$ كە دورى

گرتنى بێكەكە دەپۆنێت. ئەگەر خشتەى بەهاكان بۆ بېرى $d(x)$ بە هۆى

بژمېرى پۆنکردنەوهى پىكېهێنێت، تىبىنى دەكەيت كە دورى پۆيست بۆ

وەستاندى 25m بەنزىكى دەپۆت كاتێك خىراى 50km/h بێت، و نزىكەى 82m دەپۆت

كاتێك خىراى 100km/h بێت، بەمەش تىبىنى دەكەيت كە دورى پۆيست بۆ وەستان زياتر

لە 3 ئەوەندە زىاد دەكات كاتێك خىراى دوو ئەوەندە زىاد بكات.

ئایا پەيوەندى نۆوان خىراى x و دورى وستان d پەيوەندىيەكى هېلىيە؟ ئەو پۆنكەوه.

X	Y1
0	0
10	2.625
20	6.5
30	11.625
40	18
50	25.625
60	34.5



بېرى پەخنەگر

بره دووجاكان Quadratic Expressions

بره دووجاكان نهو برانهن كه به شيوه $ax^2 + bx + c$ دهنوسرین كاتيك a, b, c ژماره ی پاستین و $a \neq 0$ به a, b, c دهوتریت هاوكولكهكانی **Coefficients** بره دووجاكه.

سادهترین بری دووجا بریتیه له بری x^2 . به شيوه یه کی گشتی، نهگر بری کی هیلی له بری کی هیلی تر بدهیت نهو بری کی دووجات دهستهكهویت وه لهم چالاکیهدها دهینریت.

چالاکي 1

Quadratic and Linear Expressions

بره دووجاكان و بره هیلییهكان

1. نه خستهیه تهواو بکه.

بري يهكهم	بري دووهم	نهجامي ليكدانی ههردوو برهكه
$2x - 2$	$2x + 1$	$(2x - 2)(2x + 1) = 4x^2 - 2x - 2$
$x + 1$	$x + 1$	
$2x$	$-2x + 1$	
$-x + 2$	$0.5x + 1$	

2. هاوكولكهكانی بره دووجاكه له ههرباریکی پرسپاری پيشوو دیاربکه.

Quadratic Functions

نخشه دووجاكان

لهوانه ی دووهمی نه بهشهدها نهخشه هیلییهكان فیروبویت، لهم بهشهدها جوړیکی نوئ له نهخشهكان فیرودهبیت كه نهخشه دووجاكانه. له بیرت بیټ شيوه ی گشتی نهخشه ی هیلی بریتیهله $f(x) = mx + b$. نهویش به بری کی جهبری هیلی پیناسهكراوه، بهلام نهخشه ی دووجا به بری کی دووجا پیناسه دهکړیت.

نخشه ی دووجا Quadratic Function

نخشه ی دووجا نهخشه یهكه رپساكه بههوی بری کی دووجای یهك گورپاو دهنوسریت. بهم شيوه $f(x) = ax^2 + bx + c$ كاتيك a, b, c ژماره ی پاستین و $a \neq 0$. به a, b, c دهوتریت هاوكولكهكانی نهخشه دووجاكه.

سادهترین شيوه ی نهخشه دووجاكان نهخشه ی $f(x) = x^2$. دهتوانریت ههموو نهخشه یهکی دووجا لهم نهخشه یهوه پیکبهینریت به بهكارهیانی جیگورپکی ساده یان ناویته. هه لهبهر نه هویشه به نهخشه ی بنهړهتی «دایك» دادهنریت بؤ ههموو نهخشه دووجاكان. نهخشه ی $d(x) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{160}x^2$ نمونه یهکی نهخشه ی دووجا یه.

ههروکولكهكانی نهخشه دووجا یهکی دووری راوهستانی ئوتومبیلهكه دهنوینی، کامانه؟ **بیری پهخنهگر**

پوونبیکه وه که نهخشه ی $f(x) = (2x-1)(3x+5)$ نهخشه یه کی دووجایه، و هاوکۆلکه کانی a و b و c دیاریبکه.

شیکار

پښگای دووهم

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-1)(3x+5) \\ &= (2x-1)3x + (2x-1)5 \\ &= 6x^2 - 3x + 10x - 5 \\ &= 6x^2 + 7x - 5 \end{aligned}$$

پښگای یه که م

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-1)(3x+5) \\ &= 2x(3x+5) - (3x+5) \\ &= 6x^2 + 10x - 3x - 5 \\ &= 6x^2 + 7x - 5 \end{aligned}$$

له بهر ئه وه ی $f(x) = 6x^2 + 7x - 5$ نهخشه یه کی دووجایه و هاوکۆلکه کانی بریتیه له $c = -5$ ، $b = 7$ ، $a = 6$.

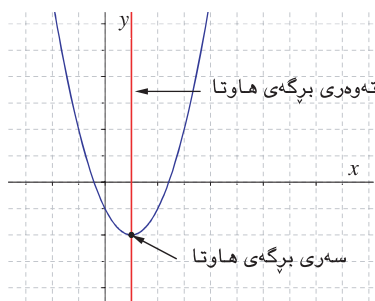
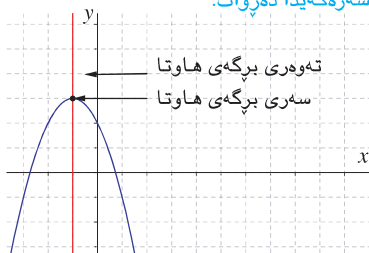
ههولبد هه پوونبیکه وه که نهخشه ی $f(x) = (2x-5)(x-2)$ نهخشه یه کی دووجایه و هاوکۆلکه کانی دیاریبکه.

ویننه ی پوونکردنه وه ی نهخشه ی دووجا ناویکی تاییه تی هیه ئه ویش بره گی هاوتایه *Parabola*. ئه م وینانه ی خواره وه دووچۆر له بره گی هاوتا پیشان دهن.

تییینی بکه که ته وه ری بره گی

هاوتا که هه میشه به

سه ره که پدا ده روا ت.



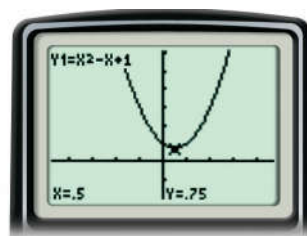
تییینی بکه که هه بره گی هاوتایه ک خالیکی ناسراوی هیه پیی دهوتریت سه ر *Vertex*، و ته وه ریکی هاوجیبوونی هیه که بۆ دووبه شی جووتبوو به شی ده کات. ههروه ها تییینی ئه وه بکه سه ر له ویننه ی نهخشه دووجا که، گه وه ترین یان بچووکتترین به های نهخشه که ده گه ی نیت. ئه گه ر له نهخشه دووجا ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ووردبیته وه، بۆت ده ره که وه ی که به های $f(x)$ هه ژمار ده کریت به های x هه ر چهن د بی ت. ئه وه ش ئه وه ده گه یه نیت که بواری نهخشه ی دووجا یه کسانه به کۆمه له ی ژماره راستیه کان به ته واوی. به لام مه ودا که ی ههروه کو له دوو ویننه که ی پیشو دا دیاره. بریتیه له کۆمه له ی ئه و ژماره راستیه کان به متر نین له بچووکتترین به های نهخشه که (له جۆری یه که م)، و یان کۆمه له ی ئه و ژماره راستیه کان ی که له گه وه ترین به های نهخشه که زیاتر نین (له جۆری دووهم).

ئایا سەرى ئەم نەخشە دووجایە $f(x) = x^2 - x + 1$ گەرەتەرىن یان بچووکترین بەها دەنۆینیت؟ دەتوانیت بژمیری پروونکردنەویدی یان خستەى بەهاکان بەکاربەینیت.

شیکار

رېگای یەكەم

دەتوانیت بژمیری پروونکردنەویدی بەکار بەینیت بۆ ئەوێ بۆت دەرکەوێت کە نەخشەکە بچووکترین بەهای هەیه.



ئەگەر بەدوای هێلە چەماوەکەیدا بچیت بۆت دەرکەوێت کە پۆتانی سەرەکەى $(0.5, 0.75)$

رېگای دووهم

دەتوانیت بژمیری پروونکردنەویدی بەکار بەینیت بۆ دروستکردنی خستەى بەهاکان بۆ نەخشەکە. لە خستەکەدا پروونەبێتەو کە نەخشەکە دەرگاتە بچووکترین بەهاکەى کاتیگ بەهای x ، 0.5 دەبێت، و ئەم بچووکترین بەهایەش بریتییە لە 0.75 .

X	Y1	
-2.00	7.00	
-1.50	4.75	
-1.00	3.00	
-0.50	1.75	
0.00	1.00	
0.50	0.75	
1.00	1.00	
X=0.5		

لەم خستەیه دەرەکەوێت کە سەرى بېرگە هاوتاکە خالی $(0.5, 0.75)$.



هەولبە

ئایا سەرى نەخشە دووجای $f(x) = -2x^2 - 4x + 1$ گەرەتەرىن یان بچووکترین بەها دەنۆینیت؟

دەتوانیت بە سەرنجدان لەنیشانەى هاوکۆلکەى a ، بزائیت کەنەخشە دووجای $f(x) = ax^2 + bx + c$ بەهای گەرەتەرىن یان بچووکترین هەیه.

بەهای گەرەتەرىن یان بچووکترین؟ Maximum and Minimum values

- پروونکردنەویدی نەخشەى دووجای $f(x) = ax^2 + bx + c$ کاتیگ a و b و c ژمارەى راستین و $a \neq 0$ بریتییەلە بېرگەى هاوتا.
- ئەگەر a ، هاوکۆلکەى x^2 موجب بێت ئەوا بېرگە هاوتاکە کراویدە پروو سەرەو. و سەرەکەى نزمترین خالی بېرگەکەیه. پۆتانی دووهمى خالەکەش بچووکترین بەهای Minimum Value نەخشەکەیه.
- ئەگەر a ، هاوکۆلکەى x^2 سالب بێت ئەوا بېرگە هاوتاکە کراویدە پروو خوارەو. و سەرەکەى بەرزترین خالی بېرگەکەیه. پۆتانی دووهمى خالەکەش گەرەتەرىن بەهای Maximum Value نەخشەکەیه.
- پۆتانی دووهمى سەرى بېرگەى هاوتا ئەوێرێ بەها Extremum Value دەنۆینیت بۆ نەخشە دووجاکە. ئەوێرێ بەهاکەیش گەرەتەرىن یان بچووکترین بەهایە.

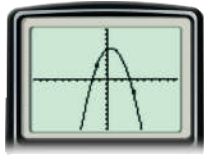
ئەم بېرگە هاوتایانە پروو سەرەو یان خوارەو پروو و کراو؟ ئایا سەرەکەشى گەرەتەرىن یان بچووکترین بەها دەنۆینیت؟

$f(x) = 5 + 4x - x^2$ ب

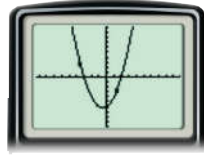
$f(x) = x^2 + x - 6$ ا

ا. هاوگۆلكەي x^2 لە نەخشەي $f(x) = x^2 + x - 6$ ب. هاوگۆلكەي x^2 لە نەخشەي $f(x) = 5 + 4x - x^2$

بریتییه له 1. وه لهبەر ئه‌وه‌ی موجه‌به‌ ئه‌وا
بریتییه له -1. وه لهبەر ئه‌وه‌ی سالیبه‌ ئه‌وا
برگه‌ هاوتاکه‌ کراویه‌ بۆ سه‌ره‌وه‌و
برگه‌ هاوتاکه‌ کراویه‌ بۆ خواره‌وه‌و
نەخشەکه‌ بچووکترین به‌های هه‌یه‌ له
نەخشەکه‌ گه‌وره‌ترین به‌های هه‌یه‌ له
سه‌ره‌که‌یدا.
سه‌ره‌که‌یدا.



پاسه‌دان بکه‌



پاسه‌دان بکه‌

چالاکي 2

جیگۆرکي نەخشەي دووجای بنه‌رته‌ی (دايک) Transforming Quadratic Parent Function

پيويستيت به‌ په‌رەي پرونکردنه‌وه‌ي يان بژمي‌ري پرونکردنه‌وه‌ي ده‌بي‌ت.

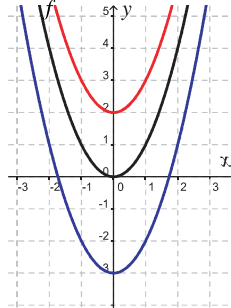
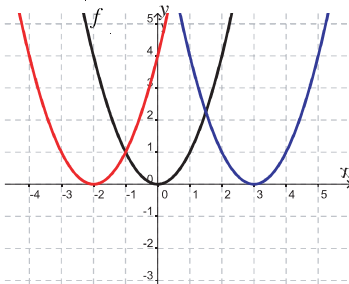
1. خشته‌ي به‌هاکان دروستبکه‌، پاشان پرونکردنه‌وه‌ي هه‌ر نەخشەيه‌ک بکێشه‌.
 $y = x^2$ $y = x^2 + 1$ $y = x^2 - 1$
2. چ گۆراني‌ک به‌سه‌ر پرونکردنه‌وه‌ي نەخشەي بنه‌رته‌ي دادی‌ت، ئه‌گه‌ر 1 مان بۆ زيادکرد يان لێده‌رکرد له‌ نەخشەکه‌ي؟

3. خشته‌ي به‌هاکان دروستبکه‌، پاشان پرونکردنه‌وه‌ي هه‌ر نەخشەيه‌ک بکێشه‌.
 $y = x^2$ $y = (x + 2)^2$ $y = (x - 2)^2$
4. چ گۆراني‌ک به‌سه‌ر پرونکردنه‌وه‌ي نەخشەي بنه‌رته‌ي دادی‌ت، ئه‌گه‌ر 2 مان بۆ زيادکرد يان لێده‌رکرد بۆ گۆرپاوي ئازاد x .

5. خشته‌ي به‌هاکان دروست بکه‌، پاشان پرونکردنه‌وه‌ي هه‌ر نەخشەيه‌ک بکێشه‌.
 $y = x^2$ $y = (x - 2)^2 + 1$ $y = (x - 2)^2 - 1$ $y = (x + 2)^2 + 1$
6. چ گۆراني‌ک به‌سه‌ر پرونکردنه‌وه‌ي نەخشەي بنه‌رته‌ي دادی‌ت، کاتي‌ک 2 له‌ x ده‌ربه‌کەيت و 1 بۆ نەخشەکه‌ زيادبکړي‌ت؟ و کاتي‌ک 2 بۆ x زياد بکړي‌ت و 1 له‌ نەخشەکه‌ ده‌ربه‌کەيت.

✓ خالي چاوديري

✓ خالي چاوديري

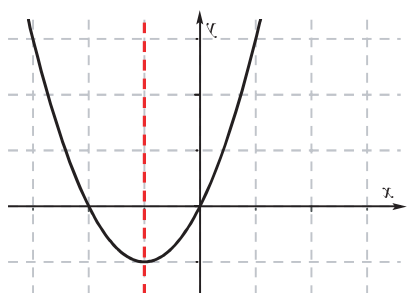


هه‌ر يه‌ک له‌ دوو نەخشەي $y = (x + 2)^2$ و $y = (x - 3)^2$ کشانه‌وه‌يه‌کي ئاسوي

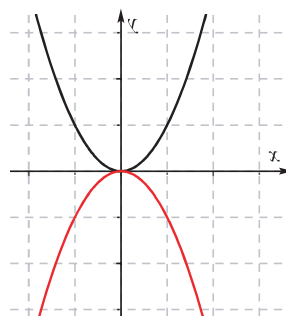
Horizontal Translation بۆ پرونکردنه‌وه‌ي نەخشەي بنه‌رته‌ي $y = x^2$ ده‌نوین. کاریگه‌ري زيادکردنی ژماره‌يه‌ک بۆ گۆرپاوي ئازاد يان ده‌رکردن لێ، پرونکردنه‌وه‌ي نەخشەکه‌ بۆ لای چه‌پ يان لای راست را‌ده‌کێشي‌ت.

هه‌ر يه‌ک له‌ دوو نەخشەي $y = x^2 + 2$ و $y = x^2 - 3$ کشانه‌وه‌يه‌کي ستووني

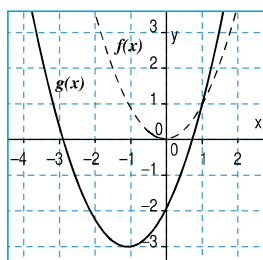
Vertical Translation بۆ پرونکردنه‌وه‌ي نەخشەي بنه‌رته‌ي $y = x^2$ ده‌نوین. کاریگه‌ري زيادکردنی ژماره‌يه‌ک بۆ نەخشەکه‌ يان ده‌رکردن لێ، پرونکردنه‌وه‌ي نەخشەکه‌ بۆ سه‌ره‌وه‌ يان بۆ خواره‌وه‌ را‌ده‌کێشي‌ت.



ئەو راستەھيئەلە ستوونىيەى كە بەسەرى بېرگە
ھاوتاكەدا دەپوات تەوهرى ھاوجىبۇونى ويئە
پوونكردەنەوييەكەيە، لەبەر ئەوهرى ئەو
راستەھيئەلە بېرگە ھاوتاكە دەكات بە دووبەشى
جووتبوو، بەراستەھيئەلەكەشى دەووترىت
تەوهرى بېرگە ھاوتاكە Axis of Symmetry .



ھيئەلە پوونكردەنەويى نەخشەى $y = -x^2$
ويئەدانەويى پوونكردەنەويى نەخشەى
بەپەتتە بە دەورى تەوهرى x بەلام سەرى
بېرگە ھاوتاكە بچووكترىن بەھاي نەخشە
دووجاى بەرەت دەنويئەت، و ھەمان سەر
گەرەترىن بەھايە بۇ نەخشەى $y = -x^2$.



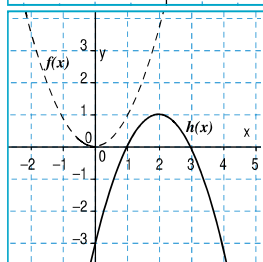
جىگۇرپكى پوونكردەنەويى نەخشەى دووجا
چۇن جىگۇرپكى نەخشەى دووجاى بەرەتتە $f(x) = x^2$ پى دەكەى
بۇ بەدەستەھيئەنى پوونكردەنەويى نەخشەكە.

ا $g(x) = -(x+1) - 3$

بەپى پاكىشانى يەك يەكە بۇلاى
چەپ و 3 يەكە بۇ خوارەو.

ب $h(x) = -(x-2) + 1$

بەپى پاكىشانى 2 يەكە بۇلاى راست و لەدوايدا ويئەدانەويى
بەدەورى تەوهرى x پاشان پاكىشانى بۇ سەرەو يەك يەكەك.



نورە

4

ھەولبەدە چۇن جىگۇرپكى پوونكردەنەويى نەخشەى دووجاى بەرەتتە $f(x) = x^2$ دەكەيت بۇ بەدەستەھيئەنى
پوونكردەنەويى نەخشەكە.

ب $h(x) = (x+3) - 2$

ا $g(x) = (x-2) + 4$

راھىنان

بەردەوامبۇون لە بىر كارىدا

- جىاوازى نىوان پوونكردەنەويى نەخشەى ھيلى و پوونكردەنەويى نەخشە دووجا پوونبەكەو.
- جىاوازى نىوان بېرى جەبرى نەخشەى ھيلى و بېرى جەبېرى نەخشەى دووجا پوونبەكەو.
- چۇن دەزانىت سەرى بېرگە ھاوتا بچووكترىن بەھا يان گەرەترىن بەھا بۇ نەخشە
دووجاكە دەنويئەت.
- پەيوەندى چىيە لە نىوان پوونكردەنەويى نەخشەى بەرەتتە و پوونكردەنەويى
نەخشەى $y = x^2 - 8$ ؟
- پەيوەندى چىيە لە نىوان پوونكردەنەويى نەخشەى بەرەتتە و پوونكردەنەويى
نەخشەى $y = (x-8)^2$ ؟

راهبانی ناراسته کراو

پوونبکوهه که نهخشهکه نهخشهیهکی دوجایه و هاوکۆلکهکانی دیاریبکه.

$$f(x)=(2x+5)(3x+1) \quad \text{8} \quad f(x)=(x+2)(x+5) \quad \text{7} \quad f(x)=(x+1)(x-7) \quad \text{6}$$

گهورهترین بهها یان بچووکترین بهها؟ له راهبانهکانی 9 تا 14 وهلامی ئهپرسیارانه بدهوه:

ا ئایا برکه هاوتاکه پوهو سهروهه یان پوهو خوارهوه کراوتهوه؟

ب ئایا ئهوپهپی بههای نهخشهکه گهورهترین بههایه یان بچووکترین بههایه؟

$$f(x)=2-3x-x^2 \quad \text{10} \quad f(x)=x^2-3x+5 \quad \text{9}$$

$$f(x)=x^2-2x+7 \quad \text{12} \quad f(x)=x^2+5x+3 \quad \text{11}$$

$$f(x)=-2x^2-5x+1 \quad \text{14} \quad f(x)=-x^2+8x+14 \quad \text{13}$$

راهبان وجیهه جیکردن

پوونبکوهه که نهخشهکه نهخشهیهکی دوجایه و هاوکۆلکهکانیش دیاریبکه.

$$f(x)=(4-x)(7+x) \quad \text{16} \quad f(x)=(x-3)(x+8) \quad \text{15}$$

$$f(x)=(2x+3)(4-x) \quad \text{18} \quad f(x)=-(x-2)(x-6) \quad \text{17}$$

$$f(x)=(x-6)(x+6) \quad \text{20} \quad f(x)=x(x-3) \quad \text{19}$$

ئایا نهخشهکه دوجایه یان نا؟ ئهمه پوونبکوهه.

$$y=3-x \quad \text{22} \quad y=3-x^2 \quad \text{21}$$

$$y=\frac{2x^2+5}{x+3} \quad \text{24} \quad y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3} \quad \text{23}$$

$$y=|x^2+5x-2| \quad \text{26} \quad y=x^2-x^2(x+7) \quad \text{25}$$

ئایا برکه هاوتاکه پوهو سهروهه یان پوهو خوارهوه کراوتهوه؟ ئایا ئهوپهپی بههای

نهخشهکه بچووکترین بههایه یان گهورهترین بهها؟

$$y=-8x^2-x \quad \text{28} \quad y=2x^2-2x \quad \text{27}$$

$$y=4-x^2-2x \quad \text{30} \quad y=3-x^2 \quad \text{29}$$

چۆن پوونکردنهوهی نهخشهیه بنهپهتی جیکۆرکی پی دهکمی بۆ بهدهستهپانی

پوونکردنهوهی ئهم نهخشانه؟

$$y=(x-5)^2-2 \quad \text{32} \quad y=(x-2)^2-1 \quad \text{31}$$

$$y=-(x+6)^2-2 \quad \text{34} \quad y=-(x-2)^2+1 \quad \text{33}$$

$$y=(x+4)^2-7 \quad \text{36} \quad y=-(x-3)^2-2 \quad \text{35}$$

جیکۆرکی پوونکردنهوهی نهخشهکه بکیشه و پاشان وهلامی ئهم پرسیارانه بدهوه.

$$y=2(x+2)(x-4) \quad \text{ا}$$

$$y=-(x+2)(x-4) \quad \text{د}$$

$$y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-4) \quad \text{و}$$

$$y=(x+2)(x-4) \quad \text{ا}$$

$$y=\frac{1}{2}(x+2)(x-4) \quad \text{ج}$$

$$y=-2(x+2)(x-4) \quad \text{ه}$$

• ئهم شهش پوونکردنهوهییانه له چیدا هاوبهشن؟

• کامیان پوهو خوارهوه کراوتهوه؟

• کامیان پوهو سهروهه کراوتهوه؟

سیستمی هاوکیشه هیلییه کان

Systems Of Linear Equations

به ششی

3

وانه کان

1. شیکارکردنی سسته می هیلی به له جیاتیدانان
2. شیکارکردنی سسته می هیلی به لابر دن
3. شیکارکردنی سسته می هیلی به پروونکردنه وه بی

سالنامه کانی پژگارکردن ده توانین سسته می هاوکیشه هیلییه کان به کاربیین بۆ پلاندانانی کرداری چاپکردن و فروشتنی سالنامه کان بۆ کوکردنه وهی دارایی، به کاردیت بۆ پاراستنی هه ندی جوړ له بالنده کان که هه پره شهی له ناوچوونیان لی ده کړیت.



شیکارکردنی سیستمه هیلییهکان بهلهجاتیدانان

Solving Linear Systems by Substitution



بۆچی زۆرجار پیویست به شیکارکردنی سیستهمیکی دوو هاوکیشهی هیلی دهبیته و وهلامی تهوات دهباتی بهبی نزیکردنهوه. فرۆشیار له بازاردا به وردی پیویستی به دیاریکردنی نرخه هه کالایهک دهبیته له پیناو گهیشتنی بهو قازانجهی که دهیهوئته.

له پۆلهکانی پێشوو فیۆری سیستهمی هاوکیشه هیلییهکان بوویت و ههڵسایت به شیکارکردنی ههندیکیان. له پۆلهدا فیۆری چهته پێگایهکی شیکارکردن دهبیته بۆ ئەم جوۆره سیستمانه. له سهههتادا فیۆری پێگای لهجاتیدانان دهبیته

چالاکى

Exploring Substitution

دۆزینهوهی پێگای لهجاتیدانان

پێشبرکێ ئۆتۆمبیلهکان که له شارى سبرنگ له ولاته یهکگرتووهکانی ئەمهريکا بهپێوهدهچیت یهکێک له گرنگترین پێشبرکێیهکانی ئۆتۆمبیلهکان پیکدینیت. تیپی لیخۆرپنی ههه ئۆتۆمبیلێک لهو پێشبرکێیه له دوو شوڤێر پیکهاتووه ههیهکهیان بهجیا چهته خولیک ئەنجام دهدهن. تیپی کارل و مایکل 157 خولیان ئەنجامداوه، ئەگهه مایکل 21 خولی له کارل کههتر ئەنجام داییت، ئایا ههیهکهیان چهته خولی ئەنجامداوه؟

1. بهنووسینی هاوکیشهکان دهستپیکه بۆ ئەوهی نموونهیهکی بیرکاری بدۆزیهوه بۆ شیکارکردنی پرسیارهکه. نهزانراوێک ههلبژێره بۆ نواندنی خولهکانی که کارل ئەنجامداوه و نهزانراوێک ههلبژێره بۆ نواندنی خولهکانی که مایکل ئەنجامداوه، بهمهش سیستهمیکی دووهاوکیشهی هیلیته دهستهکهوئته.

$$\begin{cases} x + y = 157 \\ y = x - 21 \end{cases}$$

بهدوو نهزانراوی x و y

2. پێگای خهملاندن و پاسادانکردن بهکاربهێنه بۆ دۆزینهوهی بههای x و y که دهبنه شیکاری دووهاوکیشهکه.

3. سهیری هاوکیشهی دووهم $y = x - 21$ بکه، ئەم زانیارییه دهبارهی y چۆن بهکاردههیته له هاوکیشهی یهکهما؟

4. $y = x - 21$ لهجاتی نهزانراوی y له هاوکیشهی یهکهم بههای $x - 21$ دابنێ، له پاشاندا ئەو هاوکیشهیهی دهسته دهکهوئته شیکاریکه بۆ دۆزینهوهی بههای x .

5. بههای نهزانراوی x که له پرسیارى پێشوو دهچووه له هاوکیشهی دووهم دایبنی بۆ ههژمارکردنی بههای y .

6. بههای x و y بهراورد بکه لهگهڵ ئەو دوو بههایهی له پێگهی خهملاندن و پاسادانکردنهوه دهستهکوتووه. ئایا ئەم دوو ئەنجامه جووتن؟ ئەمه پوونبکهوه.

وانهى

1

ئامانجهکان

- سیستمی دوو هاوکیشهی هیلی به پێگای له جیاتیدانان شیکاردەکات.

زاراوهکان

Vocabulary

پێگای لهجاتیدانان
Substitution Method

جیهه جیکردن

پێشبرکێ ئۆتۆمبیلهکان

شیکاری پرسیارهکان

خالی چاودێری

ئەگەر بەھای يەككە لەدوو نەزانراوی سستەمی دوو ھاوکیڤشەى ھێلى بزانیت، ئەوا دەتوانیت سیستمەكە شىكاربەكەیت ئەویش بە دانانى بەھای ئەم نەزانراوہ لە يەككە لە دوو ھاوکیڤشەكەدا. ئەم رېڭايە بۆ شىكارکردنى سستەمەكە پيى دەوتریت رېڭاي لە جياتيدانان **Substitution method**

نموونه

1

$$\text{سیستەمی} \quad \begin{cases} 8x + 2y = 19 \\ x = 3 \end{cases} \text{ بە رېڭاي لەجياتيدانان شىكاربەكە}$$

شىكار

لەبەرئەوہى $x = 3$ ، دەتوانیت ئەو بەھايە لەجياتى x لە ھاوکیڤشەى يەكەم دابنئى:

$$8(3) + 2y = 19$$

ئەو ھاوکیڤشەى دەستكەوتووہ شىكاربەكە

$$24 + 2y = 19$$

بۆ دۆزینەوہى بەھای نەزانراوى y

$$2y = -5$$

$$y = -2.5$$

جووتە رېڭخراوى $(3, -2.5)$ شىكارى سیستمەكەيە

$$\text{پاسادانى راستى شىكارەكەكە بە لەجياتيدانانى} \quad 8(3) + 2(-2.5) = 19$$

$$x \text{ و } y \text{ لە ھاوکیڤشەى يەكەمدا:} \quad 24 + (-5) = 19$$

$$19 = 19$$

راستە

$$\text{سیستەمی} \quad \begin{cases} 2y + 3x = 19 \\ y = 5 \end{cases} \text{ بە لەجياتيدانان شىكاربەكە}$$

ھەولبەدە

نموونه

2

$$\text{سیستەمی} \quad \begin{cases} 15x - 5y = 30 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \text{ بە لەجياتيدانان شىكاربەكە}$$

شىكار

لەجياتى y بەھای $2x + 3$ لە ھاوکیڤشەى يەكەمدا دابنئى پاشان ھاوکیڤشە دەستكەوتووہكە

$$15x - 5(2x + 3) = 30$$

شىكاربەكە.

$$15x - 10x - 15 = 30$$

$$5x - 15 = 30$$

$$5x = 45$$

$$x = 9$$

لەجياتى x بەھای 9 لە ھاوکیڤشەى دووہم دابنئى پاشان ھاوکیڤشە دەستكەوتووہكە شىكاربەكە

$$y = 2(9) + 3$$

$$= 18 + 3$$

$$= 21$$

شىكارەكە بریتیيە لە جووتە رېڭخراوى $(9, 21)$

پاسادانى راستى شىكارەكە كە بە لەجياتيدانانى بەھای x و y لەدوو ھاوکیڤشە سەرەکیيەكەدا.

$$21 = 2(9) + 3$$

$$15(9) - 5(21) = 30$$

$$21 = 18 + 3$$

$$135 - 105 = 30$$

$$21 = 21$$

$$30 = 30$$

راستە

راستە

ئەم سیستمەنە بە رېڭاي لەجياتيدانان شىكاربەكە

$$\begin{cases} -3x + 2y = 31 \\ x = 0.5y + 6 \end{cases} \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y = 14 \\ y = 5 \end{cases} \quad \boxed{\text{ا}}$$

سیستمی $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 5x - 7y = 11 \end{cases}$ به‌رِیگای له‌جیاتیدانان شیکار بکه

شیکار

بۆ ئەوهی رِیگای له‌جیاتیدانان به‌کار بهێنیت، شیکاری هاوکیشه‌ی یه‌که‌م بکه بۆ هه‌ژمارکردنی به‌های y به‌پِی x

$$3x + y = 4$$

$$3x + y - 3x = 4 - 3x$$

$$y = 4 - 3x$$

ئاسانترین هاوکیشه
هه‌لَبژیره بۆ شیکارکردن

له‌جیاتی x به‌های 1.5 له هاوکیشه‌ی یه‌که‌م دابنێ پاشان شیکاری هاوکیشه‌که بکه

$$3(1.5) + y = 4$$

$$4.5 + y = 4$$

$$y = -0.5$$

له‌جیاتی y به‌های $4 - 3x$ له هاوکیشه‌ی دووهم دابنێ پاشان شیکاری هاوکیشه‌که بکه

$$5x - 7y = 11$$

$$5x - 7(4 - 3x) = 11$$

$$5x - 28 + 21x = 11$$

$$26x - 28 = 11$$

$$26x = 39$$

$$x = 1.5$$

شیکار بریتیه له جووته رِیکراوی $(1.5, -0.5)$. پاسادانی راستی شیکاره‌که بکه به له‌جیاتیدانانی به‌های x و به‌های y له دوو هاوکیشه بنه‌رته‌تیه‌کان.

بۆچی له نمونه 3 دا هه‌ل‌سایت به هه‌ژمارکردنی نه‌زانراوی y به‌پِی x له هاوکیشه‌ی یه‌که‌مدا له‌جیاتی هه‌ژمارکردنی x به‌پِی y ؟

بیری په‌خه‌نگر

سیستمی $\begin{cases} 6x - 2y = 11 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$ به‌رِیگای له‌جیاتیدانان شیکار بکه

هه‌ول‌بده

سالار له یارییه‌کانی کۆتایی توپی پێدا کلاو ده‌فروشی. 100 کلاوی وهرزی پێشووی لاماوه و 300 کلاوی تازه‌ی هه‌یه، سالار لهم وهرزه ده‌یه‌وێت هه‌موو کلاوه‌کان به‌به‌های 5300000 دینار بفروشی. ده‌بی چ نرخێک بۆ کلاوی تازه‌و کۆن دابنێ تا بگات به‌و نامانجه، نه‌گه‌ر بزانیته‌ نرخێ کلاویکی تازه 7000 دیناری زیاتره له نرخێ کلاویکی کۆن؟

شیکار

به‌هه‌لَبژاردنی دوو نه‌زانراوی یه‌که‌م هێمای d نرخێ کلاویکی کۆن بیته‌ و هێمای n نرخێ کلاویکی تازه‌بیته‌ . سسته‌می دوو هاوکیشه‌که بنووسه بۆ شیکارکردنی پرسیاره‌که:

$$\begin{cases} 300n + 100d = 5\,300\,000 \\ n = d + 7000 \end{cases}$$

له‌جیاتی d به‌های 8000 له
هاوکیشه‌ی دووهمدا دابنێ پاشان
هاوکیشه‌که شیکار بکه.
 $n = 8000 + 7000$
 $n = 15\,000$

له‌جیاتی n له هاوکیشه‌ی یه‌که‌مدا به‌های
 $d + 7000$ دابنێ پاشان هاوکیشه‌که شیکار بکه
 $300(d + 7000) + 100d = 5\,300\,000$
 $300d + 2\,100\,000 + 100d = 5\,300\,000$
 $400d + 2\,100\,000 = 5\,300\,000$
 $400d = 3\,200\,000$
 $d = 8000$

شیکاره‌که بریتیه له $(15000, 8000)$ واتا سالار پێویسته کلاوه تازه‌کان به نرخێ 15000 دینارو کلاوه کۆنه‌کان به نرخێ 8000 دینار بفروشی.

هه‌ول‌بده پێویسته نرخێ چه‌ند دابنێ بۆ هه‌ریه‌که له کلاوه‌کان، نه‌گه‌ر بیه‌وێت 6200000 دیناری ده‌سته‌که‌وێت

جێبه‌جێکردن
بازرگانی

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 ئەگەر بزانی $y = 42$ ، ئەوا چۆن لەجیاتیدانان بەکار دینیت بۆ شیکارکردنی

هاوکێشە $y = x + 8$.

2 ئەم دوو هاوکێشە $2x + 3y = 34$ و $-4x + y = 2$ هەیە، ئاسانتترین نەزانراو و ئاسانتترین

هاوکێشە بۆ دەستپێکردنی شیکار هەلبژێرە، هۆی هەلبژاردنە کەت دیار بکە. پاشان شیکاری بکە

3 پوونیکەو چۆن لەجیاتیدانان بەکار دەهێنی بۆ شیکاری سستەمی $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases}$.

راهیانانی ئاراستە کراو

ئەم سیستمانە بە لەجیاتیدانان شیکاربکە، پاشان پاسادانی شیکارە کە بکە

5 $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 5x = 3y + 12 \\ x = 5 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 10x = 4y + 2 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

راهیان و جێبەجێکردن

8 سەرجهمی دوو ژمارە دەکاتە 27، گەرەکیان 3 ی لەوێ تریان زیاترە ئەم دوو ژمارە

کامانە؟

ئەم سیستمانە شیکاربکە

10 $\begin{cases} x = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 2x + 8y = 1 \\ x = 2y \end{cases}$

12 $\begin{cases} y = 5 - x \\ 1 = 4x + 3y \end{cases}$

11 $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ x + y = 4 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x + y = -92 \\ 2x + 2y = -98 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 5x + y = 2 \\ 10x = 4y + 2 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 6y = x + 18 \\ 2y - x = 6 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 4y - x = 15 \\ y + x = 6 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2y + x = 4 \\ y - x = -7 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ -3x - 6y = -24 \end{cases} \quad 20$$

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad 19$$

$$\begin{cases} 3x + y = 21 \\ 10x + 5y = 65 \end{cases} \quad 22$$

$$\begin{cases} 5x - 7y = 31 \\ -4x + 2y = -14 \end{cases} \quad 21$$

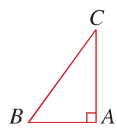
$$\begin{cases} 12x + 4y = 22 \\ 3x - 8y = -10 \end{cases} \quad 24$$

$$\begin{cases} -3y = 9x + 24 \\ 6y + 2x = 32 \end{cases} \quad 23$$

$$\begin{cases} -5x + 7y = -41 \\ 7x + y = 25 \end{cases} \quad 26$$

$$\begin{cases} 11x + 4y = -17 \\ -6x + y = 22 \end{cases} \quad 25$$

27 به‌ستنه‌وه **ئه‌ندازه** دريژي و پاني لاکيشه‌يه‌ک بدۆزه‌وه، ئه‌گهر بزانيت چۆه‌که‌ی 210m، و دريژيه‌که‌ی يه‌کسانه به دوو ئه‌وه‌نده‌ی پانييه‌که‌ی.



28 ئه‌ندازه سه‌رجه‌می پۆوانه‌کانی دوو گۆشه‌ی B و C له‌سی گۆشه‌ی به‌رامبه‌ردا ده‌کاته 90° . پۆوانه‌ی هه‌رگۆشه‌يه‌ک له گۆشه‌کانی سېگۆشه‌که هه‌ژماربکه ئه‌گهر بزانيت پۆوانه‌ی گۆشه‌ی B، 30° له دوو ئه‌وه‌نده‌ی پۆوانه‌ی گۆشه‌ی C که‌متره.

29 به‌ستنه‌وه **بیردۆزی ژماره‌کان** ژماره x چواری که‌متره له سی ئه‌وه‌نده‌ی ژماره y. ئه‌گهر دوو ئه‌وه‌نده‌ی y که‌مبکه‌يه‌وه له‌سه‌رجه‌می 3 له‌گه‌ل دوو ئه‌وه‌نده‌ی x ده‌کاته 11. ئه‌م دوو ژماره‌يه کامانه‌ن؟

سیستمی دوو هاوکیشه‌ی هێلی بو هه‌ر پرسپاریک بنووسه پاشان شیکاری بکه

30 کاری خێرخوازی يه‌کێک له کۆمه‌له‌کانی خێرخوازی ئاهه‌نگیکی سازکرد، که تیايدا ساردمه‌نی پيش که‌شکرا به‌سه‌ر ژماره‌يه‌ک له پیگه‌يشتوان و منداڵان که ژماره‌یان 210 که‌س بوون، به‌وه 935 هه‌زار دینار کۆکرایه‌وه، ئه‌گهر نرخي خواردنه‌وه بو پیگه‌يشتوان 6 هه‌زار دینار بێت و بو منداڵان 3.5 هه‌زار دینار بێت.

ا هاوکیشه‌يه‌ک بنووسه ده‌ریبخت چۆن بری پارکه به‌ته‌واوی کۆکراوه‌ته‌وه

ب هاوکیشه‌يه‌ک بنووسه که ژماره‌ی ته‌واوی که‌سه‌کان دیاریبکات.

ج سیستمی دوو هاوکیشه‌که‌ی به‌ده‌ستکه‌وتوه‌که شیکاربکه. ژماره‌ی پیگه‌يشتوان چهند بوو؟ و ژماره‌ی منداڵه‌کان چهند بوو؟

31 ده‌روازه‌يه‌ک له‌سه‌ر پۆشنه‌یری چینی ژماره‌يه‌ک له جووتیارانی چینی به‌شداریان کرد له دابینکردنی نرخي ئامیژیکی کشتوکالی، ئه‌گهر هه‌ر يه‌کێکیان 8 پارچه پاره‌ بدات، بری پارکه 3 پارچه زیاتر ده‌بی‌ت له بری داواکراو، و ئه‌گهر هه‌ر يه‌کێکیان 7 پارچه پاره‌ بدات، بری پارکه 4 پارچه که‌متر ده‌بی‌ت له بری داواکراو. ئایا ژماره‌ی جووتیاره‌کان چنده‌؟ و نرخي ئامیژه‌که‌ش چنده‌؟

روانىيڭ بۆدواوه

32 **بۆ خوشى** له پېشېركىي پاكردندا نەسرین 20m له پېش رووناكه و رووناكیش 5m له دواى ژيانە و ژيان 10m له دواى بەهارة، بەلام شیرین بە 15m له پېش بەهارة، ریزبەندى پاكردووهكان چۆن بوو؟

ئەم هاوكيشانه شيكاريكه

$$\frac{3}{x} = 15 \quad \mathbf{34}$$

$$\frac{x}{15} = 3 \quad \mathbf{33}$$

$$\frac{x}{3} = 15 \quad \mathbf{36}$$

$$\frac{15}{x} = 3 \quad \mathbf{35}$$

37 42% ژمارەيەك دەكاتە 12.6 ، ژمارەكە كامەيە؟

روانىيڭ بۆپېشەوه

لەجياتيدانان بەكاربەينە بۆ شيكارکردنى ھەريەك لەم سيستمەنە
(تېبىنى بکە 3 هاوكيشەو 3 نەزانراو ھەيە)

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 44 \\ 2y - 6z = 4 \\ z = 4 \end{cases} \quad \mathbf{39}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ y + 3z = 3 \\ z = 2 \end{cases} \quad \mathbf{38}$$

شىكارىكرىنى سىستىمە ھېلىيەكان بەلابردىن

Solving Linear Systems by Elimination



ۋانەى

2

نامانجەكان

• سىستىمى دوو ھاۋىكىشەى
ھېلى بە پىگى لابرىن
شىكارى دىكات.

بۇجى

لابردىن پىگىيەكى نوپىيە كە شىكارىكى خىرا دەدا
بەدەستەۋە بۇ سىستىمى دوو ھاۋىكىشەى ھېلى ئالۋز كە لەم
ۋانەيدا دىتە پىشت.

جىبەجىكرىن

بەكرىدانى ئۆتۈمبىل

نووسىنگەى ھەۋار ھەلدەستىت بە بەكرىدانى ئۆتۈمبىل. گەشتىارىك بىرك پارە دەدات بەرامبەر
ھەر پۇژىك بۇ بەكرىگرتنى ئۆتۈمبىل و بىركى تر پارە دەدات بۇ ھەر كىلۈمەترىك ئۆتۈمبىلەكە
دەبىرپىت. دوو ھاۋى پىزگار و زانا ھەرىيەكەيان ئۆتۈمبىل بەكرى دىگرن لە نووسىنگەى ھەۋار بۇ
گەشتىك، گەشتى پىزگار 2 پۇژى خاياند و 125km بىرى و گەشتەكەى زانا 4 پۇژى خاياندو
350km بىرى، پىزگار 287 250 دىنارىدا، و زانا 697 500 دىنارىدا، كرى ئۆتۈمبىلەكە لە پۇژىكدا
و تىچوونى يەك كىلۈمەتر دىارىيەكە.
دەتوانى سىستىمىكى دوو ھاۋىكىشەى ھېلى بنووسىت، پاشان شىكارىيان بەكەيت بۇ دىارىكرىنى
ھەردو كرىيەكە. بە پىناسەكرىنى ھەردو نەزانراۋى پىسارىكە دەستپىكە.
نەزانراۋى d : ھىماى كرى ئۆتۈمبىلەكە بىت لە پۇژىكدا
نەزانراۋى k : ھىماى پارە تىچوونى يەك كىلۈمەتر بىت.
لە زانىارىيەكانى سەرەۋەدا دەتوانىت سىستىمى ھەردو ھاۋىكىشە بنووسىت.

$$\begin{cases} 2d + 125k = 287 \ 250 \\ 4d + 350k = 679 \ 500 \end{cases}$$

بىگومان دەتوانىت ئەم سىستىمە بە پىگى لەجىياتىدانان شىكارىكەى، بەلام ئەمە كارىكى ئاسان
نىيە. لەم ۋانەيدا فىرى پىگىيەكى تازە دەبىت بۇ شىكارىكرىنى سىستىمە ئالۋزەكان.

زاراۋەكان
Vocabulary

پىگى لابرىن
Elimination Method

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x - 2y = 9 \end{cases} \text{ شیکار دهکەیت سیستمی ئەم دوو هاوکێشهیه}$$

1. ئەم دوو هاوکێشهیه دوو پراډی دژ به یهکتری تێدایه، کامانه؟
2. سیفەتی کوکړدنهوه لهیهکسانبووندا بهکاربهێنه بۆ ئەوهی هاوکێشهیهکت دهستبهکەوێت له هەردوو هاوکێشه که $3x + 2y$ لهگەڵ $5x - 2y$ و 7 لهگەڵ 9 کوکەوه، هاوکێشه تازه که چەند نەزانراوی تێدایه؟
3. هاوکێشه تازه که شیکاربه بۆ دیاریکردنی بههای نەزانراوهکە، پاشان بههای نەزانراوه که له یهکێک له دوو هاوکێشه سەرەکیهکاندا دابنێ، هاوکێشه دەرچوو که شیکاربه بۆ دیاریکردنی بههای نەزانراوی دووهم.
4. پاسادانی ئەوه بکه که هەردوو بههای دهستکەوتوو بۆ نەزانراوی x و y دهبنه شیکاری سیستمی دوو هاوکێشه که.
5. پروونیکهوه چۆن دژهکان بهکاردههێنیت بۆ شیکارکردنی سیستمی هاوکێشهکان.

خالی چاودێری ✓

Elimination Method

رێگای لابردن

له چالاکیهکە ی پێشوو دا رێگای لابردن **Elimination Method** به کارهینا بۆ شیکارکردنی سیستمی دوو هاوکێشه، ئەم رێگایه دژهکان بهکاردههێنێت بۆ لابردنی یهکێک له دوو نەزانراوه که

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 2x - 4y = 13 \end{cases} \text{ رێگای لابردن بهکاربهێنه بۆ شیکارکردنی ئەم سسته مه}$$

شیکار

بۆ دیاریکردنی بههای y بههای x دابنێ به 4 له هاوکێشه یه که مەدا

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 7 \\ 3(4) + 4y &= 7 \\ 12 + 4y &= 7 \\ 4y &= -5 \\ y &= -1.25 \end{aligned}$$

سیفەتی کوکړدنهوه له یهکسانیدا بهکاربهێنه بۆ دهستکەوتنی هاوکێشه یه که تهنها x ی تێدابی که له هەردوو هاوکێشه که وه دەردهچێت و هاوکێشه که شیکاربه که.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 7 \\ 2x - 4y &= 13 \\ \hline 5x + 0 &= 20 \\ 5x &= 20 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

شیکاری سیستمه که دهیته $(4, -1.25)$

بههای x به 4 و بههای y به -1.25 له هەردوو هاوکێشه سەرەکیه دا دابنێ بۆ پاسادانکردنی شیکاره که:

$$\begin{aligned} 2(4) - 4(-1.25) &= 13 \\ 8 - (-5) &= 13 \\ 13 &= 13 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 3(4) + 4(-1.25) &= 7 \\ 12 + (-5) &= 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

تێبینی ئەوه بکه هاوکۆلهکانی y له هەردوو هاوکێشه که دا دژی یهکترن، ئەمهش وادهکات که شیکارکردنی ئەم جوړه سیستمانه ئاسان بێت.

سیستمه که به رێگای لابردن شیکاربه که ههولیده

$$\begin{cases} 3y + 2x = 21 \\ 5y - 2x = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y - x = 5 \\ 4y + x = 9 \end{cases}$$

هەندىك حار وا پيويست دەكات هەردوولاي يەككە لە ھاوكيشەكان يان هەردووكيان لە ژمارەيەك بدریت بۆ بەدەستھێنانى دوو دژەكە كە پىگادات بە لا بردنى يەككە لە دوو نەزانراو، ئەگەر ھاوكۆلكەى يەككە لە دوو نەزانراو كە 1 بىت كارەكە ئاسانە، بەلام دەكریت ئەم تەكنيكە جيبەجيبكریت لەسەر ئەو سستەمانەى زياتر ئالۆزن وەك سىستىمى نموونە 2.

نموونه

2

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 3 \end{cases} \text{ پىگای لا بردن بە کاربەھێنە بۆ شیکاری سىستىمى}$$

شیکار

هەردوولاي ھاوكيشەى يەكەم لە ژمارە 5 بدە و هەروەها هەردوولاي ھاوكيشەى دووهم لە -2 بدە بۆ ئەوەى دوو دژت دەستکەوێت.

$$\begin{array}{l} 10x + 15y = 5 \\ -10x - 14y = -6 \\ \hline y = -1 \\ 2x + 3y = 1 \\ 2x + 3(-1) = 1 \\ 2x - 3 = 1 \\ 2x = 4 \\ x = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{يان} \\ \begin{cases} 10x + 15y = 5 \\ -10x - 14y = -6 \end{cases} \\ \text{سيفهتى كۆکردنەوه لە يەكسانبوندا بە کاربەھێنە بۆ ئەوەى} \\ \text{ھاوكيشەى يەك تازەت دەستکەوێت تەنها يەك نەزانراوى تىدا بىت} \\ \text{ئەويش } y \text{ ە. ھاوكيشەى شیکارىکە. ئىستا بە ھاكەى } y \text{ لە} \\ \text{ھاوكيشەى يەكەم دابنى. شیکارىکە دەبێتە } (2, -1). \\ \text{پاسادانى شیکارىکە بکە بە لەجیاتيدانانى بە ھاى هەردوو نەزانراو، کان} \\ \text{لە هەردوو ھاوكيشە کەدا.} \end{array} \quad \begin{array}{l} (5)2x + (5)3y = (5)1 \\ (-2)5x + (-2)7y = (-2)3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5(2) + 7(-1) = 3 \\ 10 + (-7) = 3 \\ 3 = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2(2) + 3(-1) = 1 \\ 4 + (-3) = 1 \\ 1 = 1 \end{array}$$

راسته

راسته

هەولبەدە

$$\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases} \text{ پىگای لا بردن بە کاربەھێنە بۆ شیکارکردنى ئەم سىستىمە}$$

نموونه

3

$$\begin{cases} 2d + 125k = 287\,250 \\ 4d + 350k = 679\,500 \end{cases} \text{ پىگای لا بردن بە کاربەھێنە بۆ شیکارکردنى ئەو پرسىارەى لەسەرەتای وانەکە باسکرا}$$

شیکار

$$\begin{cases} (-2)2d + (-2)125k = (-2)287\,250 \\ 4d + 350k = 679\,500 \end{cases} \text{ هەردوولاي ھاوكيشەى يەكەم لە -2 بدە}$$

$$\begin{array}{l} 2d + 125(1050) = 287\,250 \\ 2d + 131\,250 = 287\,250 \\ 2d = 156\,000 \\ d = 78\,000 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{لەجیاتى } k \text{ بە ھاكەى دابنى لە ھاوكيشەى} \\ \text{يەكەمدا بۆ ديارىکردنى بە ھاى } d \\ \text{سيفهتى كۆکردنەوه لە يەكسانيدا بە کاربەھێنە بۆ} \\ \text{دەستکەوتنى ھاوكيشەى يەك نوى كە يەك} \\ \text{نەزانراوى تىدا يە ئەويش } k, \text{ پاشان ھاوكيشەى} \\ \text{شیکارىکە:} \\ \begin{array}{l} -4d + (-250k) = -574\,500 \\ 4d + 350k = 679\,500 \\ \hline 100k = 105\,000 \\ k = 1050 \end{array} \end{array}$$

شیکارى سىستىمى ھاوكيشەکانى پيشوو (78 000; 1050). دەتوانیت پاسادانى راستىيەكەى بکەیت، کرى ئۆتۆمبیل لە پۆژیکدا 78 هەزار دینار و برى پارەى تىچووى يەك کیلۆمەتر 1050 دینارە.

هەريەكە لەم سستمانە بە پىگای لا بردن شیکارىکە.

هەولبەدە

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 5x + 7y = 41 \end{cases} \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 5x + 4y = 11 \end{cases} \quad \boxed{\text{ا}}$$

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

ھەردوو دژە پادەكە لە ھەریەك لەم سیستمە نیشانبدەو پوونیکەرەووە چۆن شیکاری دەکەیت

$$\begin{cases} 2a+b=6 \\ -2a-3b=8 \end{cases} \quad \text{3}$$

$$\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 5x+3y=20 \end{cases} \quad \text{2}$$

$$\begin{cases} x+7y=13 \\ x-7y=5 \end{cases} \quad \text{1}$$

ئەو ھەنگاوانە پوویستن بۆ شیکارکردنی ھەریەك لەم سیستمە بەرپگای لابردن باسبکە.

جێبەجێکردنەکان

$$\begin{cases} 9a+2b=2 \\ 21a+6b=4 \end{cases} \quad \text{6}$$

$$\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x-4y=-2 \end{cases} \quad \text{5}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 3x+6y=7 \end{cases} \quad \text{4}$$

راھینانی ئاراستە کراو

شیکاری سیستمەكە بە لابردن بکە، پاشان پاسادانی شیکارەكە بکە

$$\begin{cases} 4x+3y=13 \\ 2x-4y=1 \end{cases} \quad \text{8}$$

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 5x-2y=7 \end{cases} \quad \text{7}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x-4y=0 \end{cases} \quad \text{10}$$

$$\begin{cases} 2x-2y=4 \\ 3x+5y=-10 \end{cases} \quad \text{9}$$

راھینان و جێبەجێکردن

شیکاری سیستمەكە بە لابردن بکە و پاسادانی راستی شیکارەكە بکە

$$\begin{cases} 2a+3b=18 \\ 5a-b=11 \end{cases} \quad \text{12}$$

$$\begin{cases} -x+2y=12 \\ x+6y=20 \end{cases} \quad \text{11}$$

$$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 5x-3y=11 \end{cases} \quad \text{14}$$

$$\begin{cases} -4x+3y=-1 \\ 8x+6y=10 \end{cases} \quad \text{13}$$

$$\begin{cases} -x-7=3y \\ 6y=2x-14 \end{cases} \quad \text{16}$$

$$\begin{cases} 2x=2-9y \\ 21y=4-6x \end{cases} \quad \text{15}$$

$$\begin{cases} 0.6x=3.2y+4.6 \\ 2.9y=0.3x+4.8 \end{cases} \quad \text{18}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}y \\ y=3x-12 \end{cases} \quad \text{17}$$

$$\begin{cases} 2x=3y-12 \\ \frac{1}{3}x=4y+5 \end{cases} \quad \text{20}$$

$$\begin{cases} b=1.5k+4 \\ 0.8b+0.4k=0 \end{cases} \quad \text{19}$$

$$\begin{cases} 2x-5y=-14 \\ -7x+4y=-5 \end{cases} \quad \text{22}$$

$$\begin{cases} 2x-7y=20 \\ 5x+8y=-1 \end{cases} \quad \text{21}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y=-\frac{17}{15} \\ \frac{8}{5}x-\frac{7}{6}y=-\frac{3}{10} \end{cases} \quad \text{24}$$

$$\begin{cases} 3x-2y=-26 \\ 5x+3y=9 \end{cases} \quad \text{23}$$

25 ئەندازە لاكیشەكە چۆدەكە 24m، درێژیەكە یەكسانە بە 3 ئەودەدی پانییەكە،

درێژی و پانی لاكیشەكە چەندە؟

بەستەنەو

سىستەمى دووھاۋكىشە بۇ ھەر پىرسىيارىك بىنۋوسە، باشتىن رىگا ھەلپىزىرە بۇ شىكارى سىستەمەكەو لە راستى ۋەلامەكە دىلنابە.

26 بىركارى بەكاربەر مامۇستاي بىركارى بىرپارىدا ئاھەنگىك بۇ خويىندىكارەكانى خۇى سازىبات بەبۇنەى يادى لەداىكبوونى زاناي بىركارى خوارزىمى، 3 كارتۇن كىك و 3 شووشە شەربەتى بۇ خويىندىكارانى ھۆبەى «أ» كرى بە 54 ھەزار دىنار و 4 كارتۇن كىك و 6 شووشە شەربەتى بۇ خويىندىكارانى ھۆبەى «ب» كرى بە 78 ھەزار دىنار، نرخی ھەرىكە لە كارتۇنىك كىك و شووشەىكى شەربەت چەندە؟

27 داھات بارام پاسەوانە لە يەككىك لە گۆرپەپانەكانى ۋەستانى ئۆتۆمبىل، داھاتىكى نەگۆرى ھەيە بەرامبەر 15 كاتژمىر كاركردن لە ھەفتەيەكداو بۇ ھەر كاتژمىرىك زىاد كاربكات كرىيەكى زىادەى ھەيە، بارام 25 كاتژمىر لە ھەفتەى يەكەمدا كارىكر بەمە 710 ھەزار دىنارى ۋەرگرت و 22.5 كاتژمىر لە ھەفتەى دووھم كارىكر بەمەش 641.25 ھەزار دىنارى ۋەرگرت، كرىيە نەگۆرەكەى و كرىى كاتژمىرىكى زىاد چەندە؟

28 بازىرگانى يەككىك لە تۆمارگەكان دووچۆر كاسىتى مۇسىقا دەرۇشىت يەككىكان كاسىتى ھەلپەركى و ئەوى ترىان كاسىتى مۇسىقاي كلاسىكىيە، نرخی كاسىتى ھەلپەركى 2 ھەزار دىنارە و نرخی كاسىتى مۇسىقاي كلاسىكى 3 ھەزار دىنارە، تۆمارگەكە لە پۇژىكدا 25 كاسىتى لەھەردوچۆر فروشت و بەمەش دەستكەۋتەكەى 69 ھەزاردىناربوو، تۆمارگەكە چەند كاسىتى ھەلپەركى و چەند كاسىتى مۇسىقاي كلاسىكى فروشتوو؟

29 بەكرىدانى خانوو كرىچىيەك لەگەل كرىى مانگى يەكەمدا بارمەتەيەك دادەنى، جوامىر لە مانگى يەكەمدا 2700000 دىنارىدا و بە درىژايى سالەكە 20850000 دىنارىدا، ئەوا بەھاي ھەرىكە لە بارمەتەكەو كرىى خانووۋەكەى لە مانگىكدا چەندە؟

30 گەشتوگوزار لە پشوى كۇتابى ھەفتە ئۆتلىك دووچۆر پىشاندانى خستەپرو، يەكەمىان 2 شەو و 4 ژەمە خواردن دەرگىتەۋە بە بەھاي 615 ھەزار دىنار و دووھىمان 3 شەو و 6 ژەمە خواردن دەرگىتەۋە بە بەھاي 1027.5 ھەزاردىنار، تىچووى شەۋىك چەندە؟ و تىچووى ژەمە خواردنىك چەندە؟

روانىنىك بۇدواۋە

31 دەروازەيەك لەسەر پۇشەنبىرى فىرەۋنىيەكان زاناكانى شوئىنەۋارناسى لەسەر كاغەزى فىرەۋنىيەكان ئەم پىرسىارەيان بىنى، نرخی تورەگەيەك كە ھەمان كىش لە زىپروزيو و مىسى تىدايە دەكاتە 84 شەعتە (يەكەى پارە فرەۋنىيەكان) كىشى ھەرىكە لە زىپروزيو و مىسى ناو تورەگەكە چەند ئەگەر نرخی يەك دىن (يەكەى پىۋانى كىش لەلاى فىرەۋنىيەكان) لە زىر 12 شەعتە و يەك دىن لەزىو 6 شەعتەو يەك دىن لە مىس 5 شەعتە بىت؟

ھاۋكىشەكە شىكارىكە

$$\frac{1}{2}x + 3 = 2 \quad 34 \quad 3x - 2 = 2x + 1 \quad 33 \quad -5 = -x + 7 \quad 32$$

روانىنىك بۇپىشەۋە

35 تەكنۇلۇژيا وئىنەى دوو راستەھىلى $2x - 3y = 6$ و $4x - 6y = 18$ بىكىشە لەھەمان پروتەختى پۇوتانەكاندا، ئەۋەى دەستكەۋتوۋە باسبەكە، (بژمىرى پروونكرىنەۋەبى بەكاربەھىنە ئەگەر بكرىت).

وانه‌ی
3

بۇچى

بەكاردېت بەنايەتلىك كارخانىسى ۋە ئابورۇ،
 ھە ھەندى بارد دۆڭنەۋى شىكارى تەۋا
 زۆر گرنگ نىيە، بەلەم پىۋىستە شىكارىكى
 تىزىك بدۆڭنەۋە ھەندى بارد داۋاكرا
 تەۋەيە ئەگەر شىكارى ھەيىت تەنھا يەك
 شىكار يان زۆر تىزىك شىكارىك، لەم بارانەدا
 شىكارى پۈۈنكۈنەۋى بۇ سىستەمى
 ھاۋىكەشە ھىلىيەكان يارمەتېمان دەدات
 بۇ ۋەلەمدانەۋى ئەۋ پىرسىارە.

● سیستمی دووها و کی‌شهی
هیّلی به پروونکرده وهیی
شیکار دهکات.

● سستہ می دووہا وکیٹشی
ہیلے یو لہندہ کات۔

له‌به‌شی پښوو چونی‌ته‌تی شیکارکردنی سیستمی هاوکښه هیڅ‌لیه‌کان فیډ‌بوییت به‌به‌کاره‌یانی له‌جیاتیدانان یان لا‌بردن، له‌هه‌ریه‌که‌له‌م دوو رڼگه‌یه‌ پښویسته به‌های یه‌کک له‌ دوو نه‌زان‌واوه‌که دیاریکه‌ین پاشان به‌های ئه‌ویتریان دیاریکه‌ین. له‌لایه‌کی تر، شیکارکردنی پرسیارکی ژیانی پړ‌ژانه له‌وانه‌یه‌ته‌ن‌ها پښویستی به‌دو‌زینه‌و‌دی به‌های نزیکه‌یی شیکاره‌که‌یه، و له‌وانه‌یه‌وا پښویست بکات به‌وه‌لامانه‌و‌دی پرسیارکی ساده وه‌ک ئایا سسته‌می هاوکښه‌کان شیکاری هه‌یه؟ و ژماره‌یان چه‌نده ئه‌گر هه‌بن؟ له‌م وانه‌یه رڼگای شیکارکردنی ئه‌و سسته‌مانه فیډ‌بوییت و وه‌لامی خیرا بؤ ئه‌م پرسیارانه مسو‌گه‌ر ده‌کیت.

چالاکي

زاراوه کان
Vocabulary

سیستمی دیار

Independent System

سیستمی نادیار

Dependent System

سیستمی، ئەستەم

Inconsistent System

پۆیستان به بژمیڤی روونکردنهوهیی یان کاغهزی روونکردنهوهیی ههیه.

شیکاری پوونکردنه وهی سیستمی $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$ دهکین

1. چي دهليٽ دهر باره ځالې (c, d) بهيڻي دوو راسته هيلې $y = -x + 5$ و $y = 3x + 1$ کاتيک

جۋوتہ ریکخراوی (c, d) شیکاریکی ئہو سستہ مه بیٔ؟

2. هەردوو راستەھێڵەکە لەهەمان رووتەختی پۆوتان بکێشە.

3. به‌های نزیکه‌یی بۆ پۆوتانی خالی یه‌کتبرینی دووراسته‌هیلکه بدۆزهوه.

4. شیکاریکی، نزیکه‌یی، سیستمه‌که بدۆزه‌وه.

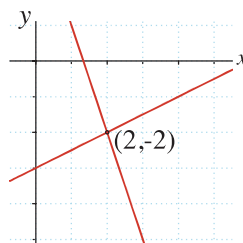
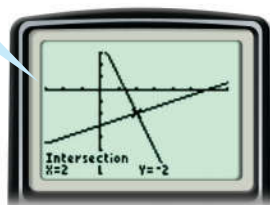
✓ خالی چاودیڙی

بهره وړونکړنه وده یی سستمی $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ شیکاریکه.

شیکار

بۇ ټوټه یی راسته هیلی $3x + y = 4$ بکیشن، خالی یه کتر برین له گهل ته وری دوهم y دیار یکه له ریگای دانانی 0 له جیاتی گورای x ، دوزینه وری بهای گورای y که بهای بهرام بهر که یه تی. $y = 4$ ده سته که ویت، که واته راسته هیلی که به خالی $(0, 4)$ دا ده پوات، دیسان خالی یه کتر برینی راسته هیلی که له گهل ته وری یه کم دیار یکه به دانانی بهای 0 له جیاتی گورای y و دوزینه وری بهای x بهرام بهری $x = \frac{4}{3}$ ده سته که ویت، که واته راسته هیلی که به خالی $(\frac{4}{3}, 0)$ داده پوات. نیستا راسته هیلی که بکیشه. بۇ کیشانی راسته هیلی $x - 2y = 6$ هه مان ریگا به کار بهینه. دوو راسته هیلی که له $(2, -2)$ یه کتر ده برن.

شاشه که وهک ټه مه ی خواره وه
پیئاسه کراوه: 7; -3; ئاسوی
و 3; -7; ستونی بۇ ټوټه ی
وینه ی بهرام بهرت ده سته و ی



دلنیا به له شیکار که به له جیاتیدانانی ژماره x له بری 2 و ژماره y له بری -2

$x - 2y = 6$	$3x + y = 4$
$2 - 2(-2) = 6$	$3 \times 2 + (-2) = 4$
راسته $2 + 4 = 6$	راسته $6 - 2 = 4$

چالاکي 2

Classifying Linear Systems

پولینکړنی سستمی هاوکیشه هیلیه کان

$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$
$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$
$\begin{cases} y = \frac{8-3x}{4} \\ y = -\frac{3}{4}x + 2 \end{cases}$

بژمیری پوونکړنه وده یی یان په پری پوونکړنه وهییمان پژیسته

1. به پوونکړنه وده یی سستمی یه کم بنوینه له خشته ی بهرام بهر

أ. ئایا دوو راسته هیلی که یه کتر برن؟

ب. ئایا سستم که ته نها یه شیکاری هیه؟ ټو شیکاره چییه ټه گهر

هه بوو؟ و ټه گهر سستم که شیکاری نییه، سستم که بگوره بۇ ټوټه ی

ته نها یه شیکارت ده سته و ی و هه ژمار یکه.

2. ټوټه ی ټه نجامتدا دوو باره که وه له سر سستمی دوهم پاشان سییه م.

3. په یوهندی نیوان دوو راسته هیلی که پوونیکه وه.

• کاتی که سستم که شیکاری نه بیټ.

• کاتی که سستم که ژماره یه کی ناکوتا شیکاری هه بیټ.

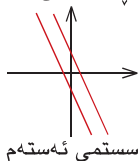
• کاتی که سستم که ته نها یه شیکاری هه بیټ.

بیری په خنه گر

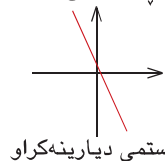
کاتی که هه ول ده دیت به پوونکړنه وده یی سستمی کی دوو هاوکیشه ی هیلی شیکار بکه یت،

یه کی که له م سی بارانه ی خواره ووت بۇ در ده چی؟

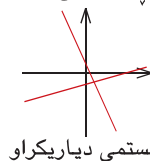
دوو راسته هیلی ته ریپ



دوو راسته هیلی جووت



دوو راسته هیلی یه کتر بر



پۆلینی سىستەمى ھاۋكىشە ھېلىيەكان Classifying Linear Systems

سىستەمى ھاۋكىشە ھېلىيەكان پۆلن دەكرېن بۆ سى جۆرى بنەپەت:

- سىستەمى سىتەم **Inconsistent**: سىستەمىكە شىكارى نىيە
- سىستەمى دىار **Independent**: سىستەمىكە تەنھا يەك شىكارى ھەيە
- سىستەمى نادىار **Dependent**: سىستەمىكە ژمارەيەكى بېسنور شىكارى ھەيە

نمونە

2

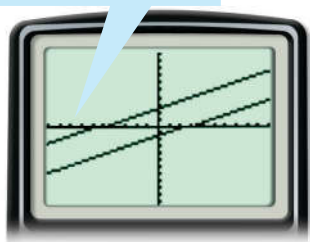
ھەريەكە لەم سىستەمانە پۆلن بىكەو شىكارەكەى دىارىبەكە ئەگەر ھەبېت

دوو راستەھىلەكە يەكتر نابېن چونكە لارىيەكانىيان يەكسانن و جوتېش نابن

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + 5 = 2y \end{cases} \quad \text{ب}$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 5y = -7 \end{cases} \quad \text{ا}$$

شىكار



دوو راستەھىلەكە يەكتر دەبېن چونكە لارىيەكانىيان جىاوازە

لەبەرئەوھى دوو راستەھىلەكە تەرىبن ئەوا سىستەمەكە ئەستەمە

لەبەرئەوھى دوو راستەھىلەكە يەكتر دەبېن ئەوا سىستەمەكە دىارىكاراۋە. شىكارەكەش برىتېيەلە (3, 2)

سىستەمى $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$ پۆلن بىكەو شىكارەكەى دىارىبەكە ئەگەر ھەبېت

ھەولېدە



ئامارەكان دەربارەى تەمەنى ھاۋسەرگىرى بۆ كۆرۈكچ لە يەككە لە ۋلاتەكان دەركەوتوۋە، ۋەك پىدراۋەكان لە ۋىنەى بەرامبەردا دىارىكاراۋە. خشتەيەك پىكېھېنە ئەو پىدراۋانە پوختكاتەۋە. ئەگەر كارەكە لەسەر ئەم شۆۋەيەبەردەۋامبېت، ئايا كاتېك دېت تەمەنى ھاۋسەرگىرى لاي كۆرەكان و كچەكان يەكسان بن؟

3

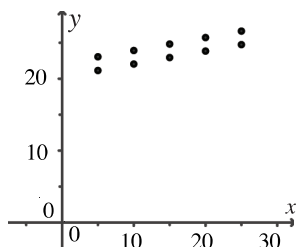
نمونە

جىيەجىيەكردن

زانستە كۆمەلەيەتتەيەكان

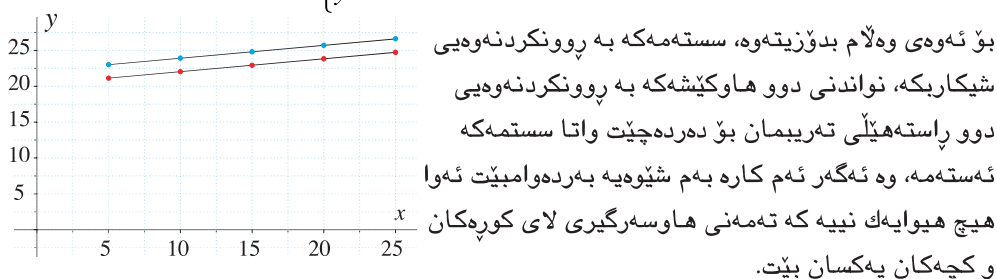
شىكار

بۆ ۋەلامدانەۋەى ئەم پرسىارە پىدراۋەكانى تايبەت بەھەردوۋ پەگەز لەھەمان تەۋەرى پۆتوتان بنوئىنە



پاش سالى 1970	تەمەنى ھاۋسەرگىرى پىاۋان	تەمەنى ھاۋسەرگىرى ژنان
5	23.02	21.14
10	23.92	22.04
15	24.82	22.94
20	25.72	23.84
25	26.62	24.74

بروانه که خالەکانی بۆ هەردوو پەرگەزەکە دەگەرێنەوه، دەکەونه سەر هەمان راستەهێڵ. لاری راستەهێڵی پەيوەست بە کۆرەکان دەکاتە $m_1 = \frac{24.82-23.02}{15-5} = 0.18$ ، هەروەها لاری راستەهێڵی پەيوەست بە کچەکان دەکاتە $m_2 = \frac{22.94-21.14}{15-5} = 0.18$ بۆ ئەوەی هاوکیشەیی راستەهێڵی پەيوەست بە کۆرەکان بنووسین هاوکیشەیی $y = 0.18x + b$ بنووسە بەبەکارهێنانی خاڵی $(10, 23.92)$ بەهای b دیاریبکە: واتا $23.92 = 0.18(10) + b$ لەوهوه $b = 23.92 - 1.8 = 22.12$ هاوکیشەیی پەيوەست بە کۆرەکان دەبێتە $y = 0.18x + 22.12$. بەهەمان پرێگا دەتوانیت هاوکیشەیی ئەو راستەهێڵی پەيوەستە بە کچەکان بدۆزیتەوه که بریتی دەبێ لە $y = 0.18x + 20.24$ تەمەنی هاوسەرگیری لای کۆرەکان لەگەڵ تەمەنی هاوسەرگیری لای کچەکان یەكسان دەبێت ئەگەر سستەمی هاوکیشەکانی دێت شیکاری هەبێت.

$$\begin{cases} y = 0.18x + 22.12 \\ y = 0.18x + 20.24 \end{cases}$$


هەولێدە سیستمی $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 18x - 2y = 4 \end{cases}$ بە پروونکردنەوهیی شیکاریکە پاشان شیکارەکە پاسادان بکە.

راھێنان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

- 1 پروونیکەوه چۆن بە پروونکردنەوهیی سیستمی $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 4y = -9 \end{cases}$ شیکار دەکەیت.
- 2 چۆن بە پروونکردنەوهیی سیستمی $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$ دەنۆینیت؟ چۆن شیکارەکە دەخەملێنی بە پروانین بۆ وێنە پروونکردنەوهییەکە، بۆچی پێویستە راستی خەملاندنەکەت بسەلمێنی؟
- 3 پروونیکەوه چۆن پێسای نەخشەیهکی هێڵی دەدۆزیتەوه بە زانینی وێنە پروونکردنەوهییەکە.

راھێنانی ئاراستە کراو

هەریەك لەو سیستمانە بە پروونکردنەوهیی شیکاریکە

$$\begin{cases} 2x + 3y = -12 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y + 2x = 0 \\ 2y = -x - 9 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + y = 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

هەر سیستمێک بە پروونکردنەوهیی بنوینەو شیکارەکە بخەملێنە، خەملاندنەکەت نزیکیکەوه بۆ نزیکترین بەش لە دە.

$$\begin{cases} 2y - x = 6 \\ 3x + y = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 2 \\ y = -\frac{2}{3}x \end{cases}$$

9 لانه 5000 دیناری پېیه له پارچه‌کانی 250 دیناری و 500 دیناری. ژماره‌ی ههریه‌ک له پارچه‌کان له‌هەر چه‌شنیک چه‌نده، ئه‌گەر ژماره‌ی هه‌موو پارچه‌کان 17 پارچه‌ بیت؟

راهیان و جیه جیکردن

هەر سیستمیک پۆلین بکه.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 4y - 12 = -3x \end{cases} \quad 11$$

$$\begin{cases} x - y = -4 \\ 3x + y = 8 \end{cases} \quad 10$$

به پوونکردنه‌وه‌یی ههریه‌ک لهو سیستمانه بنوینه و پۆلینان بکه. شیکاره‌که به پوونکردنه‌وه‌یی دیاریکه کاتیك سیستمه‌که دیاریکراو بیت.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -3x + 4y = -10 \end{cases} \quad 13$$

$$\begin{cases} 6x + 4y = 12 \\ 2y = 6 - 3x \end{cases} \quad 12$$

$$\begin{cases} x + 3y = 13 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases} \quad 15$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 6x - y = 13 \end{cases} \quad 14$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases} \quad 17$$

$$\begin{cases} y = -2x - 7 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases} \quad 16$$

$$\begin{cases} 3x - 6y = 9 \\ \frac{1}{2}x = y + \frac{3}{2} \end{cases} \quad 19$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y = 4 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \quad 18$$

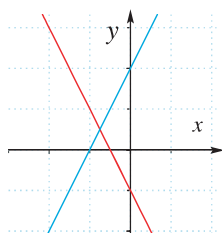
$$\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = -6 \end{cases} \quad 21$$

$$\begin{cases} 4x + 5y = -7 \\ 3x - 6y = 24 \end{cases} \quad 20$$

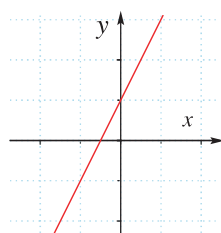
$$\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ 3x + 7y = 47 \end{cases} \quad 23$$

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -3x + y = 1 \end{cases} \quad 22$$

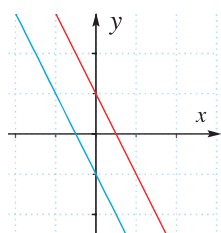
ئه‌و سیستمه‌ی به پوونکردنه‌وه‌یی نویتراوه پۆلین بکه و شیکاره‌که‌ی بنووسه ئه‌گەر تاقانه بوو.



26



25



24

27 ئایا ئه‌م جووته پیکخواهه شیکاری سیستمه‌که پیکدیڤی؟

$$\begin{cases} 4x - 3y = 26 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad \text{ب} (5, -2)$$

$$\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ x - y = 11 \end{cases} \quad \text{ا} (1, 3)$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 16 \\ -8x + 4y = -32 \end{cases} \quad \text{د} (5, 2)$$

$$\begin{cases} 2x - y = 8 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \quad \text{ج} (2, 1)$$

ه یه‌کێک لهو چوار سیستمه‌ی پێشوو دیاریکراو نییه. بیدۆزه‌وه، پاشان سی جووته پیکخواوی تر بنووسه که شیکارین بۆ سیستمه‌که.

ئەندازە باخىكى لاكىشەى چۆەكەى 130m، سى ئەۋەندەى درىژىيەكەى دەكاتە دە ئەۋەندەى پانىيەكەى.

28 درىژى و پانى باخەكە ەژماربەكە **29** پوۋبەرەكەى ەژماربەكە

30 **فپۆكەوانى** فپۆكەيەك لە بەرزى 7000m، نزمبەۋە بە تىكپاي 450m لە خولەككەدا، فپۆكەيەكەى تر لە بەرزى 375m بەرزەبىتەۋە بە تىكپاي 575m لە خولەككەدا، سستەمىك لە دوو ھاۋكىشەى ھىلى بنووسە پىگابدات بە ەژماركردنى ژمارەى خولەكەكان پىش ئەۋەى ەردوۋ فپۆكەكە لە ەمان بەرزى دابن سستەمەكە بە پوۋنكردنەۋەى شىكاربەكە.

روانين بۆدواۋە

31 ئازاد لە شوپنى فروشتنى كەلوپەلەكانى كارەبا كاردەكات، بەپۆبەرەكەى دوو پىگاي خستەپوۋ بۆ ەلېزاردنى كرىيەكەى:

- 200 000 دىنار + 5 % لەسەرجمى فروشتنەكانى.
- 7 % لەسەرجمى فروشتنەكانى.

ئەۋ نەخشەيە بنووسە بۆ ەژماركردنى كرىيەكە لە ەر بارىكدا وپنەى پوۋنكردنەۋەيەكەى بكىشە.

كام ئاستى فروشتنەكان وادەكات كرىيەكان ۋەك يەكبن؟

روانين بۆپىشەۋە

32 ئەۋ سستەمەى دىت بە پوۋنكردنەۋەى شىكاربەكە كە پىكەاتوۋە لە ھاۋكىشەيەكەى ھىلى و ئەۋى تريان ھىلى نييە.
$$\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = 4x \end{cases}$$

سیستمی لاسهنگه هیلییهکان

Systems of Linear Inequalities



بهشی

4

وانهکان

1. لاسهنگه هیلییه یهک نه‌زانراوه‌کان.
2. لاسهنگه هیلییه دوو نه‌زانراوه‌کان.
3. سیستمی لاسهنگه هیلییه‌کان.

هه‌نگاونان به‌رهو باشتر

زۆر چالاکی ئابوری
بۆدانانی پلانی کرداره‌کانی
پشت به شیکارکردنی
سیستمی لاسهنگه
هیلییه‌کان ده‌به‌ستن.

بهشی 4

لاسهنگه هیللیه يهك نه زانراوهكان

Linear Inequalities in one unknown

وانه‌ی

1

بوچی؟

دهتوانین زۆر له پرسیاره‌کانی ژیا‌نی پۆژانه به به‌کاره‌ینانی لاسهنگه‌کان شیکاریه‌کین. نموونه‌ش بۆ نه‌مه پێژدی چه‌ورییه که پێویسته مرۆف له خواردنیدا تیپه‌ر نه‌کات بۆ نه‌ودی توشی سه‌رنییشه نه‌بی‌ت.



نامانجه‌کان

- نوسینی لاسهنگه‌ی هیللی به يهك گۆراو ده‌نوسیت و به چه‌بری و پوونکردنه‌وه‌یی شیکاریه‌کات.
- لاسهنگه هیللیه ئاویته‌کان به يهك گۆراودا شیکارده‌کات به چه‌بری و پوونکردنه‌وه‌یی.
- پرسیاره‌کان به به‌کاره‌ینانی لاسهنگه‌کان شیکارده‌کات.

زاراوه‌کان

Vocabulary

لاسهنگه

inequality

کۆمه‌له‌ی شیکار

solution set

لاسهنگه‌ی ئاویته

compound inequality

یه‌ك له لیکۆلینه‌وه‌کان ده‌ریخستوه که ئه‌و که‌سانه‌ی بری چه‌وری که‌مه‌که‌نه‌وه له خواردنه‌کانیا‌ندا که‌متر له 20% له به‌های گهرمۆکه‌ی گهرمی خواردنه‌کانیا‌ندا، که‌متر توشی سه‌رنیشان ده‌بن. ئه‌گهر هیمای c بۆ گهرمۆکه‌ی گهرمی خواردنی تاکه که‌س دابنریت پێویسته ژماره‌ی گهرمۆکه‌ی چه‌وری F زیاتر نه‌بی‌ت له 20% ی c . ئه‌مه به پێگه‌ی ده‌سته‌واژه‌ی بیرکاری $F \leq 0.2c$ ده‌رده‌پریت.

نموونه‌ی ئه‌م ده‌سته‌واژه‌یه پێی ده‌وتریت لاسهنگه **Inequality**. (به‌شێوه‌یه‌کی گشتی هه‌ر ده‌سته‌واژه‌یه‌کی بیرکاری ئه‌م هیمایه‌ی $(\leq; <; \geq; >)$ تێدا‌بی‌ت ده‌بی‌ت لاسهنگه‌).

بۆ شیکارکردنی لاسهنگه‌کان سیفته‌ی لاسهنگه له ژماره‌ پاستیه‌کاندا به‌کاربه‌ینه.

جیبه‌جیکردن

خۆراک

Properties of inequality

سیفته‌ته‌کانی لاسهنگه

ئه‌گهر $a \leq b$ ئه‌وا $a + c \leq b + c$

سیفته‌ی کۆکردنه‌وه **Addition Property**

ئه‌گهر $a \leq b$ ئه‌وا $a - c \leq b - c$

سیفته‌ی لێ‌ده‌رکردن **Subtraction Property**

ئه‌گهر $a \leq b$ ئه‌وا $ac \leq bc$ کاتێک $c > 0$

سیفته‌ی لیکدان **Multiplication Property**

ئه‌وا $ac \geq bc$ کاتێک $c < 0$

ئه‌گهر $a \leq b$ ئه‌وا $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$ کاتێک $c > 0$

سیفته‌ی دابه‌شکردن **Division Property**

ئه‌وا $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ کاتێک $c < 0$

ئه‌م سیفته‌تانه‌ی سه‌روه به‌پاستی ده‌میننه‌وه به به‌کاره‌ینانی هیماکانی تری لاسهنگه.

کۆمه‌له‌ی شیکاری لاسهنگه **Solution Set** بریتیه له کۆمه‌له‌ی ژماره‌ پاستیه‌کان که وا ده‌کات لاسهنگه‌که راست بی‌ت به له‌جیاتیدا‌نان.

بۇ نموونە دوو ژمارەى راستى $\frac{1}{2}$ ، -1 دوو شيكارن بۇ لاسەنگەى $6x+1 < 13$ چونكە بە لەجياتيدانانى ھەريەككە لەم دوو ژمارەى لەجياتى نەزانراوى x دوو لاسەنگەى ژمارەىى راستى

$6x+1 < 13$	$6x+1 < 13$	دەداتى:
$6(-1)+1 < 13$	$6\left(\frac{1}{2}\right)+1 < 13$	
$-6+1 < 13$	$3+1 < 13$	
$-5 < 13$	$4 < 13$	راستە

ھەولبەدە ئايا دەتوانيت ھەندى شيكارى تر بۇ لاسەنگەى پيشو بدوزيتەو؟ بە لەجياتيدانان پاسادان بکە.

نمونە 1 لاسەنگەى $4x-5 \geq 13$ شيکاربکە.

شيکار

لاسەنگەى	$4x-5 \geq 13$
سيفەتى کۆکردنەو بەکاربەينە	$4x-5+5 \geq 13+5$
سادەبکە	$4x \geq 18$
سيفەتى دابەشکردن بەکاربەينە	$x \geq \frac{18}{4} = 4.5$

کۆمەلەى شيکار بریتیيەلە کۆمەلەى ژمارە راستیيەکان لە 4.5 کەمتر نەبیت.

لاسەنگەى $-4 < 7-3x$ شيکاربکە. کۆمەلەى ژمارەکە لەسەر تەوهرى ژمارەکان بنویئە.

بازنە بچووکە پکراووکە ئەو دەگەينیت کە 4.5 سەر بە کۆمەلە شيکارەکە

دەتوانيت کۆمەلەى شيکارى لاسەنگەى يەك گۆراو لەسەر تەوهرى ژمارەکان بنویئيت ئەم ويئەى خوارووکە کۆمەلەى شيکارى لاسەنگەى $4x-5 \geq 13$ دەنویئيت.

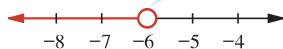


نمونە 2 لاسەنگەى $4-3x > 16-x$ شيکاربکە.

شيکار

لاسەنگەى	$4-3x > 16-x$
سيفەتى کۆکردنەو بەکاربەينە	$4-3x+x > 16-x+x$
سادەبکە	$4-2x > 16$
سيفەتى لیدەرکردن بەکاربەينە	$4-2x-4 > 16-4$
سادەبکە	$-2x > 12$
سيفەتى دابەشکردن بەسەر ژمارەيەكى سالب بەکاربەينە	$\frac{-2x}{-2} < \frac{12}{-2}$
سادەبکە	$x < -6$

بازنە بچووکە بەتالەکە ئەو دەگەينیت کە -6 سەر بە کۆمەلەى شيکار نييە



لاسەنگەى $5-7b > 8-4b$ شيکاربکە. ھەولبەدە

نمری کوٹائی خویندکار له نمری تاقیکردنوه به پڑی دوو سییه له نمری تاقیکردنوه و
 ئرکی مالوه به پڑی سییه دیاریده کریت. له یه کی له خویندگاندا نمری دابان له
 تاقیکردنوه میژودا 90% بیت. کهترین نمری ئرکی مالوه که پیویسته دابان وریبگریت
 چهنه بؤئهوه نمری کوٹائی له 93% کهتر نه بیت.

شیکار

بؤت هیه پیدراوی پرسیاره که بهم شیویهی خوارهوه بنوسیت:

$$\frac{2}{3} \left(\begin{matrix} \text{نمرهکانی} \\ \text{تاقیکردنوه} \end{matrix} \right) + \frac{1}{3} \left(\begin{matrix} \text{نمرهکانی} \\ \text{ئرکی مالوه} \end{matrix} \right) = \begin{matrix} \text{نمری} \\ \text{کوٹائی} \end{matrix}$$

یان $f = \frac{2}{3}(90) + \frac{1}{3}h$ که f نمری کوٹایه، h نمری ئرکی مالوهیه بؤئهوهی f له 93 کهتر نه بیت
 پیویسته h شیکاری ئهم لاسهنگهی خوارهوه پیکینیت:

$$93 \leq \frac{2}{3}(90) + \frac{1}{3}h$$

ئهم لاسهنگه شیکاریکه:

$$93 \leq \frac{1}{3}h + 60 \quad \text{ساده بکه}$$

$$93 - 60 \leq \frac{1}{3}h + 60 - 60 \quad \text{سیفهتی لیدرکردن به کار بهینه}$$

$$33 \leq \frac{1}{3}h \quad \text{ساده بکه}$$

$$3 \times 33 \leq 3 \times \frac{1}{3}h \quad \text{سیفهتی لیکدان به کار بهینه}$$

$$99 \leq h \quad \text{ساده بکه}$$

کهواته پیویسته نمری ئرکی مالوه له 99 کهتر نه بیت بؤئهوهی نمری کوٹائی له 93 کهتر نه بیت

چالاکسی

Exploring Inequalities Graphically دۆزیهوهی شیکاری لاسهنگهکان به روونکردنوهی

1. لاسهنگه $2x - 3 < 3$ شیکاریکه.

2. له ههمان پروتهختی پوتان وینهی دوو راستههیلی $y = 2x - 3$ و $y = 3$ بکیشه.

3. بههاکانی گوپاوی x دیاریبکه که وادهکات خالی سهر به راستههیلی $y = 3$ بهر زربیت لهو
 خالهی که دهکهوینه راستههیلی $y = 2x - 3$.

4. پونیبکهوه چۆن وهلامی پرسیارهکهی پییشو یارمهتیت ددهات بۆ شیکارکردنی لاسهنگهکه.

5. شیکاری لاسهنگه $3x + 2 > 5$ به روونکردنوهی بکه، ههنگاو هکانی روونبکهوه که پپیان
 دهگهیه شیکار.

ئایا ریگاکهی پییشو بۆ شیکارکردنی لاسهنگه $2x - 3 > x + 4$ دهشیت ههروهها بۆ لاسهنگه
 $4 \geq 3x + 1$ روونبکهوه.

خالی جاویدی

بیری رهخنهگر

Compound Inequalities

لاسهنگه ناوینتهکان

دانا نهجامی پشکنینی پڑی شهکری له خویندهکهی خویدا خویندهوه. له سهری نوسرابوو که
 ئهم هیله s پیویسته کهتر نه بیت له 750 ملگم له لیتریکدا و زیاتر نه بیت له 1100 ملگم له
 لیتریکدا. کهواته پیویسته s پاسادانی ههردوو مهرجی $s \geq 750$ و $s \leq 1100$ بکات، واته
 شیکاری هاوبهشی ههردوو لاسهنگه $x \geq 750$ و $x \leq 1100$ ده بیت.

کاتیځ دوو لاسهنگه ده به سترینه وه به ئامرازى يه کتر به ستن «و» \wedge لاسهنگه يه کى ئاویتته مان Compound Inequality ده سته که ویت. یو شیکار کردنى لاسهنگه يه کى ئاویتته که به ئامرازى «و» \wedge به يه که وه به ستراون، ده سیکه به شیکار کردنى هه ریه که له دوو لاسهنگه که به جیا و شیکاره هاویه شه که یان وه ریکره. واته کۆمهله ی شیکار کردنى دوو لاسهنگه ی ئاویتته به ئامرازى به يه کتر به ستنى «و» \wedge بریتیه له کۆمهله ی يه کتر برینى هه ردوو کۆمهله ی شیکارى دوو لاسهنگه که به جیا.

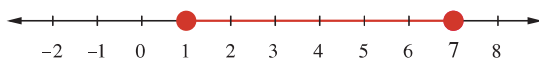
شیکارى $(2x+1 \geq 3) \wedge (3x-4 \leq 17)$ بکه و کۆمهله شیکارى له سهه ته وه رى (هیللى) ژماره کان بنوینه

نمونه 4

شیکار

$$\begin{array}{ll} 2x+1 \geq 3 & \wedge \quad 3x-4 \leq 17 \\ 2x \geq 2 & \wedge \quad 3x \leq 21 \\ x \geq 1 & \wedge \quad x \leq 7 \end{array}$$

کۆمهله ی شیکارى ئەم لاسهنگه ئاویتته به بریتیه له کۆمهله ی به هاکانى x که پاسادانى $1 \leq x \leq 7$ دهکات. و له سهه ته وه رى ژماره کان بهم شیویه ده نوینریت.



ده توانين کۆمهله ی شیکارى نمونه ی پیشو بهم شیوه ده برین $1 \leq x \leq 7$ به شیویه کى گشتى ده توانى $(x > a) \wedge (x < b)$ به شیوه ی $a < x < b$ ده برین.

شیکارى $(-2x+5 \geq 3) \wedge (x-5 > -12)$ بکه و کۆمهله ی شیکاره که له سهه ته وه رى ژماره کان بنوینه.

هه ولیده

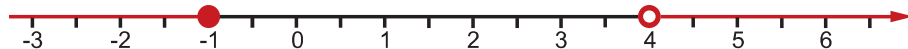
جوړیکى ترى لاسهنگه ئاویتته کان ئەوانه ن که به ئامرازى «یان» \vee دوو لاسهنگه که ده به سترینه وه. کۆمهله ی شیکارى لاسهنگه ی ئاویتته که به ئامرازى «یان» \vee به ستراون ته وه بریتیه له يه کگرتنى هه ردوو کۆمهله شیکارى لاسهنگه کان هه ریه که یان به جیا.

شیکارى $(5x+1 > 21) \vee (3x+2 \leq -1)$ بکه و کۆمهله شیکاره که له سهه ته وه رى ژماره کان بنوینه.

نمونه 5

شیکار

$$\begin{array}{ll} 5x+1 > 21 & \vee \quad 3x+2 \leq -1 \\ 5x > 20 & \vee \quad 3x \leq -3 \\ x > 4 & \vee \quad x \leq -1 \end{array}$$



شیکارى $(2x \leq 5) \vee (7x+1 > 36)$ بکه و کۆمهله ی شیکاره که له سهه ته وه رى ژماره کان بنوینه.

هه ولیده

راهيان

به رده وامبون له بير کاریدا

هه نگاوه کانى نواندى کۆمهله شیکارى لاسهنگه ی $7x-7 > 0$ له سهه ته وه رى ژماره کان روونیکه وه.

- 2 كۆمەلەش شىكارى $7x - 7 > 0$ بەچى جىاوازە لە كۆمەلەش شىكارى $7x - 7 \geq 0$ كۆمەلەش شىكارى $7x - 7 > 0$ بەچى جىاوازە لە كۆمەلەش شىكارى $7x - 7 < 0$.
- 3 ئاىا ھەردوو لاسەنگە $x < 16$ و $-x < -16$ ھەمان كۆمەلەش شىكارىان ھەيە؟ پرونېكەو.
- 4 دەستەواژەي « x ژمارەيەكى سالب نېيە» چۆن دەنوسرېت بە بەكارھېنانى ئامرازەكانى لاسەنگە .

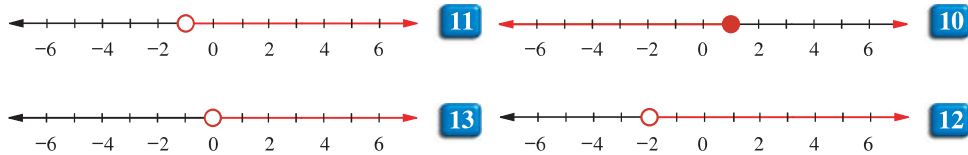
راھىنانى ئاراستە کراو

- 5 لاسەنگە $3x + 1 < 13$ شىكارىكە و كۆمەلەش شىكارەكە لەسەر تەوهرى ژمارەكان بنوینە.
- 6 لاسەنگە $a + 4 < 4a - 11$ شىكارىكە و كۆمەلەش شىكارەكە لەسەر تەوهرى ژمارەكان بنوینە.
- 7 ئەزمونەكان نمرەي كۆتايى خويندكاران لەيەكېك لە خويندنگاكاندا بە نمرەي ئەزمونەكان بەرپژەي $\frac{3}{4}$ و نمرە كۆششى پۆژانە بەرپژەي $\frac{1}{4}$ دياريدەكرېت. ئەگەر نمرەي پامان لە كۆششى پۆژانەدا 92% بېت ئەوا نزمترین نمرەي پامان كە دەبېت وەريگرېت لە ئەزمونەكاندا بۆ ئەوهرى نمرەي كۆتايى 80% كەمتر نەبېت چەندە؟
- 8 شىكارى لاسەنگە $(2x + 3 < 15) \wedge (3x - 7 \geq -13)$ بكە و كۆمەلەش شىكارەكە لەسەر تەوهرى ژمارەكان بنوینە.
- 9 شىكارى لاسەنگە $(4x - 6 < 14) \vee (2x + 4 \leq -10)$ بكە و كۆمەلەش شىكارەكە لەسەر تەوهرى ژمارەكان بنوینە.

جېيەجېكردن

راھىنان و جېيەجېكردن

لاسەنگەيەك بنوسە بگونجى لەگەل شىكارى نویتراو لەسەر تەوهرى ژمارەكان.



ئەم لاسەنگانە شىكارىكە و كۆمەلەش شىكارەكانيان لەسەر تەوهرى ژمارەكان بنوینە.

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| 15 $-5x > 10$ | 14 $5x < 10$ |
| 17 $a + 4 < 10$ | 16 $-5x < -10$ |
| 19 $\frac{1}{5}b - 2 \leq 28$ | 18 $\frac{1}{2}a - 1 \geq -15$ |
| 21 $-5x - 15 \leq 60$ | 20 $-x + 8 < 41$ |
| 23 $-\frac{y}{32} < 2$ | 22 $\frac{y}{2} \leq 10$ |
| 25 $6 - (4a - 3) \geq 8$ | 24 $-6(b + 4) < 12$ |
| 27 $3(4y - 5) < 8y + 3$ | 26 $4y - 12 > 7y - 15$ |
| 29 $-5(3x + 2) \geq 4(x - 1)$ | 28 $-4x - 3 < -6x - 17$ |

شىكارى ئەم لاسەنگە ئاويٹانە بكە و كۆمەلەش شىكارەكانيان لەسەر تەوهرى ژمارەكان بنوینە.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 31 $(x > -4) \wedge (x > 2)$ | 30 $(x > -4) \wedge (x < 2)$ |
| 33 $(x > -4) \vee (x < 2)$ | 32 $(x > -4) \vee (x > 2)$ |

$$(x < -4) \wedge (x < 2) \quad 35$$

$$(x < -4) \wedge (x > 2) \quad 34$$

$$(x < -4) \vee (x > 2) \quad 37$$

$$(x < -4) \vee (x < 2) \quad 36$$

جیبہ جیکردن

38 **کاری خیرخوازی** یه کیک له دامه زراوه خیرخوازه کان بریاریدا که پاکیشانیکی خیرخوازی

ئه نجامبدات له سه ر ئۆتۆمبیلێک که یه کیک له کۆمپانیایان به خشیبووی. دامه زراوه
خیرخوازه که پیشینی ده کرد 1250 بلیت به لایه نی که مه وه بفروشیته به هیوای ده سته و تنی
21 000 000 دینار. که مترین نرخ بۆ بلیتێک چهنده ئه گهر بزانی تیچوونی ریکلامه کان
1500 000 دینار بیته.

39 تیچوونی به ره مه یئانی کالایه کی دیاریکراو بریتییه له $C = 40x + 868$ و داها تی فروشتن

بریتییه له $R = 54x$ ، هیما ی x بریتییه له ژماره ی یه که کانی به ره مه یئراو. C هیما ی
تیچوونی به ره مه می ئه و یه کانه یه.

ا لاسه نگه یه که بنو سه ده سته و تی قازانجه کان ده ربیریت.

ب به لایه نی که م دامه زراوه که پیوسته چهنده یه که بفروشیته بۆ ئه وه ی زیان نه کات.

ج شیکاری لاسه نگه ی پیشو به روونکردنه وه یی بکه.



روانین بۆ دواوه

شیکاری ئه م هاوکیشه پیتیا نه بکه به هه ژمارکردنی نه زانراوی ناو دوو که وانه که به پیی
نه زانراوه کانی تر.

$$A = p + prt \quad 40$$

$$SA = 2ab + 2ac + 2bc \quad 41$$

روانین بۆ پیشه وه

42 دوو جووته ریکخراوی (x, y) بدۆزه وه که شیکاری لاسه نگه ی $2x + 3y < 10$ بن.



لاسه‌نگه هیلییه دوو نه‌زانراوه‌کان

Linear inequalities in two unknowns

بۆچی؟

به‌پێوه‌به‌رانی مه‌لبه‌نده‌کانی شانۆ لاسه‌نگه
هیلییه‌کان به‌کارده‌یتن بۆ دیاریکردنی ژماره‌ی بلیته‌کانی
چوونه‌ژوورده‌وه که به‌ نرخ‌ی جیاجیا ده‌یانفرۆشن بۆ
ده‌ستکه‌وتنی فازانج به‌کارده‌یتن (نموونه 3)

ئامانجه‌کان

- لاسه‌نگه‌ی هیلییه دوو نه‌زانراوه‌کان به پوونکردنه‌وه‌یی شیکارده‌کات.
- پرسیاره‌کان به به‌کاره‌ینانی لاسه‌نگه‌ی هیلییه دوو نه‌زانراوه‌کان شیکارده‌کات.

زاراوه‌کان Vocabulary

لاسه‌نگه‌ی هیلی
Linear inequality
هیلی سنوور
Boundary line

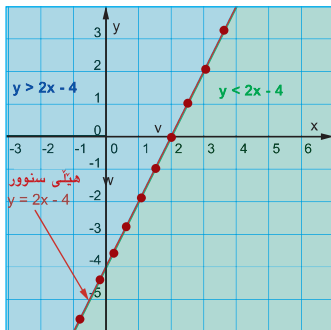
نه‌خشه‌ی هیلی بنچینه‌ی لاسه‌نگه‌ی دوو نه‌زانراو پیکدینیت. لاسه‌نگه‌ی هیلی به دوو نه‌زانراو

Linear inequality in two unknowns بریتیه له ده‌رپرینی په‌یوه‌ندی نیوان دوو گۆراوه‌که یه‌کێ

له‌هیمماکانی لاسه‌نگه‌ی تیدا بیت وه‌ک $y > 2x - 4$. کۆمه‌له‌ شیکاری لاسه‌نگه‌ی هیلی دوو نه‌زانراو

بریتیه له هه‌موو ئه‌و جووته‌ ریکخراوانه‌ی (x, y) که پاسادانی لاسه‌نگه‌که ده‌کهن. هه‌روه‌ها ئه‌و

خالانه‌ی که شیکاره جیاوازه‌کانی لاسه‌نگه‌که ده‌نوینی به‌شیک له پووته‌ختی پۆتانه‌کان پیکدینیت.



که سنورداره به راسته‌هیلێک که پووته‌خته‌که ده‌کاته دوو به‌ش. بۆ

نموونه راسته‌هیلێ $y = 2x - 4$ پووته‌ختی پۆتانه‌کان ده‌کاته دوو

به‌ش وه‌ک له‌وینه‌که‌دا دیاره. پۆتانی هه‌موو خاله‌کان پاسادانی

یه‌کێ له‌به‌شه‌کانی لاسه‌نگه‌ی $y > 2x - 4$ ده‌کات، به‌لام خاله‌کانی

به‌شه‌که‌ی تر پاسادانی لاسه‌نگه‌ی $y < 2x - 4$ ده‌کات به‌شی یه‌که‌م

له‌وینه‌که (به‌شی سه‌ره‌وه) کۆمه‌له‌ شیکاری لاسه‌نگه‌که $y > 2x - 4$

ده‌نوینیت پێی ده‌وتریت (ناوچه‌ی شیکار) بۆئه‌و لاسه‌نگه‌یه. و

راسته‌هیلێ $y = 2x - 4$ پێی ده‌وتریت هیلی سنوور بۆ ناوچه‌ی شیکار.

هیلی سنوور ده‌بیت به‌ خال خال بکیشریت بۆ ده‌رپرینی که خاله‌کانی سه‌ر به‌ناوچه‌ی شیکارن.

بۆ شیکارکردنی لاسه‌نگه‌ی $y > 2x - 4$ هیلی سنوور به‌خال خال بکیشه و ناوچه‌ی سه‌ره‌وه

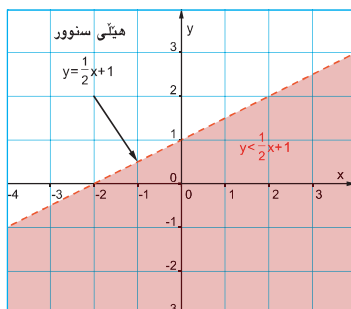
سێبه‌راوی بکه (دیاریبکه که ناوچه‌ی شیکاره).

لاسه‌نگه‌ی $y < \frac{1}{2}x + 1$ شیکارکه.

شیکار

$$y < \frac{1}{2}x + 1 \quad (i)$$

راسته‌هیلێ $y = \frac{1}{2}x + 1$ هیلی سنووره و لارییه‌که‌ی ده‌کاته $\frac{1}{2}$ به‌کترپرینی ئه‌ستوونیه‌که‌ی 1 هه. هیلی



سنوور به‌ خال خال بکیشه. چونکه به‌شیک نییه له ناوچه‌ی شیکار.

ئه‌و ناوچه‌ی ده‌که‌وێته‌ خوار هیله سنووریه‌که په‌نگ بکه.

پاسادان خالیک هه‌لبژیره که‌وتبیتته ناوچه‌ی شیکار، بۆ نموونه

وه‌ک خالی $(0, 0)$. و تاقیبکه‌وه ئایا ده‌بیتته شیکاری لاسه‌نگه‌که.

بۆ نموونه وه‌ک $y < \frac{1}{2}x + 1$

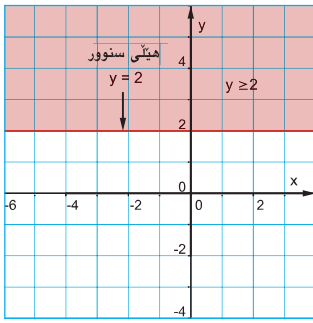
$$0 < \frac{1}{2} \cdot 0 + 1$$

$$0 < 1 \quad \checkmark$$

له‌به‌رئه‌وه‌ی خالی هه‌لبژیراو پاسادانی لاسه‌نگه‌که ده‌کات،

که‌واته ناوچه په‌نگراوه‌که ناوچه‌ی شیکاره.

نموونه



(ب) شیکاری لاسهنگه ی $y \geq 2$ بکه.

دهزانیت که راسته هیلی $y = 2$ راسته هیلیکی ئاسۆیه.

ههنگاوی 1 راسته هیلیک بکیشه به هیلی نهچراو

چونکه هیلی سنوور به شیکه له ناوچهی شیکارهکه.

ههنگاوی 2 ناوچهی سهرووی هیلی سنوور پهنگ

بکه بۆ دیاریکردنی ئه و خالانهی که $y > 2$

ساغکردنه وه خالی $(0,4)$ سهربه ناوچهی شیکاره

چونکه $4 \geq 2$. سهرنجیده که ئه و خالانهی دهکهنه سه ره هیلی سنوور و یان

سهرووی، شیکاری لاسهنگه که دهنوینن به بی پهاوکردنی به های x .

ههولبده

به پروونکردنه و بیی ئه م لاسهنگانه شیکاریکه، $y \geq 3x - 2$ و $y < -3$.

ئه گهر هاوکیشهی هیلی سنوور به شیوهی لاری - یه کترپین نهوسرابوو دهتوانین خالیکی

تاقیکردنه وه وهر بگرین که نه که وتبیته سه ره هیلی سنوور که بۆ دیاریکردنی که کام ناوچه ده بی

سیبه راوی بکهین. ئه گهر خاله که پاسادانی لاسهنگه که ی کرد ئه و ئه و ناوچهیه پهنگ بکه، ئه گهر

نا ئه و ناوچه که ی تر پهنگ بکه.

2

نموونه

ئه م لاسهنگه یه شیکاریکه به به کارهینانی یه کترپینی له گه ل دوو ته وه ری پۆوتانه کان. $2x + 3y \geq 6$

شیکار

ههنگاوی 1 یه کترپینه کان دیاریبکه.

له جیات x سفر دابنی و له واییدا و له جیات y سفر دابنی بۆ دۆزینه وه ی یه کترپینی هیلی

سنوور له گه ل ته وه رکاندان.

یه کترپین له گه ل ته وه ری دووهم (ستوونی) یه کترپین له گه ل ته وه ری یه که م (ئاسۆیی)

$$2x + 3y = 6$$

$$2x + 3 \times 0 = 6$$

$$2x = 6$$

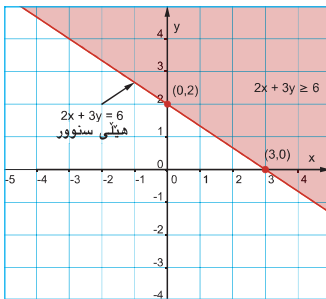
$$x = 3$$

$$2x + 3y = 6$$

$$2 \times 0 + 3y = 6$$

$$3y = 6$$

$$y = 2$$



ههنگاوی 2 هیلی سنوور بکیشه که بریتییه له و

راسته هیلی به دوو خالی $(0,2)$ و $(3,0)$ داده پوات،

ئه م راسته هیله به هیلی نهپساو بکیشه له به ره وه ی

به شیکه له ناوچهی شیکار.

ههنگاوی 3 ئه و ناوچهیه دیاریبکه که پیوسته پهنگی بکه ی.

تاقیکه وه ئایا خالی $(0,0)$ سهربه ناوچهی شیکاره. له به ر

ئه وه ی لاسهنگه ی $0 + 0 \geq 6$ چه وته که واته خاله که سهربه ناوچهی

شیکار نییه. که واته ده بیت ناوچهی سه ره وه ی هیلی سنوور پهنگ بکه ییت.

ههولبده به پروونکردنه و بیی لاسهنگه ی $3x - 4y > 12$ شیکاریکه به به کارهینانی

یه کترپینی ئاسۆیی و ستوونی.



له شانۆگهریه کدا بلیتی چوونه ژووره و دی 8000 دینار و بلیتی منداڵان 5000 دینار. له ناههنگیکدا به پڕۆده بهری شانۆ 240 000 دینار له ههر شانۆگهریه که خرچ دهکات. ئایا ده بیټ چهند بلیتی چوونه ژووره و بفروشیټ له ههر جوړیکیان بو به دهسته پێنانی قازانج؟ به پڕۆده بهرکه 20 بلیتی منداڵانی فروشت ئایا ده بیټ چهند بلیتی گهوران بفروشیټ بو به دهسته پێنانی قازانج.

1. له پرسیاره که تیبه

شیکاری پرسیاره که له دوو بهش پیکدیټ، نویسی لاسهنگهیه که شیکاره که ی وهلامی بهشی یه که می پرسیاره که یه و شیکارکردنی ئهم لاسهنگهیه به پرونکردنه و هیه ئینجا دیاریکردنی ژماره ی بلیتی گهورهکان که پێویسته بفروشیټ کاتی 20 بلیتی منداڵانی فروشتوه.

پیداوه گرنگهکان بنووسه:

- دوو جوړ پلیتمان هیه گهورهکان 8000 دینار و منداڵان 5000 دینار
- نابیت کۆی پلیتهکانی فروشارون نرخه که یان له 240 000 دینار که متربیټ.

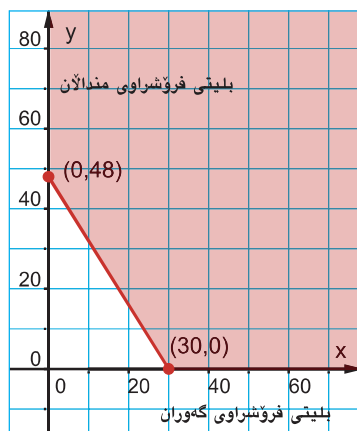
2. پلان دابنی

x به کار بهیټه له جیاتی ژماره ی بلیتی گهورهکان و y به کار بهیټه له جیاتی بلیتی منداڵان. لاسهنگهیه که بنووسه که پرسیاره که ده نویټ.

نرخه بلیتی گهوره	×	ژماره ی بلیتی گهوره	+	نرخه بلیتی منداڵ	×	ژماره ی بلیتی منداڵ	≥	سهرجه م
8000	×	x	+	5000	×	y	≥	240 000

دهتوانین پرسیاره که بهم لاسهنگهیه بنویټین $8000x + 5000y \geq 240 000$ یان $8x + 5y \geq 240$

3. شیکار



یه کتر پینی هیلی سنوور له گهال ههردوو تهوهرهکان دیاریبکه $8x + 5 \times 0 = 240$ $8 \times 0 + 5y = 240$
 $x = 30$ $y = 48$
 هیلی سنووره که ی بکیشه که بریتییه له و پاسته هیلی به دوو خالی $(0, 48)$: $(30, 0)$ دا ده پوات. ئهو ناوچه یه سیبه راوی بکه که بریتییه له هه موو ئهو خالانه ی ده که ونه چاره گی یه که م و له سه روی هیلی سنووره و هه ن چونکه ژماره ی بلیتهکان سالب نابن. ئه گه ژماره ی بلیتهکانی منداڵان که فروشارون 20 پلیټ بیټ.

له جیاتی دابنی

ساده بکه

$8x + 5 \times 20 \geq 240$ $8x + 100 \geq 240$ $8x \geq 140$ که واته $x \geq 17,5$ ده بیټ ژماره ی بلیتهکان ژماره یه کی ته و ابیټ.

که واته نابیت ژماره ی بلیتهکانی گهورهکان له 18 بلیټ که متربیټ.

4. ساغکردنه وه

$$18 \times 8000 + 20 \times 5000 = 244000$$

هەولبەدە بەرپۆهەبەری بنگەیهکی پۆشنبیری برپاریدا دوو جۆر دیاری پێشکەشی ئەندامەکانی بکات. نرخى دیارییهك له جۆرى يهكەم 125 000 دیناره و نرخى جۆرى دووهم 40 000 دیناره. کاتی بەرپۆهەبەر 1 500 000 دیناری دانابێت بۆ بەخشینی دیاری. ئایا دەتوانیت لەهەر جۆریك چەند دانە بکڕیت؟ ئەگەر 4 پاداشتی لەجۆرى يهكەم بەخشی چەند لەجۆرى دووهم دەتوانیت ببەخشی.

راھێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

- 1 بەراورد لەنیوان دوو بازنەى بەتال و پێدا بکە لەنواندنی کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەى هیلى بەیەك نەزانراو بە پونکردنەوهی هەروەها بەراورد لەنیوان دوو هیلى سنوورى خال خال و نەپساو لە کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەى هیلى بەدوو نەزانراودا بە پونکردنەوهی بکە.
- 2 باسی ناوچە شیکاری لاسەنگەى $x \geq 4$ بکە.
- 3 پونبیکەوه ئایا دەتوانی خالی $(0, 0)$ بەکاربهێنیت وەك خالی تاقیکردنەوه بۆ دیاریکردنی ناوچەى شیکار که پێویستە پەنگ بکەین لە شیکارکردنی لاسەنگەى $3x + 5y \leq 0$.

راھێنانی ئاراستە کراو

4 زاراوەکان پونبیکەوه چۆن دەکریت راستەهێلى $y = 3x - 4$ ببیتە هیلى سنوورى.

ئەم لاسەنگانە بەروونکردنەوهی شیکاریکە.

$$y > -4 \quad 5 \quad y \leq 2 \quad 6$$

$$y \geq x - 3 \quad 7 \quad y < -\frac{1}{3}x + 2 \quad 8$$

ئەم لاسەنگانە بە بەکارهێنانی یەکتەریپینی ناسۆی و ستوونی شیکاریکە.

$$3x + 2y > 12 \quad 9 \quad 5x - 2y \leq 20 \quad 10 \quad -4x + 5y < -20 \quad 11$$

12 بەکاربردن سۆزان 17 000 دیناری پێیە بۆ کڕینی دوو جۆر پاکەتى قاوه که ئامادەکردنی

ئاسانە. جۆرى يهكەم دەنکۆڵەکانی درشتن نرخەکەى 2290 دینار و جۆرى دووهم دەنکۆڵەکانی وردن و نرخەکەى 3750 دینار. هێمای x بۆ ژمارەى پاکەتەکانی جۆرى يهكەم، و هێمای y بۆ ژمارەى پاکەتەکانی جۆرى دووهم بەکاربهێنە.

- أ لاسەنگەیهك بنووسە كەپرسیارەكە بنوینیت و بە پونکردنەوهی شیکاری بکە بۆ دیاریکردنی ژمارەى ئەو پاکەتە قاوانەى که سۆزان دەتوانیت لەهەر جۆریکیان بیانکڕیت.
- ب چەند پاکەت لەجۆرى يهكەم دەتوانی بکڕی ئەگەر زانیت 3 پاکەتى لە جۆرى دووهم کڕیوه؟

13 خويندنگاكان خويندكارانى پۇلى يازدەيەمى وئۆزەيى ھەلسان بەفرۆشتىنى دوو جۆر لە تابلۇى ھونەرى بۇ كۆكردنەۋەى برە پارەيەك كەمتر نەبىت لە 280 000 دىنار. جۆرى يەكەم 1750 دىنار قازانچ دەكات جۆرى دوووم 1250 دىنار قازانچ دەكات. ھىماى x بۇ ژمارەى تابلۇيەكانى جۆرى يەكەم و ھىماى y بۇ ژمارەى تابلۇيەكانى جۆرى دوووم دابنى.

- ا** لاسەنگەيەك بنووسە ناوەرپۇكى پرسىارەكە بنوئىت و بە پرونكردنەۋەيى شىكارى بكة بۇ دىاريكردىنى ژمارەى ئەو تابلۇيانەى كە دەتوانن خويندكارەكان بىفرۆشن لەھەر جۆرىكيان.
- ب** خويندكارەكان 100 تابلۇى ھونەرى لەجۆرى دوووم و 50 لەجۆرى يەكەميان فرۆشت ئايا خويندكارەكان ئامانجيان بەدەستەيئاو.

شىكارى ھەر لاسەنگەيەك بەپىيى y بكة و پاشان بە پرونكردنەۋەيى شىكارىبكة.

$$14 \quad \frac{1}{2}(6x-2y) \geq 4 \quad 15 \quad -\frac{3}{5}x + y \geq 2 \quad 16 \quad 3(3x-y) > -12$$

راھىيان و جىيەجىكردن

بەپىگى پرونكردنەۋەيى شىكارى ئەم لاسەگانە بكة.

$$17 \quad y \geq 6 \quad 18 \quad y < x + 4 \quad 19 \quad y > -\frac{2}{5}x - 3$$

ئەم لاسەنگانە بە بەكارھىئانى يەكترېرىنى ئاسۇيى و ستوونى شىكارىبكة.

$$20 \quad 4x + 2y \geq 8 \quad 21 \quad 3x - 6y < 12$$

22 بازاركارى تىچوونى پىكلام لە پۇژنامەيەكى ناوخۇ 20 000 دىنارە لە پۇژىكدا و تىچوونى لە رادىۋدا 50 000 دىنارە بۇ ھەر خولەكك. ئەگەر بودجەى دابىن كراو بۇ پىكلام لە يەكى لە دەزگاكان يەك مليۇن دىنار بىت. ھىماى نەزانراوى x بۇ ژمارەى پۇژەكانى پىكلام لە پۇژنامەدا و نەزانراوى y بۇ ژمارەى خولەكەكانى پىكلام لە رادىۋدا دابنى و لاسەنگەيەكى ھىلى بنووسە كە پرسىارەكە بنوئىت ئىنجا شىكارى بكة بە پرونكردنەۋەيى.

23 مۇبايل سەردەم دوو جۆر لە كارتى مۇبايل دەفرۆشىت يەكيان بە 8000 دىنارە و ئەويتريان بە 12 000 دىنار. بە بەھاي 200 000 دىنار كارتى لەلا ھەيە. ھىماى x بۇ ژمارەى كارتى جۆرى يەكەم و ھىماى y بۇ ژمارەى كارتى جۆرى دوووم دابنى.

- ا** لاسەنگەيەكى ھىلى بنووسە كە پرسىارەكە بنوئىت و بە پرونكردنەۋەيى شىكارىبكة.
- ب** سەردەم 10 كارتى لە جۆرى 8000 دىنارى فرۆشت چەند كارت دەتوانىت لەجۆرەكەى تر بفرۆشىت؟



شىكارى ئەم لاسەنگانە بەيىيى y بىكە و پاشان بە پوونكردنهوئى شىكارەكەيان بدۆزەو.

$$-4y < 4(3x - 5) \quad 24 \quad -3(-10x + 2y) \geq 24 \quad 25 \quad -\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y \leq -1 \quad 26$$

بە پوونكردنهوئى شىكارى ئەم لاسەنگانە بىكە.

$$6x + 3y < 0 \quad 29 \quad y - 5 \geq 4(x - 2) \quad 28 \quad -4y > 10x - 20 \quad 27$$

$$x \leq 4 \quad 32 \quad \frac{9-3y}{2} \geq 6x \quad 31 \quad y + \frac{3}{4} \leq \frac{5}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad 30$$

$$x > -2 \quad 35 \quad 2x - 5y \leq -4x + 15 \quad 34 \quad 4x - 5y < 7x - 3y \quad 33$$

36 خويىندىكاكان تىيى بىركارى لەيەكىك لەئامادەيىيە نمونەيىيەكان ئاھەنگىكى گۆرانى

سازدەكەن بۆ كۆكردنهوئى بېرىك پارە كە لە 600 000 دىنار كەمتر نەبىت بۆ كېرىنى ئامپىرىكى كۆپىكرىن تايىبەت بە تىپەكە. سەرۆكى تىپەكە فەرمانىدا كە بلىتى چۈنەژورەوئى پۆژىك پېش ئاھەنگەكە بە 5000 دىنار و نرخی 6000 دىنار بىت ئەگەر لەبەر دەرگا كېرەبىت.

أ ھىماي x بۆ ژمارەى بلىتەكانى پۆژىك پېش ئاھەنگەكە فروشراون دابنى و ھىماي y دابنى بۆ ژمارەى بلىتەكانى لەبەر دەرگا فروشراون. لاسەنگەيەكى ھىلى بنووسە كە پرسىارەكە بنوئىت و بە پوونكردنهوئى شىكارىيەكە.

ب ئەگەر بلىتەكانى پېش ئاھەنگەكە بەپۆژىك فروشراون 30 دانە بىت ئايا ژمارەى ئەو بلىتانەى لەبەر دەرگا پىويستە بفروشرىت چەندە بۆئەوئى تىپەكە بە ئامانجى خۇى بگات؟

37 كۆكردنهوئى پارە خويىندىكارانى پۆلى يازدەيەم لەكاتى ئەنجامدانى يارىيەكانى باسكە

ھەستان بە فروشتىنى پىتزا و ساردەمەنى بۆئەوئى بېرى 150 000 دىنار كۆپكەنەوئى بۆ كېرىنى دىارىيەك بۆ مامۇستاي بىركارى بەبۆنەى كۆنايى سالى خويىندىن، ئەگەر لەھەر پىتزاىەك 1250 دىنار و لەھەر ساردەمەنىيەك 500 دىنار قازانچ كەن. ھىماي x بۆ ژمارەى پىتزاكان و y بۆ ژمارەى ساردەمەنىيەكان دابنى.

أ لاسەنگەيەكى ھىلى بنووسە كە پرسىارەكە بنوئىت.

ب خويىندىكارەكان 75 پىتزا و 150 ساردەمەنىيان فروشت. ئايا دەتوانن دىارىيەكە بىكرن؟

38 بىرى رەخنەگر نرخی بلىتى چۈنە ژورەوئى پاركىكى ئازەلان 5000 دىنارە بۆگەوران و

2000 دىنارە بۆ مىندالان. بەھاي پلىتە فروشراوكان لە پۆژىكى ھەفتەدا لە 300 000 دىنار

زىاتربوو. دلىشادو كاو ھەريەكەيان لاسەنگىكى ھىلىيان نووسى بۆ نواندىن پرسىارەكەو

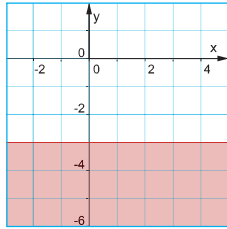
شىكارىكردىن بە پوونكردنهوئى. دلىشاد ھىماي نەزانراوى x بۆ ژمارەى پلىتەكانى گەوران

دانا بەلام دلىر ھىماي x بۆ ژمارەى بلىتەكانى مىندالان دانا بۆيە ھەردوو ويئە

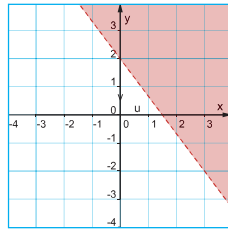
پوونكردنهوئىيەكەى كە ئەو دوو خويىندىكارە كىشايان بۆ شىكارەكە جىاوازيوون؟ ئايا يەكىكىيان

ھەلەى كىردووئى؟ ئەگەر بە بەلى وەلامتدايەوئى كاميانە؟

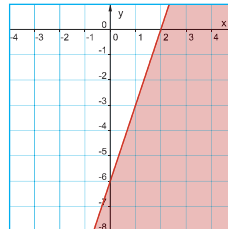
لاسهنگه يه كى هيللى دوونه زانراو بۆ ههريهك لهه وینه پروونكر دهنه وه يه يانهى خوار دوه بنووسه.



41



40

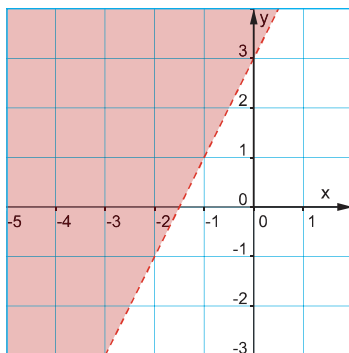


39

42 **بیری رهخنهگر** بهراوورد له نیوان شیکاری پروونكر دهنه وه یی ههردوو لاسهنگه ی
 $30y < 90 + x$ و $30y + x < 90$ بکه له چیدا پیکهچن و له چیدا جیاوازن؟

43 یانهى زانکۆ ئاههنگىكى ئیواره خوانى سالانه لههۆلى بۆنهكان پیکهخات. دوو جوړ میزیان داناوه بازنه یی و لاکیشه یی که 8 کورسی لهدهوری میزه بازنه ییهكان و 6 کورسی لهدهوری میزه لاکیشه ییهكان دانراون. هیماى x بۆ ژماره ی میزه بازنه ییهكان و هیماى y بۆ ژماره ی میزه لاکیشه ییهكان دابنى.

- ا لاسهنگه يه كى هيللى بنووسه كه پرسياره كه بنوینیت، ئه گهر ژماره ی کورسیه يه كانى پیویست له 220 كه متر نه بن و لاسهنگه كه به پروونكر دهنه وه یی شیکاریه كه.
- ب بۆ پێك و پێكى هۆله كه وا باشه له 300 کورسی زیاتر دانه نریت. لاسهنگه يه كه بنووسه كه ئهم مهرجه بنوینیت و لاسهنگه كه به پروونكر دهنه وه یی شیکاریه كه.
- ج بهراوورد له نیوان دوو وینه پروونكر دهنه وه ییه كه بکه (له چیدا جیاوازن).



44 كام لاسهنگه ئهم وینه یه ی بهرام بهر دهنوینیت؟

- ا $y < 2x + 3$ ()
 ب $4x - 2y < -6$ ()
 ج $y \geq 2x + 3$ ()
 د $4x + 2y > 6$ ()

45 كام خال سه ربه ناوچه ی شیکاری لاسهنگه ی
 $5x - 3y < 30$ نین.

- ا $(0, 0)$ ()
 ب $(3, -5)$ ()
 ج $(-5, 3)$ ()
 د $(-3, 5)$ ()

46 كام لاسهنگه هاوتای لاسهنگه ی $7x - 3y \geq 4$ (هه مان ناوچه ی شیکاریان هه یه).

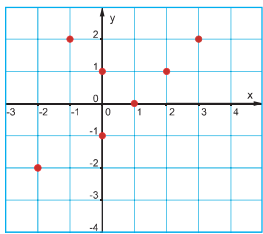
- ا $y \leq \frac{7}{3}x - \frac{4}{3}$ ()
 ب $y \leq -\frac{7}{3}x + \frac{4}{3}$ ()
 ج $y \geq -\frac{7}{3}x - \frac{4}{3}$ ()
 د $y \geq \frac{7}{3}x + \frac{4}{3}$ ()

47 كام لهه دوو خالانه ههردوو به كتر پینه كانى ئاسویى و ستوونى هیللى سنوورى لاسهنگه ی
 $y \leq 3x - 9$ دهنوینیت؟

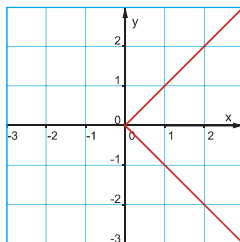
- ا $(0, 9)$ و $(3, 0)$ ()
 ب $(0, 3)$ و $(-9, 0)$ ()
 ج $(0, 9)$ و $(-3, 0)$ ()
 د $(0, -9)$ و $(3, 0)$ ()

روانين بۆدواوه

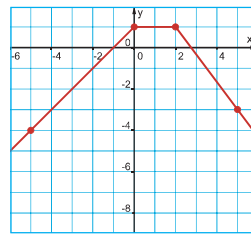
تاقىكرىدنه وهى راسته هيللى ستوونى به كار بهيئنه بۆ ئه وهى بزانى كام لهم ويئنه روونكرىدنه وهى ياننه نه خشه دهنويئيت. (به شه كانى پيشوو)



50



49



48

به شيوهى لارى - يه كتر پرين هاوكيشه مى نهو راسته هيلله بنووسه كه به خالى $(1, -7)$ دا ده پروات و:

51 به خالى $(1, 3)$ دا ده پروات.

52 لاريه كهى 0.25

روانين بۆپيشه وه

53 وهستاندى ئۆتۆمبيل له گهراج بۆ ماوهى 8 خولهك به 250 ديناره و بۆ ماوهى 20 خولهك به 500 ديناره ئهوپه پرى ماوهى وهستاندى ئۆتۆمبيل 3 كاتر ميژه. كاتى شوان ئۆتۆمبيله كهى وهستاند زانى كه ژمي ريارى گهراجه كه 37 خولهكى به خورايى پى به خشى. كام لهم پارچه پارانهى خواره وه به كارديت بۆ وهستاندى ئۆتۆمبيله كهى شوان بۆ ماوهى 3 كاتر ميژه.

ا) 3 پارچهى 250 دينارى و 9 پارچهى 500 دينارى.

ب) 13 پارچهى 250 دينارى و 2 پارچهى 500 دينارى.

ج) 8 پارچهى 250 دينارى و 4 پارچهى 500 دينارى.

د) 5 پارچهى 250 دينارى و 5 پارچهى 500 دينارى.

سیستمی لاسه‌نگه هیلّیه‌کان

System of Linear Inequalities

بۆچی؟

دۆزهره‌وانی جه‌مه‌سهری خواروو سیستمی لاسه‌نگه هیلّیه‌کان به‌کار دێنن بۆ دیاریکردنی نه‌و خێرایه‌ی پێویسته‌ پێی بجوولین تا تووشی که‌ش و مه‌وای دژوار نه‌بنه‌وه‌ (نموونه 2).

نامانج

• سیستمی لاسه‌نگه

هیلّیه‌کان به

پوونکردنه‌وه‌یی شیکار ده‌کات.

زاراوه‌کان

Vocabulary

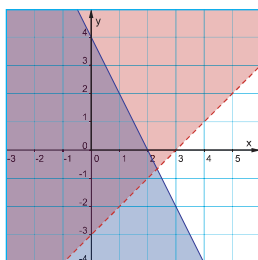
سیستمی لاسه‌نگه هیلّیه‌کان

System of linear

inequalities

کاتی له‌ پرسپاریکا ده‌سته‌واژه‌ی (گه‌ره‌تر له‌) یان (پتر نییه‌ له‌) به‌کار دێت، ده‌توانیت لاسه‌نگه یان سیستمی لاسه‌نگه هیلّیه‌کان به‌کار بهێنیت.

سیستمی لاسه‌نگه هیلّیه‌کان **System of linear inequalities** بریتیه‌ له‌ دوو لاسه‌نگه‌ی هیلّی یان زیاتر که‌ هه‌مان ژماره‌ی نه‌زانراویان تێدایه‌. به‌زۆری شیکاری سیستمی لاسه‌نگه‌ی هیلّیه‌کان له‌ ژماره‌یه‌کی ناکۆتا خاڵ پێکدێت که‌ ده‌توانیت به‌ پوونکردنه‌وه‌یی بنوێنیت به‌ سێ به‌راویکردنی ناوچه‌یه‌ک له‌ پروته‌ختی ته‌وه‌ره‌کان. کاتی هه‌ریه‌ک له‌ لاسه‌نگه‌کان به‌ پوونکردنه‌وه‌یی ده‌نوێنیت له‌ پروته‌ختی پۆتانه‌کان، ناوچه‌ په‌نگراوه‌کان یه‌کتهده‌پن بۆ دیاریکردنی ناوچه‌ی هاوبه‌ش له‌نیوانیان. ناوچه‌ی شیکاری سیستمه‌که‌ بریتیه‌ له‌و ناوچه‌ هاوبه‌شه‌.



به‌ پوونکردنه‌وه‌یی ئەم سیستمه‌ دوو لاسه‌نگه هیلّیه‌ شیکاربکه‌.

شیکار

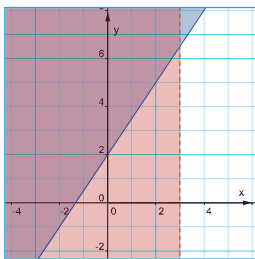
$$\begin{cases} y \leq -2x + 4 & (i) \\ y > x - 3 \end{cases}$$

له‌ لاسه‌نگه‌ی یه‌که‌م وێنه‌ی راسته‌هیلّی $y = -2x + 4$ به‌کێشه‌ به‌ هیلّیکی نه‌پساو و ناوچه‌ی ژێره‌وه‌ی سێ به‌راوی بکه‌. له‌ لاسه‌نگه‌ی دووهم وێنه‌ راسته‌هیلّی $y = x - 3$ به‌کێشه‌ به‌ هیلّیکی خاڵ خاڵ و ناوچه‌ی سه‌رووی په‌نگ بکه‌. یه‌کتهده‌پنی دوو ناوچه‌ سێ به‌راویکه‌ ده‌بێت ناوچه‌ی شیکاری سیستمی دوو لاسه‌نگه هیلّیه‌که‌.

پاسادان خاڵێک له‌ خاڵه‌کانی هه‌ر ناوچه‌یه‌ک له‌ پروته‌ختی پۆتانه‌کان تاقیبه‌وه‌.

ناوچه	خاڵ	$y \leq -2x + 4$	$y > x - 4$
بۆ لای چه‌پ	(0,0)	$0 \stackrel{?}{\leq} -2(0) + 4$ $0 \stackrel{?}{\leq} 4$ ✓	$0 \stackrel{?}{>} 0 - 4$ $0 \stackrel{?}{>} -4$ ✓
بۆ لای راست	(4,0)	$0 \stackrel{?}{\leq} -2(4) + 4$ $0 \stackrel{?}{\leq} -4$ ✗	$0 \stackrel{?}{>} 4 - 4$ $0 \stackrel{?}{>} 0$ ✗
بۆ سه‌ره‌وه	(2,2)	$2 \stackrel{?}{\leq} -2(2) + 4$ $2 \stackrel{?}{\leq} 0$ ✗	$2 \stackrel{?}{>} 2 - 4$ $2 \stackrel{?}{>} -2$ ✓
بۆ خواره‌وه	(2,-2)	$-2 \stackrel{?}{\leq} -2(2) + 4$ $-2 \stackrel{?}{\leq} 0$ ✓	$-2 \stackrel{?}{>} 2 - 4$ $-2 \stackrel{?}{>} -2$ ✗

خاڵی یه‌که‌م (0,0) ته‌نها خاڵێکه‌ سه‌ربه‌ ناوچه‌ی شیکاری سیستمی دوو لاسه‌نگه‌یه‌.



$$\begin{cases} y \geq \frac{3}{2}x + 2 \\ x < 3 \end{cases} \quad \text{(ب)}$$

له لاسهنگه یه كه م وینه ی راسه هیلی $y = \frac{3}{2}x + 2$ به هیلیکی نه چپا و بکیشه و ناوچه ی سه روه ی رهنګ بکه. و له لاسهنگه ی دوهمدا وینه ی راسه هیلی $x = 3$ به هیلیکی خال خال بکیشه و ناوچه ی لای چپ ی سیبه راوی بکه. یه کتر برینی دو ناوچه رهنګ راوه که ده بیته ناوچه ی شیکار بو سیستمی لاسهنگه هیلییه کان.

$$x < 3 \quad y \geq \frac{3}{2}x + 2$$

$$\begin{aligned} -4 < 3 \quad \checkmark \quad 0 &\geq \frac{3}{2}(-4) + 2 \quad (-4, 0) \\ 0 &\geq -4 \quad \checkmark \end{aligned}$$

تاقیکه وه نه گهر پووتانه که ی شیکاریت بو سیستمه که

له بهر نه وه ی خاله که سر به ناوچه ی شیکاره که یه، که واته ناوچه ی یه کتر برینه که ده بیته ناوچه ی شیکار.

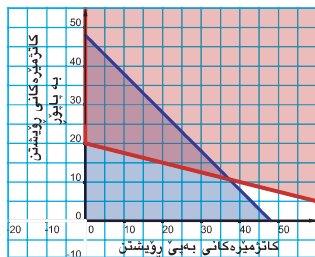
هه ولبد به روونکردنه وه یی نهم سیستمه دوو لاسهنگه هیلییه شیکاریه که.

$$\begin{cases} y \leq 4 \\ 2x + y < 1 \end{cases} \quad \text{ب} \quad \begin{cases} x - 3y < 6 \\ 2x + y > 1.5 \end{cases} \quad \text{ا}$$

جیبه جیکردن له سه ر هلمه ته کانی دوزینه وه

هه لمه تی دوزینه وه ی جه مسه ره که له دوو ری 240 km له بنکه که یه وه بوو. ده زگی که شناسی رایگه یانده له ماوه ی 48 کاترمیر باهوژی به فر هه لده کات. ده سته ی هه لمه ته که پیوسته به خیرایی به سواری پا پوړی سه هوّل رامال بجولین پاشان به پی برؤن بوئنه وه ی بگه نه بنکه که یان. نه وپه پی خیرایی پا پوړه که 12 km/h به لام نه وپه پی خیرایی به پی رویشتن و پاکیشانی که لویه له کانیان له 3 km/h تیپه ناکات. سیستمی لاسهنگه هیلییه کان بنووسه و به روونکردنه وه یی شیکاریه که بو دیاری کردنی ماوه ی سوار بوونی پا پوړه که و رویشتنیان به پی پیش گه یشتنیان به بنکه که یان.

شیکار



هیما ی x بو ژماره ی کاترمیره کانی به پی رویشتن و y بو ژماره ی کاترمیره کانی سوار بوونی پا پوړه که به کار به یته به مرجه ی سه رجه می دوو نه زانراوه که له 48 کاترمیر زیاتر نه بیته، لاسهنگه یه که مان ده داتی وه $x + y \leq 48$ له لایه کی تره وه نه و دوو رییه ی که ده یبرن نابیت له 240 km زیاتر بیته، لاسهنگه یه که مان ده داتی وه

$$\begin{cases} x + y \leq 48 \\ 3x + 12y \geq 240 \end{cases}$$

وینه ی راسه هیلی $3x + 12y = 240$ به هیلیکی نه پسو و بکیشه و ناوچه ی سه رووی رهنګ بکه دوا یی وینه ی راسه هیلی $x + y = 48$ بکیشه به هیلیکی نه پسو و ناوچه ی خواره وه ی رهنګ بکه. ناوچه ی شیکار بریتییه له ناوچه ی یه کتر برینی هه ردو و ناوچه رهنګ کراوه که.

ساغبه که وه خالی (15, 25) له ناوچه یه کتر برینه که تاقیکه وه و پووتانی نهم خاله شیکاری هه ریه که له دوو لاسهنگه که و سیستمه که پیکدینیت به مهش.

$$\begin{aligned} 3x + 12y &\geq 240 & x + y &\leq 48 \\ 3(15) + 12(25) &\geq 240 & 15 + 25 &\leq 48 \\ 345 &\geq 240 \quad \checkmark & 40 &\leq 48 \quad \checkmark \end{aligned}$$

هەولبەدە سۆلاڤ بابۆلەى گۆشت و بابۆلەى مريشك دەفرۆشیت. 40 كولىڤرى پيیه واتا ناتوانیت له 40 بابۆله زياتر له هەردوو جۆرهكه پيكهوه بفرۆشیت. كه بابۆلهیهكى گۆشت 2 000 دینار قازانج دهكات، و بابۆلهیهكى مريشك 2 500 دینار قازانج دهكات، ئەو دهیهوێت 90 000 دینار قازانج بكات. سسته‌مى لاسهنگه هیلپیه‌كان بۆ نواندنى پرسپاره‌كه بنووسه، پاشان به پرونكرده‌وه‌یى شىكارى بكه.

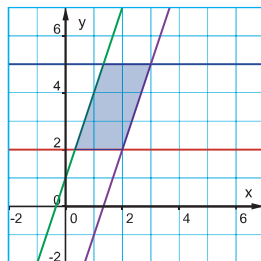
ده‌گونجیت سسته‌مى لاسهنگه هیلپیه‌كان دوو لاسهنگه‌ى زياتر تیدايت.

جیبه‌جیكردى نه‌نداره‌یى

نموونه

3

سیستمى ئەم لاسهنگه هیلپیه‌كان به پرونكرده‌وه‌یى شىكارىكه و جۆرى ناوچه‌ى شىكاره‌كه دیارىكه.



$$\begin{cases} y \leq 5 \\ y \geq 2 \\ y \leq 3x + 1 \\ y \geq 3x - 4 \end{cases}$$

شىكار

به‌هیلپى نه‌پساو وینه‌ى راسته‌هیلپى $y = 5$ و راسته‌هیلپى $y = 3x + 1$ بكیشه و ئەو ناوچه‌یه‌ى ده‌كه‌وێته ژێر هه‌ریه‌كه‌یان رهنگبكه.

به‌هیلپى نه‌پساو وینه‌ى راسته‌هیلپى $y = 2$ ، راسته‌هیلپى $y = 3x - 4$ بكیشه و ئەو ناوچه‌یه‌ى ده‌كه‌وێته سه‌رووى هه‌ریه‌كه‌یان رهنگبكه، ناوچه‌ى شىكارى سیستمه‌كه ناوچه‌یه‌كه‌تر پینه‌كه‌یه‌ كه شیوه‌ى چوارلایه. تیبینیكه‌ كه دوو راسته‌هیلپى $y = 5$ ، $y = 2$ ته‌ریبن دوو راسته‌هیلپى ئاسۆیین و ده‌توانین بڵێن هه‌مان لارییان هه‌یه (به‌یه‌كه‌تر ته‌ریبن) و دوو راسته‌هیلپى $y = 3x - 4$ ، $y = 3x + 1$ ته‌ریبن چونكه هه‌مان لارییان هه‌یه.

ناوچه‌ى شىكار چوارلایه‌كه لا به‌رامبه‌ره‌كانى به‌یه‌كه‌تر ته‌ریبن كه‌واته لاته‌ریبه.

هەولبەدە به پرونكرده‌وه‌یى سیستمى ئەم لاسهنگه هیلپیه‌كان شىكارىكه و جۆرى ناوچه‌ى شىكار دیارىكه.

$$\begin{cases} y \leq 4 \\ y \geq -1 \\ y \leq -x + 8 \\ y \leq 2x + 2 \end{cases} \quad \text{ب} \quad \begin{cases} x \leq 6 \\ y \leq \frac{1}{2}x + 1 \\ y \geq -2x + 4 \end{cases} \quad \text{ا}$$

راھێنان

به‌رده‌وامبوون له‌ بیر كاریدا

- 1 پرونیکه‌وه چۆن ناوچه‌ى شىكار بۆ سسته‌مى لاسهنگه هیلپیه‌كان دیاریده‌کەیت.
- 2 كه‌مترین ژماره‌ى لاسهنگه‌كان ده‌بێ چهنده‌بێت تا ناوچه‌ى شىكار سێگۆشه؟ چوارگۆشه؟ بێت نموونه بۆ وه‌لامه‌كه‌ت به‌پێنه‌وه.
- 3 به‌راوورد له‌نیوان سیستمى لاسهنگه هیلپیه‌كان و سسته‌مى هاوكیشه هیلپیه‌كاندا بكه.

راھینانی ئاراستە کراو

بەروونکردنەویدی هەریەک لەم سیستەمە لاسەنگە هێلییانە شیکاربکە.

$$\begin{cases} 2x+2y \leq 4 \\ 3x-y > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x < y-16 \\ y \leq -5x-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y > 5 \\ x-y < -3 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 4x-4 \\ y \geq 3x-3 \end{cases}$$

8 **کۆکردنەویدی پیتاک** یەكێك لە كۆمەڵەكانی خێرخوازی پیتاک كۆدەكاتهو بە فرۆشتنی

كراسی لۆكەیی. نرخى كراس بۆ گەوران 15 000 دینار و بۆ منداڵان 10 000 دینارە.

ژمارەى كراسەكانى 250 كراسە لە هەردوو جۆر. كۆمەڵەكە پێى وابوو بە لایەنى كەم 3

مليۆن دینارى دەست دەكەوێت. سیستەمى لاسەنگە هێلییانەكان بۆ نواندنی بارەكە بنووسە،

پاشان بە روونکردنەویدی شیکارى بکە ژمارەى كراسەكان لە هەر جۆرێك كە پێویستە

بفرۆشێت دیاریبکە.

راھینان و جێبەجێکردن

بە روونکردنەویدی هەریەک لەم سیستەمە لاسەنگە هێلییانە شیکاربکە و جۆرى

ناوچەى شیکارەكە دیاریبکە.

$$\begin{cases} y \geq x \\ y \leq x+6 \\ x \leq 6 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -1 \\ y \leq 3x+2 \\ y \geq -3x-10 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 7 \\ 2x-y \leq 3 \\ x+2y \geq -6 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 9 \\ y \geq -18 \\ x \leq 13 \\ y \leq -4 \end{cases}$$

بە روونکردنەویدی هەریەک لەم سیستەمە لاسەنگە هێلییانە شیکاربکە.

$$\begin{cases} y > 4 \\ x+4y \geq 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y > 5 \\ -2x+y \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y \geq 2x-3 \\ y \geq 3x+8 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x-y > 0 \\ y < x \end{cases}$$

17 **مۆسیقا** كۆمپانیایەك دەیهوێت CD 10 000 بۆ كۆمەڵە گۆرانیەك بەرهەم بهێنێت. ژمارەیهك

لەو CD یانەى تەرخان كرد بۆ ئەو بە خۆپراپی دابەشیان بکات بەسەر ئیستگەكانى رادیۆ و

تەلەفزیۆن، ژمارەیهكى تر بۆ فرۆشتن، بەمەرجی ژمارەى ئەو CD یانەى دەیبەخشێت لە پرێژەى

20% لەكۆى گشتى تێپەڕنەكات. سیستەمى لاسەنگە هێلییانەكان بنووسە كە ئەم بارە دەنویێت،

لەگەڵ دیاریکردنی ژمارەى ئەو CD یانەى ئامادەكراو بۆ فرۆشتن بۆ بەخشین بەخۆپراپی.

بە روونکردنەویدی هەریەک لەم سیستەمە لاسەنگە هێلییانە شیکاربکە و جۆرى ناوچەى

شیکارەكە دیاریبکە.

$$\begin{cases} y \leq 2.5 \\ y \geq -0.5 \\ y \leq -x+8 \\ y \leq 2x+4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x+y \geq -4 \\ \frac{1}{3}x+y \leq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq x \\ y \leq -x+2 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq x+6 \\ y \geq x+1 \\ y \leq -x+6 \\ y \geq -x-1 \end{cases}$$

نەندازە سیستەمى ئەو لاسەنگە هێلییانە بنووسە كە شیوەكە ناوچە شیکارەكەیهتى:

$$\begin{cases} 24 \end{cases} \quad \begin{cases} 23 \end{cases} \quad \begin{cases} 22 \end{cases}$$

25 باجی داھات خشتهی بهرامبهر پېژدهی باج لهسهر داھات به پېټی بههای داھاتی خیزان نیشان ددهات. پېژدهی باجی داھاتی سهرجوون و ژنهکھی دهکاته 25% . داھاتی ژنهک به لایه نی کهم 2 ملیون زیاتره له داھاتی پیاوکهی، سیستمکی لاسهنگه هیلییهکان بنووسه پرسیارهکه بنوینیت، پاشان سیستمکه به پروونکردنهوھی شیکاربهکه.

پېژدهی باجی دهرامته به پېټی به شهکان	
پېژدهکه	داھات (به ملیون دینار)
15%	له 14 تا 56.800
25%	له 56.801 تا 114.650
28%	له 114.651 تا 174.700

ههریهکه لهم سیستمه لاسهنگه هیلییانه به پروونکردنهوھی شیکاربهکه، سی خال له ناوچهی شیکارهکه دا دیاربیکه.

$$\begin{cases} y+7>0 \\ y<2x+5 \\ y<-3x+4 \end{cases} \quad \text{27}$$

$$\begin{cases} -5y<2x \\ 5y\geq 2x-20 \end{cases} \quad \text{26}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+3y\leq 2 \\ x-y>3 \end{cases} \quad \text{29}$$

$$\begin{cases} y\geq -8 \\ x+2y<4 \\ x>-6 \end{cases} \quad \text{28}$$

روانین بدو دواوه

دژ و هه لکه پراوھی ههریه که له ژمارانهی خواره وه بدوژدوه «دژه لیکدان و دژه کوکړدنه وه»

$$-1 \quad \text{33}$$

$$2.48 \quad \text{32}$$

$$-\frac{3}{4} \quad \text{31}$$

$$7 \quad \text{30}$$

هاوکیشهی راسته هیلیک لهم بارانه دا بدوژدوه.

34 به دوو خالی (2, -7) و (1, 1) دا دهرپوات. **35** به خالی (3, -3) دهرپوات لارییه کهی سفره.

36 به خالی (-2, 4.5) دا دهرپوات ته ستونه له گهل راسته هیلی $y = 4x - 1$.

37 به خالی (3, 2) دا دهرپوات ته ریه به راسته هیلی $y = -x - 7$.

روانین بو پیشه وه

38 ئایا نه زانراوی m به هایه کی هیه که و له سیستمکی لاسهنگه هیلییهکانی $\begin{cases} y>-3x+2 \\ y<mx-3 \end{cases}$

بکات شیکاری نه بیت ته گهر وه لامه کهت به لپیته تهو به هایه چهنده؟

ته گهر وه لامه کهت نه خیره هویه کهی پروونیکه وه.

وانه‌کان

1. پیزکراوهکان
2. سنوورده‌کان

جیهانی ته‌کنه‌لو‌جیا

ده‌توانیت پیزکراوه‌کان
به‌کار به‌ی‌نیت بۆ
نیشان‌دانی پیدراوه‌کان و
شیکردنه‌وه‌ی ئاراسته‌کانی
پهرسه‌ندنیان بۆ نمونه:
زیادبوونی ژماره‌ی ئەو
هه‌رزه‌کارانه‌ی ته‌له‌فۆنی
تایبه‌تیان هه‌یه (مۆبایل)



ریزکراوه‌کان Matrices

بۆچی

ریزکراوه‌کان به‌کاردهن بۆ ریکخستنی
پیدراوه‌کان، هه‌روه‌کو ریکخستنی شتومه‌که‌کانی
دوکانیکی بازرگانی، وه‌ک نمونه 1.



ئهم خشته‌یه‌ی خواره‌وه چالاکیه‌کانی بازرگانی یه‌کی له دوکانه‌کانی فرۆشتنی شتومه‌کی ناوماڵ به‌دریژایی مانگی نیسان پیشانده‌دات. له‌خشته‌که‌دا شتومه‌که‌کانی دوکانه‌که (ده‌رخسته له‌یه‌کی نیساندا) و فرۆشراوه‌کان هه‌روه‌ها کالاکراوه‌کان له‌ مانگی نیسان پیشانده‌دات.

شتومه‌که‌کان له‌یه‌کی نیسان		فرۆشراوه‌کان له‌ نیساندا		کراوه‌کان له‌ نیساندا	
بچووک	گه‌وره	بچووک	گه‌وره	بچووک	گه‌وره
8	10	7	9	15	20
15	12	15	12	18	24

ده‌توانیت پیدراوه‌ شتومه‌که‌کانی دوکانه‌که به‌کارهێنایی ریزکراوه‌ بنوییت.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{ریزکراوه‌ی شتومه‌که‌کان} \quad \text{مێزه‌کانی باخچه} \quad \text{مقه‌لی برژاندن}$$

ریزکراوه Matrix خشته‌یه‌کی لاکیشه‌یه‌ی له‌ چهندین خانه‌ پیکدیت که به‌دوو که‌وانه‌ی ستوونی ده‌وره‌دراون. هه‌ر خانه‌یه‌که له‌ ژماره‌یه‌که پیکدیت پیده‌وتریت **دانه Element** له‌دانه‌کانی ریزکراوه. **پله‌ی ریزکراوه rank of matrix** بریتیه‌ی له‌ ژماره‌ی ریزو ستوونه‌کانی، که به‌م جو‌ره‌ ده‌نوسریت ژماره‌ی ستوونه‌کانی columns، ژماره‌ی ریزه‌کانی rows بۆیه‌ به‌شیوه‌ی ژماره‌ی ستوون \times ژماره‌ی ریزی ده‌نوسریت. بۆیه‌ ته‌گه‌ر ریزکراوه‌یه‌که دوو ریز و سی ستوونی هه‌بیت، جو‌ره‌که‌ی 2×3 ده‌بیت (به‌ 2 جاران 3 ده‌خویندریته‌وه). که‌واته جو‌ری ریزکراوه‌ی شتومه‌که‌کان له‌سه‌روه‌ه 2×2 ده‌بیت، بۆ هه‌ر دانه‌یه‌که له‌دانه‌کانی ریزکراوه‌ ناوینیشان **Address** هه‌یه‌ که شوینه‌که‌ی له‌ ریزکراوه‌که دیاریده‌کات. ناوینیشانی دانه له‌ ژماره‌ی ئه‌و ریزی که له‌سه‌ریه‌تی به‌دوای دا ژماره‌ی ئه‌و ستوونه‌ی که له‌ خۆی ده‌گریت پیکدیت. بۆیه‌ دانه‌ی 10 له‌ ریزکراوه‌که‌ی سه‌روه‌ه‌دا ئه‌و دانه‌یه‌یه‌ که له‌ ریزی 1 و ستوونی 2 دایه. ئهم دانه‌یه‌ به‌ هێمای m_{12} هێماده‌کریت.

به‌کارهێنایی ریزکراوه‌کان بۆ پیشاندانی پیدراوه‌کان
پیدراوه‌کانی فرۆشراوه‌کان له‌ مانگی نیساندا به‌کاربهێتته.

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{ریزکراوه‌ی فرۆشراوه‌کان} \quad \text{مێزه‌کانی باخچه} \quad \text{مقه‌لی برژاندن}$$

ب پله‌ی ریزکراوه‌ی S چهنده‌؟

ریزکراوه‌ی S دوو ریز و دوو ستوونی هه‌یه. که‌واته پله‌که‌ی 2×2 .

ج دانه‌ی s_{12} کامه‌یه‌؟

دانه‌ی s_{12} ده‌که‌وێته سه‌ر یه‌کتر برپینی ریزی یه‌که‌م و ستوونی دووهم، که بریتیه‌یه‌ له‌ 9. ئهم دانه‌یه‌ واده‌گه‌یه‌نیت که دوکانه‌که 9 مێزی گه‌وره‌ی له‌ مانگی نیساندا فرۆشتووه

ئامانجه‌کان

- به‌کارهێنایی ریزکراوه‌کان بۆ نواندنی پیدراوه‌کانی بیرکاری و ژبانی پۆژانه.
- کۆکردنه‌وه‌ی ریزکراوه‌کان و لێده‌مرکردنیان.
- لێکدانی ریزکراوه‌ له‌ ژماره‌یه‌کی پاستی.

زاراوه‌کان

Vocabulary

- ریزکراوه Matrix
- پله‌ی ریزکراوه rank of matrix
- دانه‌ی ریزکراوه Entry
- ناوینیشانی دانه‌که Address

نموونه

د ناونیشانی 15 چیه؟

دانه 15 دهکډه وېته سر په کترېږېږنی ږیږی دووهم له گڼل ستوونی په کم، که بریتیه له دانه 15. S_{21}

هولېده ږیزکراوه ې بهرامېر بؤ وډلامدانه وه به کارېهېته.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 9 \\ 12 & 11 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

ا ږیزکراوه ې m له چ جوریکه؟

ب دانه ې m_{32} چنده؟

ج سفر له دوو شویندا دهردهکډه وې، ناونیشانیان چیه؟

دو ږیزکراوه په کسان دېن ټه گهر له ههمان جورېن ودانه بهرامېره کانیان له ههر دوو ږیزکراوه په کسان بن (واتا ټه دانانه ې که ههمان ناونیشانیان هیه له ههر دوو ږیزکراوه کدا).

یہ کسانبوونی ږیزکراوه کان

به های هریه که له x و y دیاریکه، کاتیک ههر دوو ږیزکراوه که په کسان بن.

$$\begin{bmatrix} 2x+4 & 5 & 1 \\ -2 & -3y+5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 1 \\ -2 & 5y-3 & -4 \end{bmatrix}$$

له بهر ټه وې دوو ږیزکراوه که په کسان، که واته $2x+4=12$ و $-3y+5=5y-3$

$-8y=-8$ و $2x=8$

$y=1$ و $x=4$

هولېده به های هریه که له x و y دیاریکه، کاتیک ههر دوو ږیزکراوه که په کسان بن.

$$\begin{bmatrix} -3 & -2x & -3 \\ -2 & 3y & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -15 & -3 \\ -2 & -2y+15 & -12 \end{bmatrix}$$

Adding and Subtracting matrices

کوکرده وه ولیدهرکردنی ږیزکراوه کان

به نویسین	به ژماره یی	به جبه بری
بؤ ټه وې دوو ږیزکراوه کوپکه یته وه یان لیکیان دهریکه یت، دانه بهرامېره کان کوپکه وه یان لیکدهریکه.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \end{bmatrix}$

بؤ ټه وې دوو ږیزکراوه کوپکه یته وه یان لیکدهریکه یت، پویسته دوو ږیزکراوه که له ههمان جور بن.

کوکرده وه که ناکریت. چونکه دوو

ږیزکراوه که له دوو جور ې جیاوازن.

~~$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{14} & b_{12} & b_{13} \end{bmatrix}$$~~

کوکرده وه که دکریت. دوو

ږیزکراوه که له ههمان جور بن.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

كۆكرىدەنە ۋە لىدەركىرنى رېزىكرارەكان

ئەم رېزىكرارەنى خوارە ۋە بەكاربەيتنە بۇ ۋەلامدانەۋە پىرسىيارەكان.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \\ -5 & 14 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

كۆيان بىكەۋە يان لىكىيان دەرىكە ئەگەر تۈانرا.

$A + C$

ا

ھەر دانەيەكى رېزىكرارەنى يەكەم لەگەل دانەنى بەرامبەرى لە رېزىكرارەنى دوۋەم كۆيكەۋە.

$$A + C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \\ -5 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & -2+2 \\ -3+0 & 10+(-9) \\ 2+(-5) & 6+14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 1 \\ -3 & 20 \end{bmatrix}$$

$C - A$

ب

$$C - A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \\ -5 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-4 & 2-(-2) \\ 0-(-3) & (-9)-10 \\ -5-2 & 14-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -19 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$C + B$

ج

لەبەر ئەۋە جۆرى رېزىكرارەنى C (3×2) جىاۋازە لە جۆرى رېزىكرارەنى B (2×3) بۆيە كىردارى كۆكرىدەنەۋەكە ناتۈانرېت ئەنجام بىرىت.

ھەۋلىدە

كۆ بىكەۋە يان لى دەرىكە ئەگەر تۈانرا.

$D - B$

$B - A$

$B + D$

دەزانىت لىكىدان كۆكرىدەنەۋەكى دوۋبارەيە. ئەمە كاتىك راستە كە رېزىكرارەكە لە ژمارەيەك بەدەيت.

ئەگەر $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ دەتۈانیت $M + M$ بە شۆۋە $2M$ بنۈوسىت.

دەتۈانیت ژمارەيەك لە رېزىكرارەيەك بەدەيت. ئەۋىش بە لىكىدانى ھەمۈۋ دانەيەك لە دانەكانى رېزىكرارەكە لەۋ ژمارەيە.

$$2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 0 \\ 2 \times 1 & 2 \times 5 \end{bmatrix}$$

جىبەجىكرىن لە بازىرگانىدا.

بەگەرپانەۋە بۇ چالاكى بازىرگانى دوكانەكەنى فرۆشتىنى كەلۈپەلى ناۋمال، رېزىكرارەنى $M - S + D$ ھەژمارىكە. كاتىك M رېزىكرارەنى شتۈمەكەكانى ناۋ دوكانەكەيە S رېزىكرارەنى فرۆشتەكانە D رېزىكرارەنى كىپنەكان بىت. رېزىكرارەنى ئەنجامەكە چى دەنۈيىت؟

$$\begin{aligned} M - S + D &= \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8-7+15 & 10-9+20 \\ 15-15+18 & 12-12+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 21 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} \\ &\text{مىزى باخچە} \\ &= \begin{bmatrix} 16 & 21 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} \text{مقەلى بىرژاندىن} \end{aligned}$$

رېزىكرارەنى ئەنجامەكە شتۈمەكەكانى ناۋ دوكانەكە دەنۈيىت لە كۆتايى مانگى نىساندا. لە دوكانەكە 16 مىزى باخچە بچۈك ۋە 21 مىزى گەرە ۋە 18 مقەلى بچۈك ۋە 24 مقەلى گەرە تىدابۈۋ.

هەولبەدە

پیزکراوەی $A + 2B - 3C$ ھەژماربکە، کاتیئک

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

نموونه

5

نووسینی برە پیزکراوەییەکان بەسادهترین شیۆد.

ئەم پیزکراوانە بەکاربەیتنە بۆ وەلامدانەوێ پرسیارەکان.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

بە سادەترین شیۆد ئەمانە بنووسە.

$2A - 3B$ ئەگەر لەتوانا داوێ.

$$2A - 3B = 2 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

لەبەر ئەوەی لیکدانی پیزکراوە لە ژمارەییکی نەگۆڕ جۆرەکی ناگۆڕی، بۆیە جۆری پیزکراوەکانی $2A$ و $3B$ یەكسان نابن. ئەمەش وادەکات لیکدەرکردنیان لەتوانادا نەبێت.

ب $C - 2A$

$$\begin{aligned} C - 2A &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-2) \times 4 & (-2) \times (-2) \\ (-2) \times (-3) & (-2) \times 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 6 & -29 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

هەولبەدە بە سادەترین شیۆد بنووسە ئەگەر لەتوانا داوێ.

$$D + 0.5D \quad \text{ج} \quad 4A - 3C \quad \text{ب} \quad 2B + 3C \quad \text{ا}$$

سیفەتەکانی کۆکردنەوێ لیکدەرکردنی پیزکراوەکان properties of addit and subtractiv Matrices

بەجەبری	بەژمارەیی	بەنووسین
$A + B = B + A$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	سیفەتی ئالوگۆڕ کۆکردنەوێ پیزکراوەکان کرداریکی ئالوگۆڕە.
$A + B + C$ $(A + B) + C =$ $A + (B + C)$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	سیفەتی یەکتەر بەستن کۆکردنەوێ پیزکراوەکان کرداریکی یەکتەر بەستنە.
$A + 0 = A$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	پیزکراوەی بێ لایەن لە کۆکردنەوێدا کۆمەڵەی سفری دانەبێ بێ لایەنە لە کۆکردنەوێ پیزکراوەکاندا.
ئەگەر B دژەکۆکردنەوێ $A + B = 0$ بێت، ئەوا A کاتیئک 0 پیزکراوەی سفریە.	$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 9 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	دژە کۆکردنەوێ پیزکراوە دژە کۆکردنەوێ پیزکراوەی M بریتییه لەو پیزکراوەیی کە پەیدا دەبێت لە ئەنجامی گۆڕینی ھەر دانەبێک لە دانەکانی M بە دژەکۆکردنەوێ.

بەردەوامبۇن لە بیر کاریدا

- 1 هەموو پلەکانی ریزکراوەیەك بەدۆزەو لە 8 دانە پیکهاتبیت. پروونیکەو و چۆن دۆزیتەو.
- 2 باسی کرداریک بکەلەسەر ریزکراوەکان کە دەبێتە ھۆی دژیوونی نیشانە ھەردانەیکە.

راھبەنانی ئاراستە کراو

- 3 زاراوەکان ئەو بەھایەکی کە دەکەوێتە سەر یەکتەرپینی ریزیک و ستوونیک لە ریزکراوەیەکا (دانەییە یان ناوینشانى دانە) پیکەدەھێنێت.
- 4 ھۆشیار و شیرکۆ و دلسۆز کاری فرۆشتنی پلێتەکانی ئاھەنگی کۆتایی سالیان گرتە ئەستۆ. ئەم خشتەییە خوارەو ئەو پێدراوانە دەنوین کە پەيوەندیان بە فرۆشتنی پلێتەکانەو ھەيە.

فرۆشتنی پلێتەکانی ئاھەنگی کۆتایی سالی خویندن			
خویندکار	پلێتە تاکەکان	دەفتەرە پلێتەکان	بەری پارەى گشتى بەدینار
ھۆشیار	39	15	114 000
شیرکۆ	108	8	143 000
دلسۆز	13	25	138 000

ا ریزکراوەی A بۆ پیشاندانی پێدراوەکانی خشتەکە بەکاربھێنە.

ب پلەى ریزکراوەی A چییە؟

ج دانەى a_{13} چەندە؟ چی دەنوینیت؟

د ناوینشانى دانەى 143 000 چییە؟

5 بەھاکانى x و y دیاریبکە کاتیک دوو ریزکراوەکە یەکسان بن.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 14-x \\ -13-y & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & x+8 \\ 2y-1 & 0 \end{bmatrix}$$

ئەم ریزکراوانەى خوارەو بەکاربھێنە بۆ شیکارکردنی راھبەنەکانى 6 تا 9. کۆیان بکەوێ یان لیکیان دەربکە کاتیک لە توانادا بێت.

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 3.8 & 3 \\ -1.2 & 2.4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 1.1 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2.3 & 1 \end{bmatrix}$$

$B + A$ 9

$B - A$ 8

$B - C$ 7

$A + B$ 6

10 به کار بردن خشته‌ی بهرام‌بهر نرخه‌کانی سی جور له پوښاکي وهرزشي

دياریده‌کات پيش دانانی باج له‌سهریان ئەم نرخانه به ریزکراوی M بنوینه،

نرخه‌کانی پوښاکه وهرزشيیه‌کان			
ناياب	نارمی له‌سهر بیت	ساده	
14 000	13 000	9 000	کراسی لۆکه
11 000	9 500	6 000	شورتی کورت
23 000	21 000	15 000	شورتی درێژ

پاشان ریزکراوی T بدۆزوه که به‌های باجی هەر جوریکیان بنوینیت، ئەگەر بزانیته ریزه‌ی سه‌دی باج 8.25% ریزکراوی A بنووسه که نرخي هەر سی جور پوښاکه‌که بنوینیت دواي زیادکردنی باج له‌سهریان.

ئەم ریزکراوانه‌ی خواره‌وه به‌کاربهێنه بۆ شیکارکردنی راهینانه‌کانی 11 تا 14 .
ئەنجامه‌که به ساده‌ترین شیوه بنووسه، ئەگەر توانرا.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2C - A \quad 14$$

$$A - 2B \quad 13$$

$$\frac{1}{2}C \quad 12$$

$$3B \quad 11$$

راهینان و جیه‌جیکردن

15 پیدراوه‌کانی ئەم خشته‌یه بۆ وه‌لامدانه‌وه‌ی پرسیاره‌کان به‌کاربهێنه.

نرخه‌کانی پوښاکه وهرزشيیه‌کان			
نمره	پلیت	نوتیل	نوتۆمبیل
یه‌که‌م	425 500	396 000	65 990
کاره‌کان	385 980	245 500	45 900
نابووریانه	275 120	103 250	29 500

ا ریزکراوی A بۆ پیشاندانی پیدراوه‌کانی خشته‌که به‌کاربهێنه.

ب پله‌ی ریزکراوی A چیه؟

ج دانه‌ی a_{32} کامه‌یه؟ چی دهنوینیت؟

د ناویشانی دانه‌ی 385980 چیه؟

16 به‌های x و y دیاریکه کاتیك دوو ریزکراوه‌که به‌کسان بن.

$$[2x \quad y+1 \quad -2y] \quad \text{و} \quad [3x-2y \quad 14 \quad -x]$$

ئەم ریزکراوانه‌ی دین به‌کاربهێنه بۆ شیکارکردنی راهینانه‌کانی 17 تا 20 . کۆیکه‌وه یان لی‌دهریکه، کاتیك له توانادابیت.

$$D = \begin{bmatrix} 5.1 & 2.5 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 3.2 & -1 \\ -1.5 & 2.4 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} -4.2 & -1 \\ 2.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E + F \quad 20$$

$$D + F \quad 19$$

$$D + E \quad 18$$

$$F - E \quad 17$$

21 خويندنی زانکۆ ئەم خشتهیهی خوارهوه تیچوونی سالانهی خويندنی زانکۆ دهردهخات.

به های خهملیترای تیچوونی سالانهی خويندنی زانکۆ			
زانکۆی تایبەت	زانکۆی فهرمی نیشتمانی	زانکۆی فهرمی بیانی	
27 677 000	12 841 000	19 188 000	تیچوون به دینار

شارهزایان وا پیشینی دهکهن که سالی داهاتوو ئهو تیچوونانه به پێژهی 5% زیادهکهن. بهبهکارهینانی لیکدانی ژمارهیهک له پیزکراوه به های خهملیترای تیچوونی خويندن له ههر سی جۆری زانکۆکه له سالی داهاتوو بدۆزهوه. ئەم پیزکراوانه دین بهکاربهینه بۆ شیکارکردنی پرسپارهکانی 22 تا 25. ئەنجامهکه بهسادهترین شیوه بنوسه، ئەگەر توانرا.

$$G = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$H - 0.3G$ **25**

$2K - G$ **24**

$\frac{1}{2}(H + J)$ **23**

$2G$ **22**

26 خهملاندن ئهو وینه پروونکردنهوهیهی بهرامبهر ئهو

ئهنجامانه دهنوینیت که کلارا به بهکارهینانی کۆمپیوتەر دهستی کهوتون، پاش ئهوهی خهرجیهکانی شوبات و ئاداری تیا دا تۆمارکرد. پیزکراوهی $(3 \times 1)F$ بهکاربهینه بۆ نواندنی خهرجیهکانی له مانگی شوبات و پیزکراوهی M بۆ نواندنی خهرجیهکانی له مانگی ئاداردا. پیزکراوهکان کۆیکهوه بۆ دهستکهوتنی خهرجی گشتی له ههر دوو مانگهکه دا.

27 نهاندازه پیزکراوهی $\begin{bmatrix} 2 & 2.5 \\ 3 & 3.5 \end{bmatrix}$ نیوهرتیرهکانی چوار بازنه دهنوینیت.

پیزکراوهیهک بنوسه که چۆهکانی ئهو بازنامه بنوینیت.

بیری پهخنهگر پروونیکهوه ئەم دهستهواژانه ههمیشه دروستن، یان ههندی جار دروستن یان ههمیشه نادروستن.

28 دهتوانریت دوو پیزکراوه کۆیکرینهوه که ههمان ژماری دانیهان ههبت.

29 دهتوانریت دوو پیزکراوه که کۆیکرینهوه ئەگەر ژماره ی دانیهان جیاواز بیت.

30 دهتوانریت دوو پیزکراوه کۆیکرینهوه ههریهکه یان 3 پیز و 4 ستوونیهان ههبی.

31 ئەگەر توانرا دوو پیزکراوه کۆیکرینهوه، ئهوا لیدهرکردنیشیان له توانادایه.

32 بههاکانی x و y و z دیاریبکه به جۆرێک یهکسانبوونی پیزکراوهکه راست دهچیت.

$$\begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ y & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 9 & z \end{bmatrix}$$

33 ههله له شیکردنهوه ههلهکه پروونیکهوه:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 0 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

34 بنوسه ئایا لیدهرکردنی پیزکراوهکان کرداریکی ئالوگۆره؟ نموونهیه بینهوه و راستی وهلامهکهت بسهلمینی.

35 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 2 \\ 1.5 & 2.1 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 0.4 & 6 \\ 6 & 6.4 & 0 \end{bmatrix}$ كام بېر دهكاتە پېزكراوہى $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ؟

(ا) $2C - \frac{1}{2}B$ (ب) $C - 2B$ (ج) $B - 2C$ (د) $2B - \frac{1}{2}C$

36 كام دەستەواژە ھەمیشە راستە بۆ پېزكراوہى E لە جوړى $m \times n$ ؟

- (ا) ژماره‌ى دانەكانى $m \times n$ (ب) دانەى e_{nm} ى ھەيە.
- (ج) ژماره‌ى دانەكانى $m + n$ (د) m ستوون و n پېزى ھەيە.

37 بەھای x كە پاسادانى $\begin{bmatrix} 48 & 32 \\ 8 & 28 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ 8 دهكاتە چەند؟

- (ا) 0.25 (ب) 0.5 (ج) 2 (د) 4

38 **وہ لامي كورت** بەھای x بدۆزەوہ كە پاسادانى $\begin{bmatrix} -8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 5 & -x \end{bmatrix}$ دهكات.

روانين بۆ دواوہ

39 **دراوہكان** شيلان 36 پارچە دراوہى لە جوړى ھەزار دينارى و 500 دينارى پيپە بەھای. ئەو گۆژمەيە چەندە، ئەگەر بزانيت ژماره‌ى پارچەكانى جوړى 500 دينار دوو ئەوەندەى ژماره‌ى ھەزار ديناريپەكانە؟

دياريپكە ئەگەر خالى دراو شىكارە بۆ سستەمى دوو ھاوكيشەكە. (پۆلەكانى پيشوو).

40 $\begin{cases} x - y = 4 \\ 5x + 6y = 2 \end{cases}$ ؛ (2, -2)

41 $\begin{cases} y = 2 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$ ؛ (4.5, 2)

روانين بۆ پيشەوہ

42 پېزكراوہى B بدۆزەوہ بە جوړيک يەكسانبوونەكە راست دەرچيٲ.

$$3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

سنووردەرەکان و ریڤسای کرامر

Determinants and Cramer's Rule



بۆچی
شارەزایانی بۆری خۆراکی وەرزشکاران
بۆیستیان بە شیکارکردنی سستەمی ھاوکێشە
هێلێهەکانە بۆ دیاریکردنی ئەو پرە گەرمۆکیانە و
پرۆتین و جەوری و کاربوهیدراتەکی کە وەرزشوانێک
بۆیستەتی لە خۆراکەکانیدا. (نموونه 4).

وانەى
2

ئامانجەکان

- سنووردەری ریزکراوەی 2×2
2 یان 3×3 هەژماردەکات.
- شیکارکردنی سستەمێکی
هێلێ بە بەکارهێنانی ریڤسای
کرامەر.

زانایانی بیرکاری ریزکراوە چوارگۆشەییەکان و ژمارەکان جوت دەکەن، بە جۆرێک بەرامبەر هەر
ریزکراوەیەکی چوارگۆشەیی ژمارەییەکی راستی هەبێ دەوترێت سنووردەری ریزکراوە
Determinant هێمای $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ بەکار دێت بۆ نوێاندنی سنووردەری ریزکراوەی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
سنووردەری ریزکراوە پۆلیکی گرنگی هەبێ هەروەکو لە دوایدا دەبینیت.

سنووردەری ریزکراوەی 2×2 . Determinant 2×2

بەجەبیری	بەژمارەیی	بەزارەکی
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $= ad - bc$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $= (1)(4) - (3)(2) = -2$	سنووردەری Determinant ریزکراوەی بریتییه لە $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $ad - bc$

زاراوەکان

Vocabulary

سنووردەر Determinant
ریزکراوەی ھاوکۆلەکان
Coefficient matrix
ریڤسای کرامەر
Cramer's Rule

دۆزینەوێ سنووردەری ریزکراوەی 2×2

سنووردەری ریزکراوەکە بدۆزەو.

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{أ}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3 - 5 \times 8$$

$$= 18 - 40 = -22$$

ئەنجامی لێکدانى دوو نۆوانکە لە ئەنجامی لێکدانى دوولاکە دەریکە.

سنووردەری ریزکراوەکە بریتییه لە -22

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ب}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times 3 - \frac{2}{3}(-6) = 1 + 4 = 5$$

نموونه

هەولبەدە سنووردەری پیزکراوەکە بدۆزەوه.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 4 & 2\pi \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{5}{6} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.2 & 30 \\ -0.3 & 5 \end{bmatrix}$$

دەتوانیت سنووردەرەکان بەکاربەھێنیت بۆ شیکارکردنی سیستەمی ھاوکیشە ھێلییەکان. بۆ شیکاری $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ دەستبەگە بە نووسینی پیزکراوەی $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ کە پێی دەوترێت

پیزکراوەی ھاوکۆلەکان Coefficient matrix. و سنووردەرەکانی D ھەژماربە،

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

پاشان دوو سنووردەری ھەژماربە پاشان پێسای کرامەر بەکاربەھێنە.

Cramers Rule

پێسای کرامەر بۆ سیستەمی 2×2

ئەگەر سنووردەری پیزکراوەی ھاوکۆلەکان D نەکاتە سفر، ئەوا سیستەمی $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ تەنها شیکاریکی ھەیە ئەویش $x = \frac{D_x}{D}$ و $y = \frac{D_y}{D}$ ، کاتیئە

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

دەتوانیت سنووردەرەکانی D و D_x و D_y بەکاربەھێنیت بۆ ئەوەی بزانییت کە سیستەمەکە دیاریکراوە (شیکاریکی تاکانە ھەیە، یان ئەستەمە (شیکار نییە) یان دیارینەکراوە (ژمارەییەکی دیارینەکراوە لە شیکاری ھەیە)، لەم پۆلێنکردنە خوارەودا وا دادەنێین کە a_1 و b_1 سفرن لە ھەمان کاتدا، و a_2 و b_2 سفرن لە ھەمان کاتدا.

پۆلێنکردنی سیستەمی دوو ھاوکیشە ھێلی بە دوو نەزانراو		
ئەگەر $D = 0$ و $D_x \neq 0$ یان $D_y \neq 0$ سیستەمەکە ئەستەمە.	ئەگەر $D = 0$ و $D_x = D_y = 0$ سیستەمەکە دیارینەکراوە.	ئەگەر $D \neq 0$ سیستەمەکە دیاریکراوە.

شیکارکردنی سیستەمە ھێلییەکانی 2×2 بە بەکارھێنانی پێسای کرامەر

ئەم سیستەمە ھێلییە بە بەکارھێنانی پێسای کرامەر شیکار بکە.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

ھەنگاوی 1: سنووردەری پیزکراوەی ھاوکۆلەکان بدۆزەوه.

سیستەمەکە دیاریکراوە چونکە $D \neq 0$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 2(-1) = 1$$

ھەنگاوی 2: ھەردوو سنووردەری D_x و D_y بدۆزەوه.

نموونه

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \quad , \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

ههنگاوی 3 : به‌های x و y بدۆزهوه.

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-7}{1} = -7 \quad ; \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{-4}{1} = -4$$

سیستمه‌که شیکاریکی تاکانه‌ی هه‌یه ئه‌ویش $(-4, -7)$

$$\begin{cases} y - 2 = 3x \\ 3x - y = 7 \end{cases} \quad \text{ب}$$

ههنگاوی 1 : سیستمه‌که به شیۆدی گشتی بنووسه.

$$\begin{cases} 3x - y = -2 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

ههنگاوی 2 : سنوورده‌ری پیزکراوه‌ی هاوکۆلکه‌کان بدۆزهوه.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 3(-1) = 0$$

ههنگاوی 3 : هه‌ژماره‌ی D_x بکه.

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

له‌به‌ر ئه‌وه‌ی $D = 0$ و $D_x \neq 0$ که‌واته سیستمه‌که ئه‌سته‌مه.

هه‌ولۆده

$$\begin{cases} 6x - 2y = 14 \\ 3x = y + 7 \end{cases} \quad \text{سیستمه‌که شیکار بکه به به‌کاره‌یتانی پړسای کرامهر}$$

بۆ ئه‌وه‌ی پړسای کرامهر بۆ شیکارکردنی سسته‌می هیلّی 3×3 به‌کاربه‌یتانی، پۆیسته هه‌ژماره‌ی سنوورده‌ری پیزکراوه‌کانی جۆری 3×3 بکه‌یت. ئه‌م هیلّکارییه‌ی خواره‌وه یه‌کی له پړگاکانه بۆ ئه‌نجامدانی کرداره‌که.

ئه‌نجامی لیکدانی ژماره‌کانی تیره سووره‌کان
کۆبکه‌وه، پاشان ئه‌نجامی لیکدانی ژماره‌کانی
 تیره شینه‌کانی **لیدهر بکه**.

دوو ستوونی یه‌که‌م له لای راستی
 سنوورده‌ره‌که بنووسه‌وه.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_2 - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1$$

$$a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1)$$

هه‌ژمارکردنی سنوورده‌ری پیزکراوه‌ی 3×3 .

$$\text{هه‌ژماره‌ی سنوورده‌ری پیزکراوه‌ی } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \text{ بکه.}$$

سنوورده‌ره‌که بنووسه، پاشان دوو ستوونی یه‌که‌می له لای راستی سنوورده‌ره‌که بنووسه.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

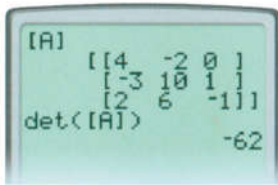
نموونه

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 4 & -2 \\ -3 & 10 & 1 & -3 & 10 \\ 2 & 6 & -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

ههنگاوی 1 : ههژماره‌ی ئه‌نجامی لیکدانی ژماره‌کانی هه
تیره‌یه‌کی به‌رووخوار بکه وئهنجامه‌کان کۆبکه‌وه.

$$(4)(10)(-1) + (-2)(1)(2) + (0)(-3)(6) = -44$$

ههنگاوی 2 : ههژماره‌ی ئه‌نجامی لیکدانی ژماره‌کانی هه تیره‌یه‌کی
به‌روژووربکه وئهنجامه‌کان کۆبکه‌وه.



$$(2)(10)(0) + (6)(1)(4) + (-1)(-3)(-2) = 18$$

ههنگاوی 3 : سه‌رجه‌می دوهم له‌سه‌رجه‌می یه‌که‌م

$$-44 - 18 = -62$$

سنوورده‌ری پیزکراوه‌ی A ده‌کاته -62.

پاسادان بکه بژمیری پوونکردنه‌وه‌ی به‌کاربه‌پینه. ئه‌گه‌ر توانرا.

$$\text{هه‌ولبده} \quad \text{سنوورده‌ری پیزکراوه‌ی} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ 10 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ بدۆزه‌وه.}$$

ده‌توانریت پيسای کرامر فراوانتر بکريت بۆ ئه‌وه‌ی سیستمی هێلی 3×3 بگريته‌وه.

Cramers Rule 3×3

پيسای کرامر بۆ سیستمی 3×3

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ئه‌گه‌ر سنوورده‌ری پیزکراوه‌ی هاوکۆله‌که‌کان نه‌کاته سفر، ئه‌وا سیستمی} \\ \text{شیکاریکی تاکانه‌ی هه‌یه، بریتیه‌ی له‌} \end{array}$$

$$z = \frac{D_z}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad x = \frac{D_x}{D}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{کاتیک}$$

ئه‌گه‌ر $D \neq 0$ ، ئه‌وا سیستمه‌که شیکاریکی تاکانه‌ی هه‌یه.

ئه‌گه‌ر $D = 0$ و $D_x \neq 0$ یان $D_y \neq 0$ یان $D_z \neq 0$ ، ئه‌وا سیستمه‌که ئه‌سته‌مه.

ئه‌گه‌ر $D = 0$ و $D_x = D_y = D_z = 0$ ، ئه‌وا سیستمه‌که دیارینه‌کراوه.

جیه‌جیکردنی خۆراکی

4

نموونه



گه‌رمۆکه‌ گه‌رمیه‌کان له‌هه‌ر گرامیکدا	
خۆراک	گه‌رمۆکه‌کان
پروئتین	4
کاربوهیدرات	4
چه‌وری	9

یه‌کێک له‌ شاره‌زایانی خۆراک کار له‌سه‌ر دارپشتنی سیستمی
خۆراکی یاریزانانی تۆپی پی ده‌کات. له‌ سیستمه‌که‌دا وا پێویست
ده‌کات یاریزان 3600 گه‌رمۆکه‌ی گه‌رمی و 750g خۆراک
پۆژانه به‌کاربه‌پێن. پێویسته ئه‌و گه‌رمۆکه‌ گه‌رمیه‌ی که
سه‌رچاوه‌که‌یان پروئتین وچه‌ورییه‌ 60% ی کۆی گه‌رمۆکه
گه‌رمیه‌کان پیکه‌پێن. چه‌ند گرام له‌ پروئتین وکاربوهیدرات
وچه‌وری پێویسته بۆ ئه‌م سیستمه.

ئه‌م سیستمه خۆراکیه پیکه‌ها‌تووه له‌ p گرام له‌ پروئتین و c
گرام له‌ کاربوهیدرات و f گرام له‌ چه‌وری.

$$4p + 4c + 9f = 3600$$

$$p + c + f = 750$$

$$4p + 0c + 9f = 2160 \quad \text{گه‌رمۆکه‌کانی پروئتین وچه‌وری ده‌کاته } 60\%(3600) = 2160$$

$$Df = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3600 \\ 1 & 1 & 750 \\ 4 & 0 & 2160 \end{vmatrix}, Dc = \begin{vmatrix} 4 & 3600 & 9 \\ 1 & 750 & 1 \\ 4 & 2160 & 9 \end{vmatrix}, Dp = \begin{vmatrix} 3600 & 4 & 9 \\ 750 & 1 & 1 \\ 2160 & 0 & 9 \end{vmatrix}, D = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -20$$

$$f = \frac{Df}{D} = \frac{-2400}{-20} = 120, c = \frac{Dc}{D} = \frac{-7200}{-20} = 360, p = \frac{Dp}{D} = \frac{-5400}{-20} = 270$$

ئەم سىستەمە پىكىدېت لە 270g پىرۇتېن و 360g كاربۇھىدرات و 120g چەۋرى.

ھەللىدە **چى دەپىت ئەگەر....؟** سىستەمەكە پىرۇتېن پىيۇستى بە بەكاربىردى 3200 گەرمۇكەى گەرمى و 700g خۇراك بىكات، پىيۇستە ئەو گەرمۇكە گەرمىانەى سەچاۋەكەيان كاربۇھىدراتە 70% كۆيگەرمۇكە گەرمىيەكان بن. ئايا چەند گرام لە پىرۇتېن و كاربۇھىدرات و چەۋرى لە سىستەمەكەدا پىيۇست دەپىت؟

راھىنان

بەردەوامبۇون لە بىر كارىدا

- 1 باسى پىزىكراۋىيەك بىكە سنووردەرى نەپىت.
- 2 كاتىك پىساي كرامەر بەسەر سىستىمىكى ھېلى دوو ھاۋكىشەى دوو نەزانراۋ جىبەجى دەكەين، ئايا سى سنووردەركە چۇن دەبن كاتىك يەككە لە ھاۋكىشەكان لە ئەنجامى لىكدانى ژمارەيەك لە ھاۋكىشەى دووم پىكەھاتىت؟
- 3 **زاراۋەكان** ماناى چى دەگەيەنپىت، ئەگەر يەككە لە دانەكانى پىزىكراۋى ھاۋكۆلكەكان سفر بىت؟

راھىنانى ئاراستە كراۋ

سنووردەرى پىزىكراۋەكە بدۆزەۋە.

$$\begin{bmatrix} -3 & 40 \\ -5 & 66\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1.5 & 0.25 \\ 6 & 2.5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$$

پىساي كرامەر بۇ شىكاركردى سىستەمە ھىلىيەكە بەكاربەپتە.

$$\begin{cases} 2y = 2 - x \\ -3x + 6y = -9 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 2.5x - y = 1.5 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + y + 6 = 0 \\ 8x + 2y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x = 2 - y \\ 3x + 1 = 2y \end{cases}$$

سنووردەرى پىزىكراۋەكە بدۆزەۋە.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0.5 & 3 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

- 15 **بەكاربىردن** ھەتاۋ 2kg فستق و 1.5kg باۋى و 3kg بىندقى كپى. و بىرى 28420 دىنار پارەى دا. بەلام دويىنى دەستەخوشكى 39390 دىنار پارەى دا. لە بىرى كرىنى 4.5kg فستق و 2kg بىندق. ئايا نرخی ھەر كىلوگرامىك لە ھەر جۇرىكىيان چەندە؟ ئەگەر بزانپت نرخی يەك كىلوگرام لە بادەم يەكسانە بە سەرجمى نرخی كىلوگرامىك لە فستق و كىلوگرامىك لە بىندق.

راھىنان و جىيە جىكردن

سنووردەرى پىزىكراۋەكە بدۆزەۋە.

$$\begin{aligned} 16 \quad & \begin{bmatrix} 3 & -0.4 \\ 5 & 0.3 \end{bmatrix} & 17 \quad & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 18 \quad & \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 8 \\ -\frac{1}{2} & 10 \end{bmatrix} & 19 \quad & \begin{bmatrix} r & -1 \\ -2r^2 & \pi r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

پىئىساي كرامەر بۇ شىكاركرىنى سىستىمە ھىلىيەكە بەكاربەيتتە.

$$\begin{aligned} 20 \quad & \begin{cases} 0.5x + 6y = 2 \\ 0.25x + 3y = 0.5 \end{cases} & 21 \quad & \begin{cases} x + 2y = 3.5 \\ 3x - y = 2.7 \end{cases} & 22 \quad & \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + \frac{y}{2} = 2 \end{cases} & 23 \quad & \begin{cases} 3y - x = 7 \\ 2x + 3y = -7 \end{cases} \end{aligned}$$

سنووردەرى پىزىكراۋەكە بدۆزەۋە.

$$\begin{aligned} 24 \quad & A = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 & 0 \\ 3.2 & 1 & -4 \\ 6.4 & -5 & 2.1 \end{bmatrix} & 25 \quad & L = \begin{bmatrix} -2.4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0.5 \\ 0 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} & 26 \quad & W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

27 **لەش جوانى (رەشاقە)** قىيان ژمارەى كاتىمىرەكانى مەشقى وەرزشى كە پىي ھەلدەستىت لەگەل ژمارەى گەرمۇكەكانى گەرمى كە پۇژانە بەكارىدەبات، تۆماردەكات. قىيان چەند گەرمۇكەى پىيويستە لەھەر كاتىمىرەكدا بۇ ھەر جۇرىك لەو مەشقانى ئەنجامى دەدات. پىئىساي كرامەر بەكاربەيتتە بۇ شىكاركرىنى پىسىارەكە.

تۆمارى كاتەكانى مەشقەكانى قىيان				
پايسىكل سوارى	توپى سەرمىز	مەلەوانى	گەرمۇكەى پىيويست	
1.5	1	0.75	1620	دووشەممە
0.75		1	915	چوارشەممە
1	1.5		1320	ھەينى

28 **بىرى رەخەنگر** بەھاي c چەندە بۇ ئەۋەى سنووردەرى پىزىكراۋەى ھاۋكۆلكەكان لە سىستىمى $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ cy = 3 - x \end{cases}$ بىكاتە سىفر؟ پوونىكەۋە چۆنت دۆزىەۋە؟

29 **ئىنتەرنىت** يەككە لە مالىپەرەكانى ئىنتەرنىت داۋاي ھەلسەنگاندنى بابەتتىكى كىرد. بە پىدانى خالىك يان دوو خال و يان 3 خال. ژمارەى ھەلسەنگىنەران 38 كەس بوو. ژمارەى ئەۋانەى 3 خالىيان دابوو دوو ئەۋەندەى ئەۋانەبوون كە يەك خالىيان دابوو، ژمارەى كەسەكانى ھەر جۆرە ھەلسەنگاندك چەندە ئەگەر بزانىت ژمارەى گشتى خالەكانى 85 خال؟ سنووردەرى پىزىكراۋەكە بدۆزەۋە.

$$\begin{aligned} 30 \quad & A = \begin{bmatrix} x & x-1 \\ x+1 & x \end{bmatrix} & 31 \quad & B = \begin{bmatrix} x-2 & x+2 \\ x+2 & x+6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

32 **كانزا بەنرخەكان** پارچەيەك پارەى بچوك لە زىو بارستايىەكەى دەگاتە 2.268g، و پارچەيەك پارەى گەۋرە بارستايىەكەى دەگاتە 5g. ئاراس 425 پارچەى لەھەردوو جۆر لايە. بارستايىەكانى پىيوا 1483g بوو.

ا ئاراس لە ھەر جۇرىك چەند پارچەى لايە؟

ب نىرخى پارچە زىۋەكان چەندە، ئەگەر نىرخى پارچەى بچوك 30000 دىنار و نىرخى پارچەى گەۋرە 72000 دىنار بىت؟

33 كۆمەلىك كە لە 6 گەورە و 3 مندال پىكھاتىبون سەردانى باخچەى ئاژەلانىان كىر 48000 دىنار پارەيان دا، لە كاتىكدا كۆمەلىكى تر كە لەدوو گەورە و 10 مندال پىكھاتىبون 52000 دىنار پارەيان دا بۆ چوونە ژوورەو.

نەزانراوى x بەكاربەھىنە بۆ نرخی پلىتى مندال و y بۆ نرخی پلىتى گەورەكان.

ا سىستىمى ئەو ھاوكىشانە بنووسە، كە ئەم پىرسىيارە پروندەكەتەو.

ب پىزىكراوئى ھاوكۆلكەكان بنووسە وھەژمارەى سنووردەرەكەى بكە.

ج پىرسىيارەكە چەند شىكارى ھەيە؟

د پىساي كرامەر بەكاربەھىنە بۆ دۆزىنەوئى نرخی ھەريەكە لە دوو نەزانراوئەكە.

ه نرخی بلىتى چوونە ژوورى گەورەكان چەندە؟ نرخی پلىتى چوونە ژوورى مندالان چەندە؟

34 چ جۆرە باسك بۆ ئەو سىستىمە ھىلىيە راستە؟

$$\begin{cases} 3x = y - 1 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$$

ا دىيارىنەكراو؛ ژمارەيەكى دىيارىنەكراو شىكارى **ج** ئەستەم، شىكارى نىيە.

ب ئەستەم، زۆر لە شىكارى ھەيە. **د** دىيارىكراو، شىكارىكى تاكانە.

35 كام پىزىكراوئە سنووردەرەكەى دەكاتە 1 ؟

ا $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ **ب** $\begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ **ج** $\begin{bmatrix} -3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ **د** $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

36 **وئەلامى كورت** بەھاي x . بدۆزەوئە ئەگەر $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 25$

روانىن بۆدواو

37 **بەكاربردن** شىرىن 135000 دىنارى لايو كاتىك چوونە دوكانىكى پىلاوى ئافرەتان و

پىلاوىكى بىنى كە داشكاندىنى 25% ى بۆكرابوو. لاسەنگەيەك بنووسە كە نرخی

بنەپەتيەكەى پىلاوئەكە پاسادانى بكات ئەگەر بزانييت سارە پىلاوئەكەى كرى.

سىستىمى ئەم ھاوكىشانە بە لەجياتىدانان شىكارىكە.

40
$$\begin{cases} 2x = y \\ 4x + y = -2 \end{cases}$$

39
$$\begin{cases} x + y = -5 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$$

38
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}y \\ 6x - 6y = 16 \end{cases}$$

روانىن بۆپىشەو

نەجامەكانى راپرسىيەكە		
بەش	لەگەل دانانن	دژى دانانن
باكوور	47%	53%
باشوور	85%	15%
سەرجهم	49%	51%

41 **شارستانى** بەمەبەستى دانانى پەيكەريك لە يەكئى لە

گورپەپانەكانى شارىك، كە لەدوو بەشى باكوور و باشوور

پىكھاتىبون، راپرسىيەك لە نيوان دانىشتوانەكەى

ئەنجامدرا. خىشتەى بەرامبەر پوختەى ئەنجامەكانى

راپرسىيەكە بە پىژەى سەدى دەرەخات. ئايا لە بەشى

باشوور چەند ھاوولاتى دەنگى خوئى داو، ئەگەر بزانييت

ژمارەى دەنگەدەران 4826 كەسبوو.

وانه کان

1. داتاشراوی یه کهم
 2. داتاشراوی دووهم
 3. جیبه جیکردنه کانی
- داتاشراو

خیرایی جیبه؟

ده توانی جیاکاری
به کار به ینی بو
هه ژمارکردنی خیرایی
ته نیکی جوولا و له هه
ساتیکی جوولانی.



1 داتاشراو

1 Derivative



بۆچی
ئابووری ناسه‌کان داتاشراو
به‌کار دێنن وه‌ک نامۆرێک له
نامۆره‌کانی شیتهلێ نابووری

ئامانجه‌کان

- دۆزینه‌وه‌ی داتاشراوی
نەخشە بەجێبه‌جێکردنی
رێساکانی یه‌که‌می
داتاشراو.

زاراوه‌کان
Vocabulary

Slope لاری

Derivative داتاشراو

داتاشراوی یه‌که‌م

First derivative

داتاشراوی دووهم

Second derivative

ئابووری ناسه‌کان بێرکاری به‌کار دێنن بۆ دۆزینه‌وه‌ی نمونه‌کانی که یارمه‌تی لێکۆڵینه‌وه‌ی چالاکیه‌ جیاوازه‌کانی ئابووری ده‌دات وه‌ک به‌ره‌مه‌پێنان و فرۆشراوه‌کان و قازانجه‌کان و... هتد ئه‌گه‌ر دامه‌زراوه‌یه‌ک که جۆرێک له‌ نامۆری ساده دروست ده‌کات به‌نمونه وه‌ر بگرین هه‌ول بده‌ین نمونه‌یه‌ک بۆ تێچوونی به‌ره‌مه‌پێنان بدۆزینه‌وه ده‌بینین که تێچووی به‌ره‌مه‌پێنان له‌ دووبه‌ش بیکدیته‌. به‌شی نه‌گۆر که قه‌ت ناگۆرێت بری به‌ره‌مه‌پێنان هه‌ر چه‌ند بێت. به‌شی گۆراو ده‌گۆرێت به‌ گۆرانی هێندى به‌ره‌م. که هێمای F بۆ به‌شی نه‌گۆر و هێمای x بۆ ژماره‌ی یه‌که‌کانی به‌ره‌مه‌پێنان، دابنێن ئه‌گه‌ر تێچوونی یه‌که یه‌که بکاته m ده‌توانین $C = mx + F$ بنووسین کاتی که C تێچوونی به‌ره‌مه‌پێنانی گشتیه‌.

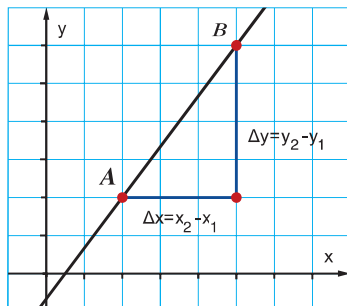
ئه‌گه‌ر به‌ره‌مه‌پێنانی 100 یه‌که بکاته 500 000 دینار، ئایا کاریگه‌ری به‌ره‌مه‌پێنانی یه‌که‌یه‌کی زیاتر چه‌نده له‌سه‌ر تێچوونی به‌ره‌مه‌پێنانی گشتی؟ ئاشکرایه که به‌ره‌مه‌پێنانی یه‌که‌یه‌کی زیاتر تێچوونی به‌ره‌مه‌ی گشتی به‌برێ 5000 دینار زیاد ده‌کات ئابووری ناسه‌کان به‌و زیاده ده‌لێن تێچوونی په‌راوێزی به‌ره‌مه‌پێنان.

له‌ نمونه‌ی پێشوو ئاماژه به‌ به‌ره‌مه‌پێنانی یه‌که یه‌که له‌ تێچوونی به‌ره‌مه‌پێنانی گشتی ده‌کات که m ، به‌لام کاره‌که به‌م شێوه‌یه‌ نییه له‌ باره‌کانی تر کاتی که نمونه بێرکاریه‌که‌ی تێچوونی به‌ره‌مه‌پێنانی نه‌خشه‌یه‌کی هێلی نییه (نەخشە‌ی دووجایه‌). له‌م پۆله‌دا فێری چه‌مه‌کان و کارامه‌یه‌یه‌کان ده‌بین که یارمه‌تیده‌رن بۆ شیکارکردنی ئه‌و پرسیاره و پرسیاره‌کانی تر.

ئه‌گه‌ر بگه‌ڕێینه‌وه بۆ نمونه‌ی پێشوو ده‌بینین په‌راوێزی تێچوونی به‌ره‌مه‌پێنانی په‌راوێزی ده‌کاته m لاری راسته‌هێلی $C = mx + F$ که نمونه‌ی تێچوونی گشتی به‌ره‌مه‌پێنان، و ده‌توانین به‌شێوه‌ی پێژیه‌ی گۆرانی تێچوونی به‌ره‌مه‌پێنان بۆ گۆرانی هێندی به‌ره‌مه‌پێناو وه‌ک ئه‌مه‌ی خواره‌وه

$$m = \frac{C_2 - C_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

Δ پیتیک‌ی یۆنانیه‌ به‌ (ده‌لتا) ده‌خوێندریته‌وه.



ئه‌گه‌ر ته‌ماشای وێنه‌ی به‌رامبه‌ر بکه‌ین ده‌بینین

راسته‌هێلیک به‌ دوو خاڵی A و B دا ده‌روات لاری

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

راسته‌هێلی m ده‌کاته

که ده‌کاته پێژیه‌ی گۆرانی به‌های y بۆ گۆرانی به‌های x .

ده‌رده‌که‌وێت که لاری هه‌مان به‌های هه‌یه ئه‌گه‌ر A و B

هه‌ر خاڵێک بن له‌سه‌ر راسته‌هێله‌که.

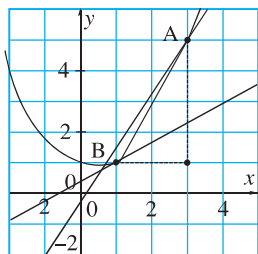
ئایا پرسیارت کردوه لاری هێلیکی چه‌ماوه چیه‌ بۆ

نمونه‌ی نه‌خشه‌ی $y = x^2$.

ناتوانریت پیناسه‌ی لاری نه‌خشه‌ی $y = x^2$ به‌م ریگایه‌ی پیشو بکریت، چونکه هیلیکی چه‌ماویه، به‌لام بیرکاری زانه‌کان گریی ئەم نه‌خشه و نه‌خشه‌کانی تریشیان چاره‌سەر کردوو له ریگای پیناسه‌کردنی لارییه‌وه له هەر خالیگ له خاله‌کانی دا.

لاری نه‌خشه‌یه‌ک له خالیگ له خاله‌کانی پروونکردنه‌وه‌که‌ی

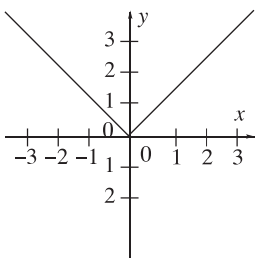
- لاری نه‌خشه یان پروونکردنه‌وه‌که‌ی له خالی B سەر پروونکردنه‌وه‌که‌ی بریتییه له لاری لیکه‌وتی چه‌ماوه‌که (پروونکردنه‌وه‌که‌ی) لهو خاله‌دا.



بۆ شیکردنه‌وه‌ی ئەو پیناسانه بیرکاری زانه‌کان له خالی B و خالی A که نزیکه لیی له‌سەر پروونکردنه‌وه‌که‌ی دوو راسته‌هیلل ده‌کێشن که به‌و دوو خاله‌دا ب‌روات و لیکه‌وتی چه‌ماوه‌که له خالی B ده‌کێشن (تەماشای وێنە‌ی به‌رامبەر بکه).

گریمان خالی B جیگیره و خالی A له‌سەر پروونکردنه‌وه‌که ده‌جوولیت ئەگەر وات دانا که A ده‌جوولیت له‌سەر چه‌ماوه‌که له B نزیکه‌بێته‌وه

ده‌بینین راسته‌هیللی AB له لیکه‌وته‌که نزیکه‌بێته‌وه به ئاراسته‌ی جووتبوون له‌گه‌ڵی ده‌توانین ئەمه‌ ده‌رب‌رین به‌وه‌ی که لیکه‌وته‌که بریتییه‌له ئامانجی راسته‌هیللی AB ، کاتی A له B نزیک ده‌بێته‌وه. ئەمه‌ش پیناسه‌ی بیرکاری زاناکانمان بۆ شیده‌کاته‌وه بۆ لاری نه‌خشه‌ی f له خالی B .



ئایا هه‌موو نه‌خشه‌یه‌ک له‌هەر خالیکی چه‌ماوه‌که‌یدا لاری هه‌یه؟ وه‌لام : نه‌خێر.

ئەگەر تەماشای پروونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی $f(x) = |x|$ بکه‌ین ده‌بینین که لیکه‌وتی نییه له خالی $(0, 0)$ ده‌رده‌چێت که لاری ئەم نه‌خشه‌یه پیناسه نه‌کراوه له خالی بنه‌رته‌دا، به‌لام زۆربه‌ی ئەو نه‌خشانه‌ی که وه‌ریان ده‌گرین لارییان هه‌یه له‌هەر خالیگ له خاله‌کانی سەر پروونکردنه‌وه‌که‌ی.

داتاشراوی نه‌خشه

- داتاشراوی نه‌خشه‌ی f بریتییه‌له نه‌خشه‌ی f' که هه‌ربه‌هایه‌ک له به‌هایه‌کانی x ده‌به‌ستێته‌وه به لاری نه‌خشه‌که له خالی $(x, f(x))$ ئەگەر پیناسه‌کراوبێت.

چۆن داتاشراوی نه‌خشه ده‌دۆزیه‌وه؟

بۆ دۆزینه‌وه‌ی داتاشراوی نه‌خشه بیرکاری زانه‌کان چەند پ‌سایه‌کیان داناوه و پ‌ستییه‌کانیان سه‌لماندوو له‌م به‌شه‌دا ئەم پ‌سایانه فیژده‌بی و چۆن به‌کاریان ده‌هێنیت.

پ‌سای داتاشراوی نه‌خشه‌ی نه‌گۆڕ

- نه‌خشه‌ی نه‌گۆڕ نه‌خشه‌یه‌که هاوکێشه‌که‌ی به‌شیوه‌ی $f(x) = c$ ده‌نوسریت کاتی c ژماره‌یه‌کی پ‌ستییه. داتاشراوی نه‌خشه‌ی نه‌گۆڕ $f(x) = c$ بریتییه‌له نه‌خشه‌ی $f'(x) = 0$.

نمونہ

1

دوڑینہ وادی داتاشراوی نهخشہی نهگور

داتاشراوی نهخشہی $f(x) = -3$ بدوڑوہ

شیکار

دهتوانیت به پشت بهستن به پیسای داتاشراوی نهخشہی نهگور بنوسیت $f'(x) = 0$

ههولبدده داتاشراوی نهخشہی $f(x) = \sqrt{3}$ بدوڑوہ.

پیسای داتاشراوی نهخشہی هیلی

• داتاشراوی نهخشہی هیلی $f(x) = ax + b$ بریتیه له نهخشہی $f'(x) = a$

نمونہ

2

دوڑینہ وادی داتاشراوی نهخشہی هیلی

داتاشراوی نهخشہی هیلی $f(x) = \pi x - \sqrt{2}$ بدوڑوہ

شیکار

دهتوانیت به پشت بهستن به پیسای داتاشراوی نهخشہی هیلی دهکاته $f'(x) = \pi$

داتاشراوی نهخشہی $f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{3}$ بدوڑوہ.

نهخشہی هیزی نهخشہیه که پیساکه به شیوهی $f(x) = x^n$ دنوسریت که n ژمارهیه کی تهواوی موجه به.

ههولبدده

پیسای داتاشراوی نهخشہی هیز

• داتاشراوی نهخشہی $f(x) = x^n$ بریتیه له نهخشہی $f'(x) = nx^{n-1}$

نمونہ

3

دوڑینہ وادی داتاشراوی نهخشہی هیز

داتاشراوی نهخشہی $f(x) = x^5$ بدوڑوہ

شیکار

دهتوانیت به پشت بهستن به پیسای داتاشراوی نهخشہی هیز دهپته $f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$

داتاشراوی نهخشہی $f(x) = x^{12}$ بدوڑوہ.

دهتوانری پیسای نهخشہی هیز فراوانتر بکریت بو نهخشهکانی $f(x) = x^p$ کاتی P ژمارهیه کی پیژدهی سالب یان موجه بیت.

ههولبدده

فراوانکردنی پیسای داتاشراوی نهخشہی هیز

• داتاشراوی نهخشہی $f(x) = x^p$ کاتی P ژمارهیه کی پیژدهیه دهکاته $f'(x) = px^{p-1}$

نمونە

4

دۆزىنەۋەى داتاشراۋى نەخشەى ھېزى

$$g(x) = \sqrt{x} \quad \text{ب}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ا}$$

بدۆزەۋە

شىكار

ھەرنەخشەيەك بە شىۋەى نەخشەى ھېزى بنووسە

$$g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

دەتوانىت پىشت بە رېساي فراوانكراۋى داتاشراۋى نەخشەى ھېزى بېسەستىت

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad f'(x) = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

ھەۋلېدە

داتاشراۋى نەخشەى $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ بدۆزەۋە.

رېساي داتاشراۋى ئەنجامى لېكدانى نەخشەى ھېزى لە ژمارەيەكى پاستى

$$\bullet \text{ داتاشراۋى نەخشەى } g(x) = af(x) \text{ بىرېتېيەلە نەخشەى } g'(x) = af'(x)$$

نمونە

5

دۆزىنەۋەى داتاشراۋى ئەنجامى لېكدانى نەخشەى ھېزى لە ژمارەى پاستى

$$\text{داتاشراۋى نەخشەى } f(x) = -5\sqrt[5]{x^3} \text{ بدۆزەۋە}$$

شىكار

نەخشەكە بە شىۋەى ئەنجامى لېكدانى نەخشەى ھېزى لە ژمارەيەكى پاستى بنووسە:

$$f(x) = -5\sqrt[5]{x^3} = -5x^{\frac{3}{5}}$$

دەتوانىت پىشت بە رېساي داتاشراۋى ئەنجامى لېكدانى نەخشەى تۈانى لە ژمارەى پاستى بېسەستىت.

$$f(x) = -5\left(x^{\frac{3}{5}}\right) \Rightarrow f'(x) = -5\left(\frac{3}{5}\right)\left(x^{\frac{3}{5}-1}\right) = -3x^{-\frac{2}{5}} = -3\frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = -\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}},$$

ھەۋلېدە

داتاشراۋى نەخشەى $f(x) = \frac{-4}{x^5}$ بدۆزەۋە.

لەبەرئەۋەى داتاشراۋى نەخشەيەك ئەۋىش نەخشەيەكەۋاتە دەتۈانرېت داتاشراۋەكەى بدۆزىتتەۋە.

بۆيە بە داتاشراۋى نەخشەكە دەۋترېت داتاشراۋى يەكەم و بە داتاشراۋى داتاشراۋەكە دەۋترېت

داتاشراۋى دوۋەم.

داتاشراۋى دوۋەم

• داتاشراۋى دوۋەمى نەخشەى f دەكاتە داتاشراۋى داتاشراۋەكەى بەشىۋەى f^n دەنۈوسرېت

$$\text{ۋاتە } f'' \text{ . } f''(x) = (f')'(x)$$

دۆزىنەۋەدى داتاشراۋى يەكەم و داتاشراۋى دوۋەم

داتاشراۋى يەكەم و داتاشراۋى دوۋەمى نەخشە $f(x) = \frac{x^3}{6}$ بدۆزەۋە

شىكار

نەخشەكە بە شۆۋەى ئەنجامى لىكدانى نەخشەى ھىز لە ژمارەى پاستى بنووسە

$$f(x) = \frac{x^3}{6} = \frac{1}{6}x^3$$

دەتوانىت پشت بە پړسای داتاشراۋى ئەنجامى لىكدانى نەخشەى توانى لە ژمارەى پاستى و پړسای داتاشراۋى نەخشەى توانى بېستىت.

$$f'(x) = \frac{1}{6}(x^3)' = \frac{1}{6}(3)(x^{3-1}) = \frac{1}{2}x^2$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' = \frac{1}{2}(2)(x^{2-1}) = x$$

هەولبەدە داتاشراۋى يەكەم و داتاشراۋى دوۋەمى نەخشەى $f(x) = \frac{-4}{x^5}$ بدۆزەۋە.

راھىنان

بەردەوامبوون لە بىر كاریدا

1 جياوازی لە نۆوان لارى نەخشەى ھىلى و نەخشەى ناھىلى چىە.

2 شىکردنەۋەىەك بەھىنەرەۋە بۆ پېناسەى لارى نەخشەىەك لە ھەر خاڵىك لەخالەكانى پوونكردنەۋەكەى.

راھىنانى ئاراستە كراو

داتاشراۋى ئەم نەخشانە بدۆزەۋە

$f(x) = 0$ 6	$f(x) = \frac{5}{8}$ 5	$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 4	$f(x) = -\sqrt{5}$ 3
$f(x) = x$ 9	$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}x - \frac{5}{6}$ 8	$f(x) = 3x - 4$ 7	
$f(x) = \sqrt{x^5}$ 12	$f(x) = \frac{1}{x^3}$ 11	$f(x) = x^{11}$ 10	
$f(x) = -\frac{1}{x^3}$ 15	$f(x) = -\frac{1}{x^{11}}$ 14	$f(x) = \sqrt[4]{x^3}$ 13	
$f(x) = \frac{3}{4x}$ 18	$f(x) = 3\sqrt{x} - 4$ 17	$f(x) = 3x + 5$ 16	

راھىنان و جىيەجىكردن

داتاشراۋى ئەم نەخشانە بدۆزەۋە

$f(x) = \frac{9}{x^5}$ 21	$f(x) = 3x^2$ 20	$f(x) = 3x^{\frac{2}{5}}$ 19
$f(x) = 2\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ 24	$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$ 23	$f(x) = \frac{9}{\sqrt{x}}$ 22

$$f(x) = 9x^{-5} \quad 27$$

$$f(x) = \frac{2}{3\sqrt{x}} \quad 26$$

$$f(x) = \frac{3x^2}{4} \quad 25$$

$$f(x) = \frac{1}{2x^2\sqrt{x}} \quad 30$$

$$f(x) = x\sqrt{x} \quad 29$$

$$f(x) = \frac{6}{\sqrt[3]{x}} \quad 28$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x}} \quad \text{داتاشراوی یه کهم و دووه می ئهم نه خشه یه بدوژه وه} \quad 31$$

$$f(x) = \frac{x^6}{6} \quad \text{داتاشراوی یه کهم و دووه می ئهم نه خشه یه بدوژه وه} \quad 32$$

روانین بو دواوه



33 هاوکی شه ی راسته هی لیک بدوژه وه که به دوو خالی (0, 1) و (3, 3) دا ده پوات.

$$\begin{cases} 2x = 3y - 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad \text{سسته می ئهو دوو هاوکی شه هی لیه شیکار که} \quad 34$$

35 سسته مه که ی پیشو شیکار که به به کار هی نانی ریژکرا وه کان.

روانین بو پیشه وه



36 داتاشراوی ئهم دوو نه خشه یه بدوژه وه $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt{x^3}$.

37 دوو نه خشه ی پر سیاری پیشو به کار بی نه و هاوکی شه نه خشه ی $h(x) = f(x)g(x)$ و

هاوکی شه نه خشه ی $k(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ بنو سه.

به شیوه ی هیژه کانی x ، داتاشراوی نه خشه ی h بدوژه وه و به راوردی بکه له گه ل ئه وه ی

ده سته ده که وی ت له نه خشه ی k .

چ ده رئه نجام یکت ده رباره ی داتاشراوی $f(x)g(x)$ ده بی ت؟

داتاشراوی دووهم

2 Derivative



بۆچی
داتاشراوی یهكهم و دووهم
بهكار دیت بۆ لیکۆلینهوهی تهنیکی
جووڤو لهسهر هیلکی پاست.

لهوانه‌ی پیشوو چهند پرسیایه‌کی
داتاشراو فیروبویت و لهم
وانه‌یه‌شدا هندی پرسیای تر
فیروهبیت که یارمه‌تیت دهدات بۆ
دۆزینه‌وه‌ی داتاشراوی چهند
نه‌خشه‌یه‌کی فراوانترو ئالۆزتر.

پرسیاکانی داتاشراو که لهم وانیه‌دا فیرو ده‌بیت به‌ستراوه‌ته‌وه به‌و کردارانه‌ی له‌سهر نه‌خشه‌کان
ئه‌نجامی ده‌ده‌یت وه‌ک کۆکردن و که‌مکردن و لیکدان و دابه‌شکردن. ئه‌گهر f و g دوو نه‌خشه‌ بن
ده‌توانیت کۆیان بکه‌یه‌ته‌وه ئه‌وا $f + g$ بریتیه‌ له‌و نه‌خشه‌ی که پیناسه‌کراوه به‌ هاوکێشه‌ی
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ و ده‌توانیت جیاوازی ئیوانیان وه‌ک $f - g$ بنووسیت که نه‌خشه‌یه‌که
پیناسه‌کراوه به‌ هاوکێشه‌ی: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

پرسیای داتاشراوی سه‌رجه‌م یان جیاوازی دوو نه‌خشه

• داتاشراوی سه‌رجه‌م و جیاوازی دوو نه‌خشه‌ به‌م پرسیایه‌ی خواره‌وه هه‌ژمار ده‌کری‌ت

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) \quad \text{یان}$$

دۆزینه‌وه‌ی داتاشراوی سه‌رجه‌می دوو نه‌خشه

داتاشراوی نه‌خشه‌ی $h(x) = 3x^2 - 5x + 4$ بدۆزه‌وه

شیکار

سه‌رته‌ نه‌خشه‌ی h وه‌ک سه‌رجه‌می دوو نه‌خشه‌ی f و g بنووسه.

ئه‌گهر نه‌خشه‌ی $f(x) = 3x^2$ و نه‌خشه‌ی $g(x) = -5x + 4$ ئه‌وا

$$h(x) = (3x^2) + (-5x + 4) = f(x) + g(x)$$

به‌ پشت به‌ستن به‌ پرسیای داتاشراوی سه‌رجه‌می دوو نه‌خشه‌ ده‌توانیت

بنووسیت و له‌به‌رئه‌وه‌ی $f'(x) = 6x$ و $g'(x) = -5$ ئه‌وا $h'(x) = 6x - 5$

هه‌ولیده داتاشراوی نه‌خشه‌ی $f(x) = 5x^4 + 3x - \sqrt{3}$ بدۆزه‌وه.

وانه‌ی

2

ئامانجه‌کان

- دۆزینه‌وه‌ی داتاشراوی
نه‌خشه‌ به‌به‌کاره‌ینانی
پرسیاکانی داتاشراو

نموونه

دۆزینه‌وه‌ی داتاشراوی جیاوازی نیوان دوو نه‌خشه

داتاشراوی نه‌خشه‌ی $h(x) = 3x^2 - 5x + 4$ بدۆزه‌وه

شیکار

سهرتا نه‌خشه‌ی h به شیوه‌ی دوو نه‌خشه‌ی f و g بنووسه ئه‌گهر نه‌خشه‌ی $f(x) = 3x^2$ و نه‌خشه‌ی

$$h(x) = (3x^2) - (5x - 4) = f(x) - g(x) \text{ بیټ ئه‌وا } g(x) = 5x - 4$$

ده‌توانیت پشت به‌رپسای داتاشراوی جیاوازی نیوان دوو نه‌خشه‌ی به‌ستیت، ئه‌وا بنووسیت

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \text{ له‌به‌رئوه‌ی } f'(x) = 6x \text{ و } g'(x) = 5 \text{ ئه‌وا } h'(x) = 6x - 5.$$

هه‌ولبده داتاشراوی نه‌خشه‌ی $f(x) = 2x^3 - 3x - 5$ بدۆزه‌وه.

ئه‌گهر f و g دوو نه‌خشه‌ی بن ده‌توانریت به‌شیوه‌ی ئه‌نجامی لیکدانی دوو نه‌خشه‌ی f و g بنووسریت،

بریتیه‌له نه‌خشه‌یه‌ک هاوکیشه‌که‌ی به‌م شیوه‌یه پیناسه ده‌کریت: $(fg)(x) = f(x) \times g(x) = f(x)g(x)$

رپسای داتاشراوی ئه‌نجامی لیکدانی دوو نه‌خشه

• داتاشراوی ئه‌نجامی لیکدانی دوو نه‌خشه به‌م رپسایه‌ی خواره‌وه هه‌ژمار ده‌کریت.

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

دۆزینه‌وه‌ی داتاشراوی ئه‌نجامی لیکدانی دوو نه‌خشه

داتاشراوی ئه‌م نه‌خشه‌یه $h(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 3)$ بدۆزه‌وه.

شیکار

سهرتا نه‌خشه‌ی h به شیوه‌ی ئه‌نجامی لیکدانی دوو نه‌خشه‌ی f و g بنووسه ئه‌گهر نه‌خشه‌ی $f(x) = \frac{1}{x}$

$$h(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 3) = f(x)g(x) \text{ و نه‌خشه‌ی } g(x) = x^2 + 3 \text{ بیټ ئه‌وا}$$

داتاشراوی هه‌ریه‌ک له‌م دوو نه‌خشه‌یه هه‌ژماریکه

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)(x^{-2}) = -\frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = (x^2)' + (3)' = (2x) + (0) = 2x$$

ده‌توانیت پشت به‌رپسای داتاشراوی ئه‌نجامی لیکدانی دوو نه‌خشه به‌ستیت

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\text{له‌به‌رئوه‌ی } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ و } g'(x) = 2x \text{ ئه‌وا}$$

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)(x^2 + 3) + \left(\frac{1}{x}\right)(2x)$$

$$h'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)(x^2 + 3) + \left(\frac{1}{x}\right)(2x) = -1 - \frac{3}{x^2} + 2 = 1 - \frac{3}{x^2} \text{ یان}$$

یان دوتوانین دوو نهخشه که لهیه کتری بدهین ئینجا داتاشراوه که بدۆزینه وه

$$h(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 3) = x + \frac{3}{x} = x + 3\frac{1}{x}$$

$$h'(x) = \left(x + 3\frac{1}{x}\right)' = (x)' + \left(3\frac{1}{x}\right)' = 1 + 3\left(\frac{1}{x}\right)' = 1 + 3\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{3}{x^2}$$

ههولبده داتاشراوی نهخشه ی $f(x) = (x^2 + 5)\sqrt{x}$ بدۆزه وه

ئهگەر f و g دوو نهخشه بن دوتوانری به شیوه ی ئهنجامی دابه شکردنی دوو نهخشه ی $\frac{f}{g}$ بنووسریت بریتیه له نهخشه یه که بهم هاوکی شه ی خواره وه پیناسه کراوه:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{کاتی که } g(x) \neq 0$$

پیسای داتاشراوی ئهنجامی دابه شبوونی دوو نهخشه

• داتاشراوی ئهنجامی دابه شبوونی دوو نهخشه بهم پیسایه ی خواره وه ههژمار دهکریت

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

دۆزینه وه ی داتاشراوی ئهنجامی دابه شبوونی دوو نهخشه

داتاشراوی نهخشه ی $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ بدۆزه وه.

شیکار

سه ره تا نهخشه ی h به شیوه ی ئهنجامی دابه شبوونی دوو نهخشه ی f و g بنووسه ئهگەر نهخشه ی $f(x) = x^2 - 1$ و نهخشه ی $g(x) = x^2 + 1$ ئهوا داتاشراوی دوو نهخشه ی f و g ههژماریکه

$$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$f'(x) = (x^2 - 1)' = (x^2)' - (1)' = (2x) - (0) = 2x$$

$$g'(x) = (x^2 + 1)' = (x^2)' + (1)' = (2x) + (0) = 2x$$

دوتوانیت پشت به پیسای داتاشراوی ئهنجامی دابه شبوونی دوو نهخشه ببه ستیت

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

له بهر ئه وه ی $f'(x) = 2x$ و $g'(x) = 2x$

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{(2x)(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{(2x)(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x(x^2 + 1 - (x^2 - 1))}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

ههولبده داتاشراوی نهخشه ی $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$ بدۆزه وه

نموونه

زۆر نەخشە ھەيە بە شۆوھى ھېزى نەخشەيەكى تر دەنووسرېت بۆ نموونە نەخشەي $f(x) = (x^2 + 1)^4$ ئەو ھېزىكە لە ھېزەكانى نەخشەي $u(x) = x^2 + 1$ كە بە شۆوھى $f(x) = [u(x)]^4$ دەنووسرېت.

رېساي داتاشراوى ھېزى نەخشە (نەخشەي نەخشە)

• ئەگەر نەخشەي f يەكى لە ھېزەكانى ھېزى نەخشەي u بېت كە $f(x) = [u(x)]^p$ كاتى p ژمارەيەكى رېژەيى بېت ئەوا داتاشراوھەكى بەم رېسايە ھەژماردەكرېت.

$$f'(x) = pu'(x)[u(x)]^{p-1}$$

نموونه

دۆزىنەوھى داتاشراوى ھېزى نەخشە

داتاشراوى ئەم نەخشەنى خواروھە بدۆزەوھ

ج $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$

ب $f(x) = \frac{1}{x^3 + 2x + 1}$

ا $f(x) = (x^2 + 1)^4$

شيكار

سەرەتا نەخشەكە بە شۆوھى ھېزى نەخشەيەكى تر بنووسە وەك $u(x)$ و $u'(x)$ و p

ا $u(x) = x^2 + 1$ $u'(x) = 2x$ $p = 4$ لەوھە دەردەچېت كە

$$f'(x) = pu'(x)[u(x)]^{p-1} = 4(2x)(x^2 + 1)^3 = 8x(x^2 + 1)^3$$

ب $u(x) = x^3 + 2x + 1$ $u'(x) = 3x^2 + 2$ $p = -1$ لەوھە دەردەچېت كە

$$f'(x) = pu'(x)[u(x)]^{p-1} = (-1)(3x^2 + 2)(x^3 + 2x + 1)^{-2} = \frac{-3x^2 - 2}{(x^3 + 2x + 1)^2}$$

ج $u(x) = x^2 - x + 2$ $u'(x) = 2x - 1$ $p = \frac{1}{2}$ لەوھە دەردەچېت كە

$$f'(x) = pu'(x)[u(x)]^{p-1} = \frac{1}{2}(2x - 1)(x^2 - x + 2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 2}}$$

ھەولبەدە داتاشراوى ئەم نەخشەنى بدۆزەوھ:

ج $f(x) = \sqrt{x^6 - 2}$

ب $f(x) = \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 2}$

ا $f(x) = (x^3 + 4x^2 + 2)^5$

راھبەن

بەردەوامبوون لە بىر كاریدا

1 رۈونىبەكەوھ چۆن رېساي داتاشراوى سەرچەم و داتاشراوى لېكدانى نەخشە لە ژمارەيەكى

پاستى داتاشراوى ھېز بەكاردېنى بۆئەوھى دەريبەخەي كە داتاشراوى نەخشەي ھېلى

$$f(x) = ax + b \text{ دەكاتە } f'(x) = a.$$

2 رېساكانى داتاشراو بەكاربھێنە بۆئەوھى دەريبەخەي كە داتاشراوى نەخشەي دووجا

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ دەكاتە } f'(x) = 2ax + b$$

راھینانی ئاراستە کراو

داتاشراوی ئەم نەخشەنە دیڤ بدۆزەو؟

$$f(x) = 5x^2 + \frac{2}{x^3} \quad \text{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \quad \text{4}$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2} + 5 \quad \text{5}$$

$$f(x) = (x^2 + 2x)\sqrt{x+1} \quad \text{6}$$

$$f(x) = \frac{5x^3 + x - 1}{x^2 + 1} \quad \text{7}$$

$$f(x) = (5x^2 + 3x + 5)^7 \quad \text{8}$$

راھینان و جیھە جێکردن

داتاشراوی بۆ ھەر نەخشەنە بدۆزەو:

$$f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} \quad \text{11} \quad f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \quad \text{10} \quad f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} \quad \text{9}$$

$$f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt[3]{x-2} \quad \text{14} \quad f(x) = \sqrt[3]{x}\left(\frac{6}{\sqrt{x}} + 1\right) \quad \text{13} \quad f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\sqrt{x+1} \quad \text{12}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+5}}{x^2+1} \quad \text{17} \quad f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{x+1} \quad \text{16} \quad f(x) = \frac{x^3-2x}{x-1} \quad \text{15}$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 \quad \text{20} \quad f(x) = \sqrt{3x^2-5x+2} \quad \text{19} \quad f(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^3 \quad \text{18}$$

21 بەرپۆلەبەردنی کۆگا کراوەکان نەخشە $A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$ بەکار دێت وەک نمونە یەك بۆ بەرپۆلەبەردنی کۆگا کراوەکان لە کۆگا گەورەکاندا. کاتیك

• A ناوەندنی تیچووی خەرجی کۆگا کە یەك لە ھەفتەدا.

• q ھێندە کێراو

• k تیچوونی داواکاری کێراو

• c نرخێ کێراو یەك دانە (یەك دەنگ)

• m ژمارە یەك یەكەنە کێراو

• h تیچوونی ەمبارکردنی یەك دانە (یەك دەنگ)

داتاشراوی یەكەم و دووھەمی نەخشە A بدۆزەرەو.

22

گیره‌ی کاغز (مَشْبَك وَرَق) ده‌توانی به ئاسانی گیره‌ی کاغز بۆ سه‌روه له‌هه‌وادا فری بده‌یت، به به‌کاره‌ینانی شریتیکی لاستیکی. ئهم نه‌خشه‌یه بۆ دیاریکردنی به‌ری گیره‌که به‌مه‌تر به‌کار دیت $h(t) = 39.2t - 4.9t^2$ دوا‌ی t چرکه له هه‌لدانییدا. داتا‌شراوی ئهم نه‌خشه‌یه $h'(t)$ خیرایی گیره‌که ده‌رده‌بریت له‌کاتی t دا.

ا خیرایی گیره‌که بدۆزه‌وه له‌کاتی t ، خیراییه‌که‌ی چهنده کاتی $t = 3$ ، $t = 4$ ، $t = 5$.

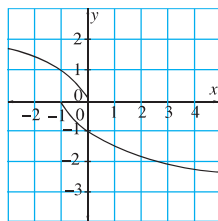
ب خیرایی گیره‌که چهنده کاتی ده‌گاته ئه‌وپه‌ری به‌ری پیش ده‌ست به هاتنه خواره‌وه بکات؟ وه‌لامه‌کان به‌کاربه‌ینه بۆ دۆزینه‌وه‌ی ئه‌وکاته‌ی گیره‌که پێ گه‌یشته‌ته ئه‌وپه‌ری به‌ری، و ئه‌و به‌رییه چهنده؟

ج له‌سه‌ر پروی مانگ نه‌خشه‌ی $h(t) = 39.2t - 0.79625t^2$ به‌کار دیت بۆ دیاریکردنی به‌ری گیره‌که به‌مه‌تر دوا‌ی t چرکه له ده‌رچوونی. خیرایی گیره‌که چهنده کاتی ده‌گاته ئه‌وپه‌ری به‌ری پیش ده‌ستکردن به هاتنه خواره‌وه‌ی؟ وه‌لامه‌که‌ت به‌کاربه‌ینه بۆ دۆزینه‌وه‌ی ئه‌و کاته‌ی گیره‌که پێ گه‌یشته‌ته ئه‌وپه‌ری به‌ری، و ئه‌و به‌رییه چهنده؟

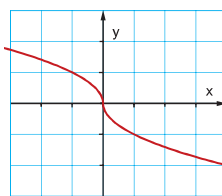
روانین بۆ دواوه



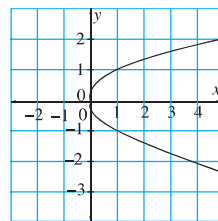
ده‌ری بخه کام له‌م چه‌ماوانه‌ی خواره‌وه نه‌خشه‌ ده‌نوینن یان نا، وه‌لامه‌که‌ت شیکه‌وه.



25



24



23

کام له‌م نه‌خشانه دوو جاییه؟

26

ب $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$

د $f(x) = 1 - 2x$

ا $f(x) = 1 - 2x + x^3$

ج $f(x) = 2x^3 + 4x^2$

روانین بۆ پیشه‌وه



27 نه‌خشه‌ی لادانی (شوین) جوولانی ته‌نیک له‌سه‌ر راسته‌هێڵیک بریتییه له $s(t) = t^3 - 3t + 50$ کاتی دووری به مه‌تروکات به خوله‌ک ده‌پۆریت دوا‌ی چهند خوله‌ک خیرایی ته‌نه‌که ده‌بیته سفر؟ شوینی ته‌نه‌که له‌وکاته‌دا کوێیه؟

جیبەجیکردنەکانی داتاشراو

Applications of Derivative

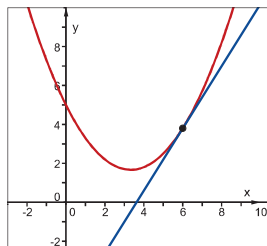


بۆچی
داتاشراوی یەکەم بەکار دێت بۆ
دۆزینەوهی گۆشەیی هەلەدانی گولەتۆپیک بۆ
نەوهی یگاتەر دوورترین دووری کە لە توانادایە.

داتاشراو لە زۆر بواردا بەکار دێت. ئیستا
بەکارهێنان لە سێ بواردا باس دەکەین
نواندنی پوونکردنەوهیی، جولانی تەن،
بوازی ئابووری

فێربوویت کە داتاشراوی نەخشەیی f لە خاڵی P دا لەسەر پوونکردنەوهکەیدا لاری لیکەوتی
چەماوەکەییە لەو خاڵەدا. ئەگەر داتاشراوی نەخشەییەکمان لە خاڵی P دا زانی ئەوا لاری
لیکەوتەکەمان زانی. ئەو کات شیوەی لاری-خاڵ و پۆتانی P بەکار دێت بۆ دۆزینەوهی
هاوکێشەیی لیکەوتەکە.

دۆزینەوهی هاوکێشەیی لیکەوتی برکەیی هاوتا لە یەکی لە خاڵەکانیدا



هاوکێشەیی لیکەوتی برکە هاوتای $f(x) = 0.3x^2 - 2x + 5$

لە خاڵی P دا کە پۆتانی یەکەمی $x = 6$ بدۆزەوه

شیکار

شیوەی لاری-خاڵ بۆ هاوکێشەیی راستەهێڵ بریتییه لە $y - y_1 = m(x - x_1)$

$x_1 = 6$ دراوه و $y_1 = f(6) = 3.8$ بۆ هەژمارکردنی لاری m ,

داتاشراوی نەخشەیی $f(x) = 0.3x^2 - 2x + 5$ دەدۆزینەوه کاتی $x = 6$.

$$f'(x) = (0.3x^2)' - (2x)' + (5)' = 0.3(x^2)' - 2(x)' + (5)' = 0.3(2x) - 2(1) + (0) = 0.6x - 2$$

بەهای m کاتی $x = 6$ دەکاتە $f'(6) = 0.6(6) - 2$ ، کەواتە لاری لیکەوتەکە دەکاتە 1.6
 $= 3.6 - 2 = 1.6$

ئیستا شیوەی لاری - خاڵ بۆ هاوکێشەیی راستەهێڵ بەکاربهێنە:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3.8 = 1.6(x - 6)$$

$$y = 1.6x - 5.8$$

هاوکێشەیی لیکەوتی برکە هاوتای $y = 0.3x^2 - 2x + 5$ لە خاڵی $P(6, 3.8)$ دا

دەکاتە $y = 1.6x - 5.8$.

هەولێدە هاوکێشەیی لیکەوتی چەماوەی برکە هاوتای $f(x) = 2x^2 + 3x - 6$ لە خاڵی P کە پۆتانی

یەکەمی $x = 1$ بدۆزەوه

وانەیی
3

ئامانجەکان

- داتاشراو بۆ دۆزینەوهی
پێوهی پەراویزکراوی
پێوهی ئابووری
بەکار دێنێت.
- بەکارهێنانی داتاشراو بۆ
دۆزینەوهی هاوکێشەیی
لیکەوتی چەماوەی نەخشە
لە خاڵیکی دیاریکراو.
- بەکارهێنانی داتاشراو
بۆ دۆزینەوهی خێرای و
تاوانی تەنیک لەسەر
هێڵیکی راست دەجووڵێت.

1 نونە

دۆزینه‌وه‌ی ھاوکیښه‌ی لیکه‌وتی برېگه‌ی ھاوتاو نښتوون له‌سهر لیکه‌وته‌که‌ی له‌ خالیگ له‌ خاله‌کانیدا

ھاوکیښه‌ی هه‌ریه‌که له‌ لیکه‌وت و نښتوونی سه‌رلیکه‌وت بۆ پروونکردنه‌وه‌ی برېگه‌ ھاوتای

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2 \text{ له‌خالی } p \text{ که پویه‌که‌ی } x = -2 \text{ بدۆزه‌وه.}$$

شیکار

شیوه‌ی لاری - خال بۆ ھاوکیښه‌ی راسته‌هیلکه ده‌کاته $y - y_1 = m(x - x_1)$.

هه‌مانه $x_1 = -2$ و $y_1 = f(-2) = -2$ بۆ هه‌ژمارکردنی لاری لیکه‌وته‌که ده‌بیت داتاشراوی نه‌خشه‌که بدۆزینه‌وه کاتی $x = -2$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' + (x)' - (2)' = \frac{1}{2}(x^2)' + 1 - 0 = \frac{1}{2}(2x) + 1 = x + 1$$

به‌های داتاشراوه‌که کاتی $x = -2$ ده‌کاته $f'(-2) = -2 + 1 = -1$ ټوا $m = f'(-2) = -1$ که‌واته لاری لیکه‌وته‌که m ده‌کاته -1 .

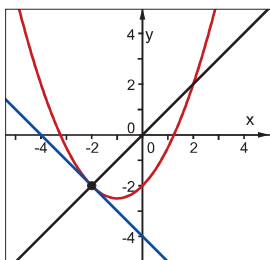
نیستا شیوه‌ی لاری - خال بۆ ھاوکیښه‌ی راسته‌هیل به‌کاربه‌یینه

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-2) = -1(x - (-2))$$

$$y = -x - 4$$

ھاوکیښه‌ی لیکه‌وتی برېگه‌ ھاوتای $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2$ له‌ خالی $P(-2, -2)$ ده‌کاته $y = -x - 4$.



بۆ دۆزینه‌وه‌ی ھاوکیښه‌ی نښتوون له‌سهر لیکه‌وته‌که یه‌که‌مجار

لاریه‌که‌ی ده‌دۆزینه‌وه له‌به‌رئوه‌ی نښجامی لیکدانی لاری لیکه‌وت و لاری نښتوون له‌سهری ده‌کاته -1 و لاری لیکه‌وته‌که -1 که‌واته لاری نښتوونه‌که ده‌کاته 1 .

نیستا شیوه‌ی لاری - خال بۆ ھاوکیښه‌ی راسته‌هیل به‌کاربه‌یینه.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-2) = 1(x - (-2))$$

$$y = x$$

ھاوکیښه‌ی نښتوون له‌سهر لیکه‌وته‌که له‌ خالی $P(-2, -2)$ ده‌کاته $y = x$.

هه‌ولېده

ھاوکیښه‌ی لیکه‌وت و نښتوون له‌ سهری له‌ خالیگ که پۆتوانی یه‌که‌می ده‌کاته $x = -2$ بۆ

چه‌ماوه‌ی برېگه‌ ھاوتای $f(x) = x^2 + x - 1$ بدۆزه‌وه.

کاتی ته‌نیک له‌سهر رېږه‌وئیکي راست ده‌جوولیت ټوا نه‌خشه‌ی $s = f(t)$ که شوینه‌که‌ی دیاری

ده‌کات له‌هه‌ر کاتیکی وه‌ک t پېی ده‌وتریت نه‌خشه‌ی شوین.

داتاشراوی یه‌که‌می ټوا نه‌خشه‌یه بریتییه له‌ خیرایی ته‌نه‌که له‌ هه‌ر کاتیکی t دابیت، به‌لام

داتاشراوی دووه‌می نه‌خشه‌که بریتییه له‌ تاودانی ته‌نه‌که واته تاودان زیاده‌کردن یان که‌مکردنی

خیرایی ته‌نه‌که ده‌گه‌ینیټ. ساده‌ترین جووله‌ جووله‌ی ته‌نیکه له‌سهر هیلئیکي راست به‌ خیرایه‌کی

نه‌گۆر که ناگۆریت به‌ گۆرانی کات. نه‌خشه‌ی شوین بۆ ټوا ته‌نه ده‌کاته نه‌خشه‌یه‌کی هیلئ به

شیوه‌ی $s(t) = vt + s_0$ که s_0 ده‌کاته به‌های ټوا نه‌خشه‌یه کاتی

$t = 0$ واته ده‌کاته شوینی ته‌نه‌که له‌کاتی ده‌رچوونیدا.

له‌لایه‌کی تر داتاشراوی ټوا نه‌خشه‌یه $s'(t) = v$ ده‌کاته خیرایی ټوا ته‌نه. ټهمه‌ش ټوا ده‌گه‌یه‌نیټ

که ټوا خیراییه‌ی پي‌ ده‌رپوات نه‌گۆره. تاودانی جووله‌ی ټوا ته‌نه بریتییه له‌ داتاشراوی دووه‌می

نه‌خشه‌ی شوین واته. $s''(t) = (v)' = 0$ ټهمه‌ش هه‌ر ټوا ده‌گه‌یه‌نیټ که خیرایی ته‌نه‌که ناگۆریت

ټوه‌ش پېشبینی ده‌کرا چونکه خیرایی ته‌نه‌که نه‌گۆره.

ئەندازىلارەكان دوو وشەى «خىرايى» و «تاودان» بۇ دەرىپىنى داتاشراوى يەكەم و داتاشراوى دووھى نەخشەكان بەكاردىنن كە باسى جوولەى تەنك بكات. ھەرۈھا ئابوورى ناسەكانىش دەستەواژەى تايىبەتيان ھەيە لەم بوارەدا. ئەوان دەستەواژەى «پەراوئىزى» (ھامىشى) بەكاردىنن. ئابوورى ناسەكان ژمارەيەك نەخشە دەخوئىن ۈك نەخشەى تىچوون $C(x)$ ، نەخشەيەكە بەپىي ژمارەى يەكەكانى بەرھەمھىنراو x .

پەراوئىزى تىچوون ئەو تىچوونە زىادەيەى كە دەردەچىت لە ئەنجامى بەرھەمھىنرانى يەكەيەكى زىاتەر. ئابوورى ناسەكان داتاشراوى نەخشەى تىچوون دادەننن بە نرخی نىككراوھىي گونجاو بۇ (پەراوئىزى تىچوون).

و ئەو داتاشراوھ بەكاردىنن ۈك پىناسەى بىركارىانەى پەراوئىزى تىچوون.

پەراوئىزى تىچوون و پەراوئىزى داھات

نمونە

ۋا دابنى $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 100$ نەخشەى تىچوونە (بەھەزاران دىنار) بۇ بەرھەمھىنرانى x ساردكەرەھى (بىراد) بچووك، كاتى ئاستى بەرھەمھىنران دەكەۋىتە نىۋان 8 تا 30 ساردكەرەھى. و نەخشەى $R(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$ نەخشەى دەستكەوت بىت (بە ھەزاران دىنار) لە ئەنجامى فروشتىنى x ساردكەرەھى. تىچوونى بەرھەمھىنرانى ساردكەرەھىيەكى زىاتەر چەندە ئەگەر ئاستى بەرھەم 10 ساردكەرەھى بىت لە پۇژىكدا. و چەند داھات زىاد دەكات لەكاتى فروشتىنى 11 «ساردكەرەھى» لە پۇژىكدا.

شىكار

تىچوونى زىاتەر بۇ بەرھەمھىنرانى ساردكەرەھى زىاتەر لە ئاستى بەرھەمھىنرانى 10 ساردكەرەھى پۇژانە، دەكاتە نرخی داتاشراوى نەخشەى تىچوون كاتى $x = 10$

$$C'(x) = (x^3)' - (6x^2)' + (15x)' + (100)' = 3x^2 - 12x + 15$$

$$C'(10) = 3(10)^2 - 12(10) + 15 = 300 - 120 + 15 = 195$$

تىچوونى زىاتىرى بەرھەمھىنرانى ساردكەرەھى زىاتەر لە ئاستى بەرھەمھىنرانى 10 ساردكەرەھى لە پۇژىكدا دەكاتە 195 ھەزار دىنار

داھاتى زىاتەر بۇ بەرھەمھىنران لە فروشتىنى 11 ساردكەرەھى لە جىياتى 10 ساردكەرەھى بىرىتييە لە پەراوئىزى داھات كە دەكاتە بەھاي داتاشراوى نەخشەى دەستكەوت كاتى $x = 10$

$$R'(x) = (x^3)' - (3x^2)' + (12x)' = 3x^2 - 6x + 12$$

$$R'(10) = 3(10)^2 - 6(10) + 12 = 252$$

داھاتى زىاتەر لە فروشتىنى ساردكەرەھى زىاتەر لە ئاستى بەرھەمھىنرانى 10 ساردكەرەھى لە پۇژىكدا دەكاتە 252 ھەزار دىنار

ۋا دابنى كە نەخشەى $C(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 160$ دەكاتە نەخشەى تىچوون (بەھەزاران دىنار) بەرھەمھىنرانى x تەختى نوستن كاتى ئاستى بەرھەمھىنران لە نىۋان 7 تا 20 تەختى نوستندا بىت و نەخشەى $R(x) = 2x^3 - 3x^2 + 12x$ نەخشەى دەستكەوتى (بەھەزاران دىنار) فروشتىنى x تەختى نوستن بىت.

تىچوونى بەرھەمھىنرانى تەختەيەكى نوستنى زىاتەر لە ئاستى بەرھەمھىنرانى 10 تەخت لە پۇژىكدا چەندە؟ و چەند داھات زىاد دەكات كاتى 11 تەختى نوستن لە پۇژىكدا بفروشتىت.

بهردهوامبون له بير كاريدا

1 چي واي له ئابووري ناسهكان كردوه كه داتاشراوي يه كه مي نه خشي تيچون به نزيككراوه يي به گونجاو دابنين بو هه ژماركردني پراويزي تيچون.

راڤيناني ئاراسته كراو

2 لاري ليكهوتي چهماوهي نه خشي $f(x) = x^3 + 3x - 1$ لهو خالي كه پوتاني يه كه مي $x = 1$ بدوزهوه.

3 نه خشي شوي تهنك كه له سهر هيلكي راست دهجو لپت بريتييه له $s(t) = t^4 - 3t^2 + 2$ شوي تهنكه و خيرا يي و تاوداني بدوزهروه دوي 7 چركه له سهره تاي دهرچوونييه.

4 پراويزي تيچون بو نه خشي تيچوني $C(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 50$ له ئاستي بهرهمه پينان $x = 8$ چهنده؟

راڤينان و جيبه جيكردن

5 لاري ليكهوتي چهماوهي نه خشي $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ لهو خالي كه پوتاني يه كه مي $x = 2$ بدوزهوه.

6 پوتاني يه كه مي نهو خاله بدوزهوه كه دهكه ويته سهر چهماوهي نه خشي $f(x) = x^4 + 2$ كاتي لاري ليكهوت كه ي لهو خاله دا بكا ته سفر.

7 هاوكيشي ليكهوتي چهماوهي نه خشي $f(x) = (x+1)^3 + 2$ لهو خالي كه پوتاني يه كه مي $x = -1$ بدوزهوه.

8 هاوكيشي ليكهوت و نهستون له سهر ليكهوتي چهماوهي نه خشي $f(x) = 2(x^2 - 3x + 1)$ لهو خالي كه پوتاني يه كه مي $x = 3$ بدوزهوه.

9 هاوكيشي ليكهوت و نهستون له سهر ليكهوت بو چهماوهي نه خشي $f(x) = x^4$ له خالي $(-1, 1)$ بدوزهوه.

10 وا دابني كه نه خشي تيچون به هزاران دينار بو بهرهمه پيناني ئاميري جل شوشتن بريتييه له.

$$C(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2$$

ا) نه گهر 100 ئاميري جل شوشتن (شورين) بهرهم بهيئريت ئايا ناوهندي تيچوني بهرهمه پيناني يه كه ئامير چهنده؟

ب) پراويزي تيچون له ئاستي بهرهمه پيناني 100 ئاميردا چهنده؟

ج) تيچوني بهرهمه پيناني 101 ئامير هه ژمار بكه و تيچوني بهرهمه پيناني 100 ئامير هه ژمار بكه ئينجا تيچوني بهرهمه پيناني يه كه ئاميري زياتر دهرته نجام بكه و بهروردی ئوهی پي گهشتويی له گه ل پراويزه تيچونه كه دا بكه. ئايا به كارهيئاني داتاشراو بو هه ژماركردني بهاي نزيككراوه ي پراويزي تيچون كاريكي گونجاوه؟

11 وا دابنى كە نەخشەى دەستكەوت داھات بە ھەزاران دىنار بۇ فروشتىنى ئامپىرى جل شويشتن

$$R(x) = 20000 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad \text{دەكاتە}$$

ا ئەگەر 100 ئامپىر بفروشرىت ئايا ناوھندى دەستكەوت لە فروشتن چەندە؟

ب پەراوئىزى دەستكەوت لە ئاستى بەرھەمھېنانى 100 ئامپىردا بدۆزەو.

ج داھاتى فروشتىنى 101 ئامپىر و داھاتى فروشتىنى 100 ئامپىر بدۆزەو ئىنجا فروشتىنى

يەك ئامپىرى زياتر دەرئەنجام بکە بەراوردى ئەوھى پېيگەيشتووى لەگەل پەراوئىزى

دەستكەوتدا بکە. ئايا بەکارھېنانى داتاشراو بۇ ھەژمارکردنى بەھای نزيککراوھى

پەراوئىزى دەستكەوت كاريكى گونجاو.

روانين بۆدواوھ

12 پۆوتانى ئەو خالانە بدۆزەو كە دەكەونە سەرچەماوھى نەخشەى $f(x) = x^3 - 3x + 2$

كاتى لارى لەو خالانەدا بکاتە سفر.

ھاوکیشەى ليکەوتى چەماوھ لە ھەر خالیک لەم خالانەدا بدۆزەو

روانين بۆپېشەوھ

13 چى دەلييت دەربارھى نەخشەيەك داتاشراوھكەى نەخشەيەكى نەگۆرە؟