١٢

حكومەتا هەرێما كوردستانێ
وەزارەتا پەروەردێ - رێڤەبەریا گشتی یا پرۆگرام و چاپەمەنیان

بیركاری بۆ هەمووان

پەرتووكا قوتابی
پۆلا دوازدێ زانستی

چاپا سێیێ
٢٧١٦ كوردی ٢٠١٦ زایینی ١٤٣٧ مشەختی

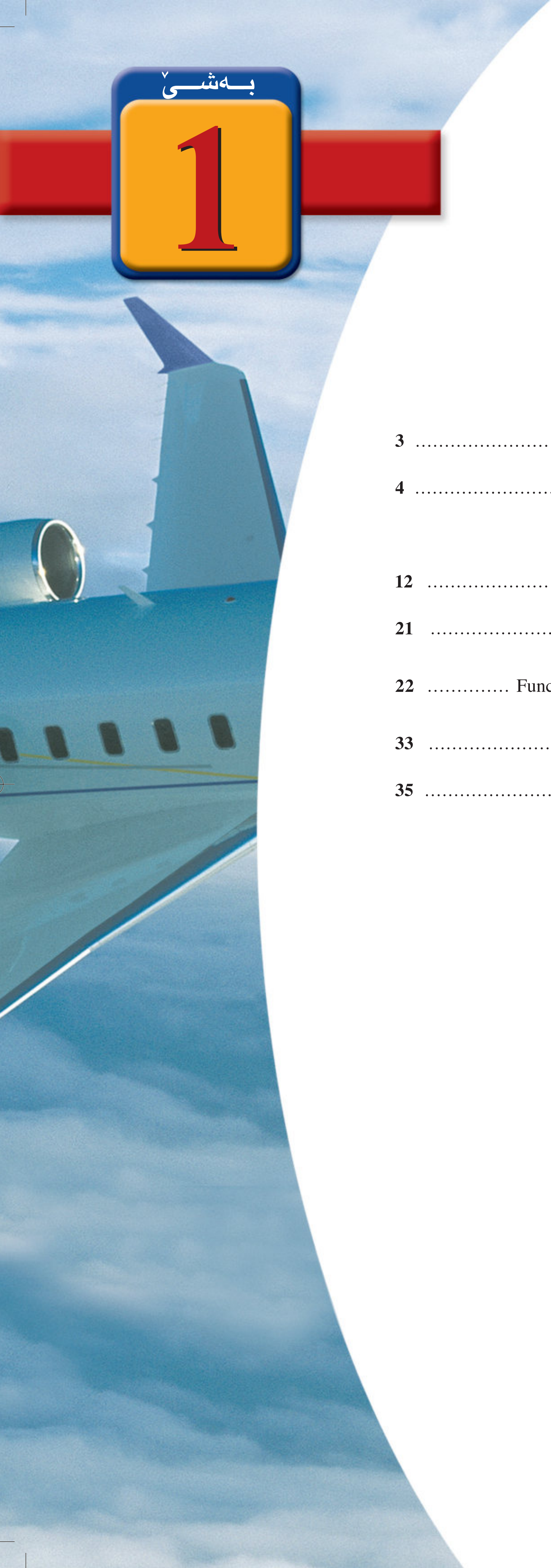
هەلسەنگاندنا زانستی
الياس حيدر الياس

وەرگێران و گونجاندن
شكرى حسن سلو
عصام الدين عبيد عمر
مشير الياس عبدالله

پێداچوونا چاپکرنێ
شكرى حسن سلو

پێداچوونا زمانی
طه ياسين طه

سەرپەرشتێ هونەری یێ چاپێ
عثمان پيرداود كواز
سعد محمد شريف صالح



بەشێ 1

وێنەیێن ڕوونكرنێ و سامپلێن هێلی

Graphs and Linear Models

ئەرێ تو یێ ئامادەیی؟ Are You Ready? 3

1–1 وێنەیێ ڕوونكرنێ و سامپل Graphs 4

2–1 نموونەیێن هێلی و تێكڕاییێن گوهۆڕینێ Linear Models and Rates of Change 12

ئەزموونا نیڤا بەشی (وانەیێن 1–2) Partial Test 21

3–1 نەخشە و وێنەیێن ڕوونكرنا وان Functions and Their Graphs 22

پێداچوونا بەشی Review 33

بەرهەڤكرن بۆ ئەزموونێ Test Prep 35

بەشێ 2

ئارمانج

Limits

ئەرێ تو یێ ئامادەیی؟ Are You Ready? 39

1–2 دەروازەیەك بۆ هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ
Introduction to Calculus 40

2–2 هەژمارکرنا ئارمانجان ب وێنەیێ ڕوونکرنێ و ب ژمارەی
Finding Limits Graphically and Numercially 46

3–2 هەژمارکرنا ئارمانجان Finding Limits 56

ئەزموونا نیڤا بەشی (وانەیێن 1–3) Partial Test 61

4–2 نەخشەیێن بەردەوام Continuous Functions 62

5–2 ئارمانجێن بێدوماهی Infinite limits 68

پێداچوونا بەشی Review 74

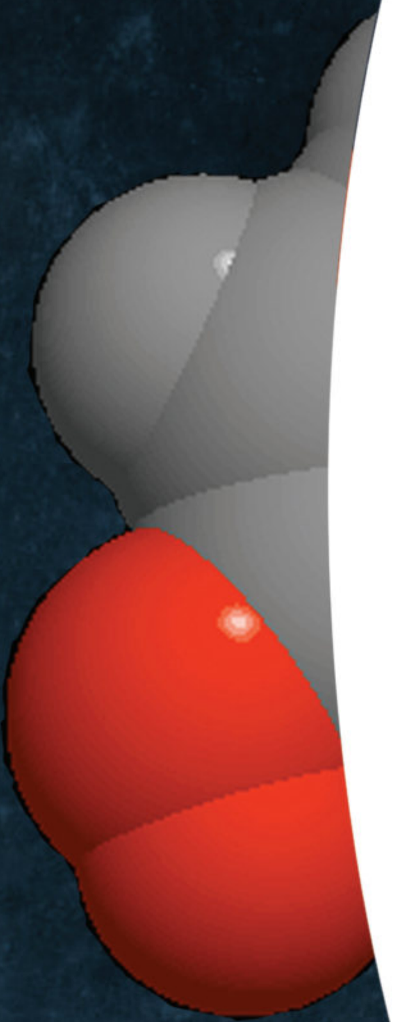
بەرهەڤکرن بۆ ئەزموونێ Test Prep 76

بەشێ

3

داتاشراو

Derivative



ئەرێ تو یێ ئامادەیی؟ Are You Ready? 79

3–1 داتاشراو و پرسیارا لێکەفتی Derivative and the Tangent Problem 80

3–2 رێسایێن داتاشراوێ Differentiation Rules 86

ئەزموونا نیڤا بەشی (وانەیێن 1–2) Partial Test 96

3–3 داتاشراوێ خۆ ب خۆ و داتاشراوێن بلند

Implicit Differentiation and Higher Derivative 97

3–4 تێکراییێن گوهۆرینێ Rates of Change 104

پێداچوونا بەشی Review 112

بەرهەڤکرن بۆ ئەزموونێ Test Prep 114

بەشێ 4

بجهئینان ل سەر داتاشراوێ

Applications of Differentiation

ئەرێ تو یێ ئامادەیی؟ Are You Ready? 117

1–4 تاقیکرنا داتاشراوێ ئێکێ First Derivative Test 118

2–4 تاقیکرنا داتاشراوێ دووێ Second Derivative Test 126

3–4 ئارمانج ل بێدوماهیێ Limits at Infinity 131

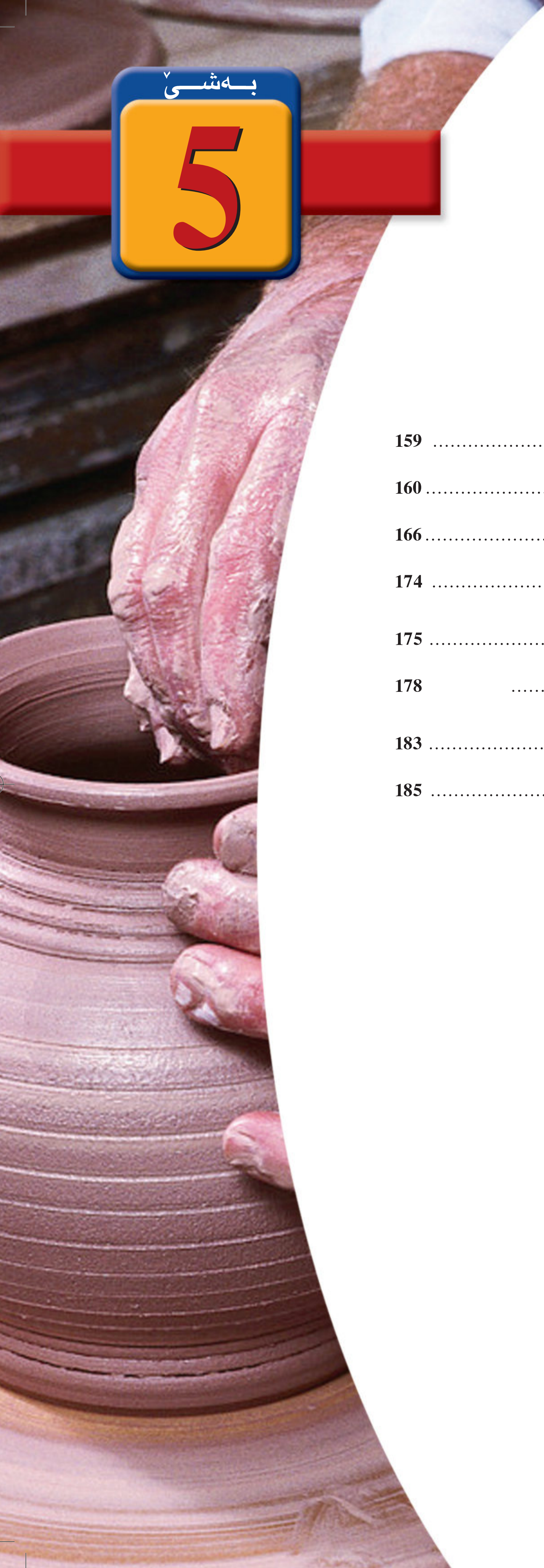
ئەزموونا نیڤا بەشی (وانەیێن 1–3) Partial Test 138

4–4 وێنەکرنا چەماوەیێن نەخشەیان Curve Sketching 139

5–4 گەڕیان ل دووڤ باشترین شیکار Optimization 148

پێداچوونا بەشی Review 154

بەرهەڤکرن بۆ ئەزموونێ Test Prep 156



بەشێ 5

تەمامکاری

Integration

ئەرێ تو یێ ئامادەیی؟ Are You Ready? 159

5–1 تەمامکاریيا بێسنوور Indefinite Integral 160

5–2 تەمامکاریيا سنووردار Definite Integral 166

ئەزموونا نیڤا بەشی (وانەیێن 1–2) Partial Test 174

5–3 هەژمارکرنا تەمامکاریێ Integration Methods 175

5–4 بجهئینان ل سەر تەمامکاریێ Application 178

پێداچوونا بەشی Review 183

بەرهەڤکرن بۆ ئەزموونێ Test Prep 185

بەشێ
6

برگەیێن قووچەکی
Conic Sections

ئەرێ تو یێ ئامادەیی؟ Are You Ready? 187

1–6 برگەیێن قووچەکی Conic Sections 188

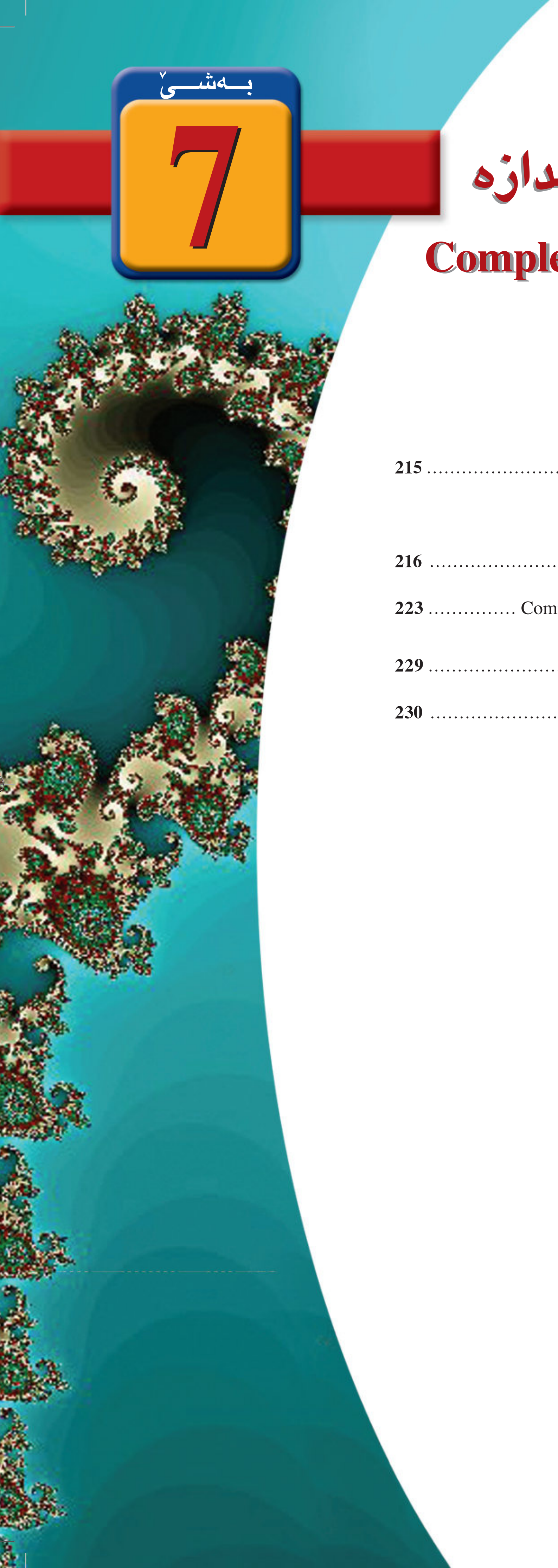
2–6 پۆلینکرنا برگەیێن قووچەکی Classifying Conic Sections 200

ئەزموونا نیڤا بەشی (وانەیێن 2–1) Partial Test 204

3–6 هاوکێشەیێن دووجایی ب دوو گۆڕاوان
Quadratic Equations in 2 Variables 205

پێداچوونا بەشی Review 210

بەرهەڤکرن بۆ ئەزموونێ Test Prep 212



بــەشــێ 7

ژمارەیێن ئاوێتە و ئەندازە
Complex Numbers And Geometry

215 .... Are You Ready? ئەرێ تو یێ ئامادەیی؟

1–7 شێوەیێن جودا بۆ ژمارەیا ئاوێتە

216 .... Various Forms of a Complex Number

223 .... Complex Numbers and Geometry ژمارەیێن ئاوێتە و ئەندازە 2–7

229 .... Review پێداچوونا بەشی

230 .... Test Prep بەرهەڤکرن بۆ ئەزموونێ

بەشێ
1

وێنەیێن روونكرنێ و نموونەیێن هێلی
Graphs and Linear Models

بەشێ ئێكێ
وانە

1–1 وێنەیێن روونكرنێ

2–1 نموونەیێن هلی و تێكراییێن گۆهۆرینێ

ئەزموونا نیڤا بەشی

3–1 نەخشە و وێنەیێن روونكرنا وان

پێداچوون

بەرهەڤكرن بۆ ئەزموونێ

سامپلێن (نموونەیێن) هێلی زۆر دبەربەلاڤن، ئەو دهێنە بكارئینان ل ئابوورێ و پیشەسازیێ و گەلەك بوارێن دن. نموونە ل سەر وی سامپلی، پەیوەندیا ل ناڤبەرا فرەهیا هەردوو باسكێن فرۆكێ w و درێژیا وێ l دبیتە $w = 1.2l - 60$ بۆ هندەك جۆرێن فرۆكان.

ئەرێ تۆ یێ ئامادەیی؟

زاراڤ

1 هەر دەستەواژەیەکا ل ستوونا رەخێ راستێ دگەل شرۆڤەکرنا وێ ل ستوونا رەخێ چەپێ گرێدە.

1. نەخشە
2. گۆڕاوێ ئازاد
3. گۆڕاوێ پشتبەست
4. بوارێ نەخشەیا f
5. نەخشەیا رێسا پلەدار

أ. کۆمەلا بەهایێن x ئەوێن رێددەن بۆ هەژمارتنا بەهایێن $f(x)$.

ب. گۆڕاوەکە بەهایێن وی دهێنە دەستنیشانکرن ل دووڤ بەهایێن گۆڕاوێ ئازاد ل پەیوەندییەکا نەخشەی.

ج. نەخشەیەکە رێسایا وێ دهێتە پێناسەکرن ب شێوەیێن جۆدا ل سەر ماوەیێن جۆدا.

د. پەیوەندیەکە ل ناڤبەرا دوو گۆڕاوان هەر بەهایەکی گۆڕاوێ ئێکێ ئێك بەهایێ بتنێ بۆ گۆڕاوێ دی دیاردکەت.

هـ. کومەلا بەهایێن $f(x)$ ئەوێن دشیاندا.

و. گۆڕاوەکە بەهایێن گۆڕاوێ پشتبەست دەستنیشاندکەت د پەیوەندیەکا نەخشەییدا.

بوارێ نەخشەی

ژ ڕاهێنانا 2 هەتا 7 ، بوارێ نەخشەی دیاربکە.

2 $f(x) = |x-1| + 2$

3 $f(x) = -2 + \sqrt{1-x}$

4 $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

5 $f(x) = \sqrt[3]{2-x}$

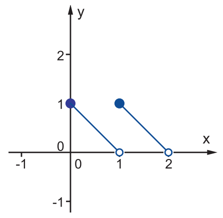
6 $f(x) = \tan x$

7 $f(x) = x^{2/5}$

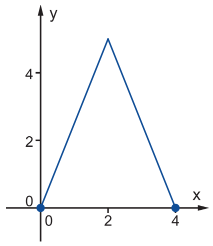
خواندنا وێنەیێن روونکرنێ

ل هەردوو ڕاهێنانێن 8 ، 9 ، نەخشەیەکا رێسا پلەدار بۆ وێنەیێن روونکرنێ بنڤیسە.

8



9



1–1 وێنەیێن روونکرنێ (چەماوە) و نموونە

Graphs

رینیە دیکارت (1596–1650)
René Descartes
دیکارتی گەلەك پشکداری پێشکێشکرن ژ بۆ پێشئێستن فەلسەفە و زانستی و بیرکاریێ. چەمکێ نواندنا خالەکێ وەك جووتەکێ رێکخستی ژ دوو ژمارا دورووتەختی دا، و چەمکێ نواندنا چەماوەیان ب هاوکێشەیێن جەبری و بەرۆڤاژی بۆ وێ ڤەدگەریت، ئەڤ بیروکێن خو دپەرتوکا La Géométrie بەحسکرن ئەوا ل سالا 1637 هاتیە بەلاڤکرن.

ئارمانج

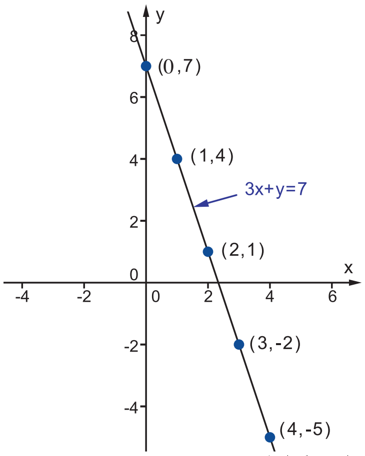
- وێنەیێ روونکرنێ بۆ پەیوەندییەکێ ل دووڤ هاوکێشا وێ دکێشن.
- دیارکرنا ئێکودووبرینێن وێنەیێ روونکرنا نەخشەکێ دگەل هەردوو تەوەرێن پۆتان.
- تاقیکرنا هاوجێبوونا وێنەیێ روونکرنا نەخشەی ل دور تەوەرێ y یان خالا بنەرەت د رووتەختێ پۆتانی دا.
- دیارکرنا خالێن ئێکودووبرینا چەماوەیێ دوو نەخشەیان.

وێنەیێ روونکرنا نەخشەی (چەماوە)

زانایێ بیرکاریێ یێ فەرەنسی (رینیە دیکارت) شورشەك ل خواندنا برکاریێ ل سالا 1637ژ هەلدا، دەمێ هەردوو لقێن سەرەکی یێن بیرکاریێ پێکڤە گرێدان: جەبر و ئەندازە. ئەڤێ وەسا کر کو بکارئینانا رووتەختێ دیکارتی یێ پۆتانی بشێن ب جەبرێ دەربرینێ ژ چەمکێن ئەندازێ بکەن، و چەمکێن جەبرێ ب ئەندازێ بنوێنن. هێزا ڤێ لێکنێزیککرنێ رێ دا بۆ پێشڤەبرنا گەلەك بابەتێن هەژمارکرنا جوداکاری و تەماکاریێ ل دەمێ سەد سالان. ل ڤێ پەرتووکێ دێ ل دووڤ چۆنەکا وەك وێ کەین ل خواندنا جوداکاری و تەمامکاریێ، و چەمکێن ڤی لقێ بیرکاریێ دێ نمایشکەین ب وێنەیێ روونکرنێ و ب جەبرێ و ب ژمارەی، دا چەمکێن وی یێن بنەرەت بزانی.

ڤێ هاوکێشێ $3x+y=7$ بکاربینە: خالا $(2, 1)$ دبیتە **خالا شیکاری** بۆ ڤێ هاوکێشێ، چونکی ب لجهدانانا (2) ل جهێ x و (1) ل جهێ y دێ هاوکێشە بیتە رستەیەکا دروست، ڤێ هاوکێشەیێ گەلەك شیکارێن دی هەنە وەك $(1, 4)$، $(0, 7)$.

دا هەموو شیکارێن هاوکێشێ هەژماربکەی وێ هاوکێشێ پێ y شیکاربکە.



$y=7-3x$ لێکنێزیکبوونا جەبری

پاشی **خشتەیێ بەهایان** دروستبکە، هندەك بەهان بۆ x دانە.

لێکنێزیکبوونا ژمارەیی

x	0	1	2	3	4
y	7	4	1	−2	−5

پێ خشتەی تو دشێی بێژی کو $(0, 7)$، $(1, 4)$، $(2, 1)$، $(3, -2)$، $(4, -5)$ شیکارن بۆ هاوکێشا سەرەکی $3x+y=7$.

بەلێ ڤێ هاوکێشەیێ، وەك گەلەك هاوکێشەیان، ژمارەکا بێسنوور یا شیکاران هەیە، هەر شیکارەك خالەکێ دورووتەختێ پۆتانی دا دیاردکەت. کومەلا ڤان خالێن شیکارێ **وێنەیێ روونکرنێ بۆ هاوکێشەیێ** پێکدئینن.

دڤێ پەرتووکێ دا دێ فێری گەلەك رێیان بی بۆ وێنەکرنا وێنەیێ روونکرنا نەخشە و هاوکێشەیان. ژ ڤان رێیان یا ساناهیتر، نواندنا ژمارەکا خالێن شیکارێ کو ئەو بەس بن بۆ دیارکرنا شێوەیێ وێنەیێ، پاشی وان خالان ب هێلەکا گونجای پێکبگەهینە.

زاراڤ
Vocabulary

خالا شیکاری
Solution point

خشەیێ بەهایان
Table of values

ئێکودووبرنا ئاسوّیی
x-Intercept

ئێکودووبرینا ستوونی
y-Intercept

لاری Slope

هاوجێبوون Symmetry

خالا ئێکودووبرینێ
Point of intersection

سامپلەکێ (نموونە) بیرکاریێ
Linear Models

ل بیراتە بیت

بۆ وێنەکێشانا راستەهێلەکێ دڤێت دوو خالا بزانی کو ئەو تێرا ببوریت.

نموونــــــه 1

كێشانا وێنەیێ رۆونكرنێ ب خالان

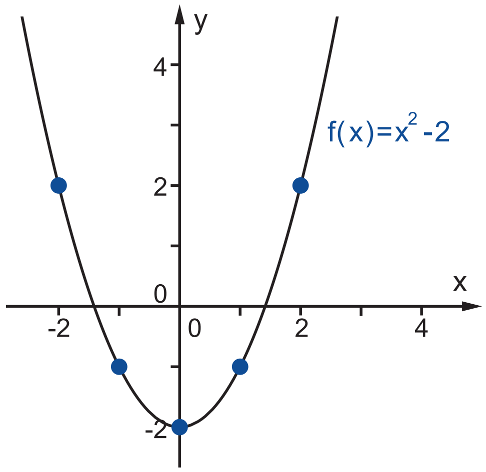
وێنەیێ رۆونكرنا ڤێ نەخشەیێ $f(x)=x^2-2$ بكێشە.

شیكار:-

دەستپێبكە ب چێكرنا خشتەیێ بەهایان.

x	−2	−1	0	1	2	3
y	2	−1	−2	−1	2	7

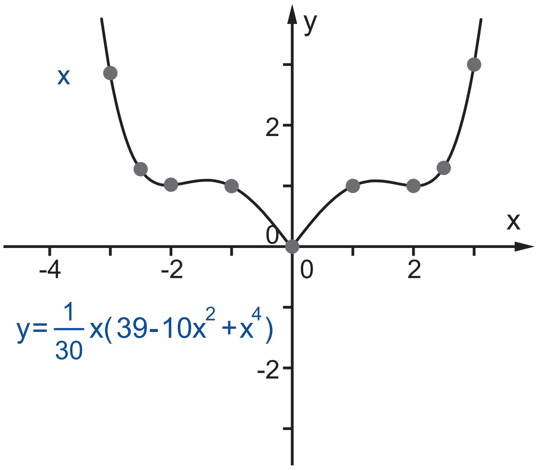
ڤان خالان ل سەر رووتەختێ پۆتان بنوێنە پاشی ب هێلەكا چەماوەیی وان خالان بگەهینە ئێكودوو، هەروەكی دیار د وێنەیێ بەرامبەردا. ئەڤ وێنە دبیتە **برگەیێ هاوتا**. كۆ ئێكە ژ برگەیێن قووچەك ئەوێن لپولا 12ێ دێ خوینی.

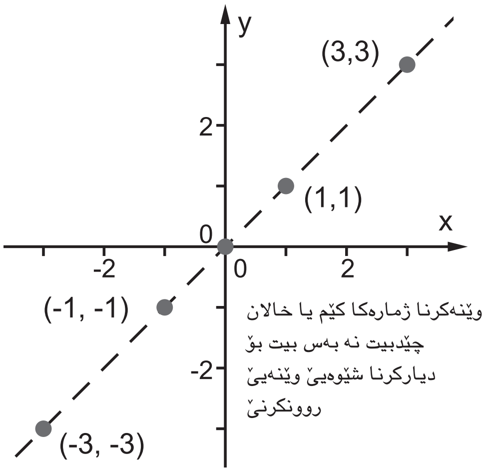


1. وێنەیێ رۆونكرنا نەخشەیا $f(x)=1-x^2$ بكێشە.

خالا چاڤدێرییێ

وێنە كێشانا رۆونكرنان ب خالان كارەكێ ب سانەهیە هەر وەكی تە دیتی، بەلێ هندەك كێماسی تێدا هەنە. هندەك جاران رۆونكرن پێدڤی گەلەك خالانە دا هزرەكا باش پەیدا بیت ل سەر شێوەیێ رۆونكرنێ. دێ بینی، ل نموونەیا نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{30}x(39-10x^2+x^4)$، نواندنا ژمارەكا كێم یا خالان دەرئەنجامێن نەدروست بۆ وێنەیی دیار دبن. هەكە تە ئەڤ خالانە $(-3,-3)$ ، $(-1,-1)$ ، $(0,0)$ ، $(1,1)$ ، $(3,3)$وێ نەكرن، دێ بینی وێنەیێ ڤێ نەخشەیێ دبیتە راستەهێلەك هەروەكی دیار ل لایێ راستێ ل بەرپەرێ بێت. بەلێ نواندنا خالێن سەربار دێ وێنەیێ رۆونكرنێ وەسا دیاركەت كۆ ئەو ب راستی ئالوزترە ژ ئەوێ دیاردبیت هەر وەك دیاردبیت ل وێنەیێ رەخێ چەپێ ل بەرپەرێ بێت دا.





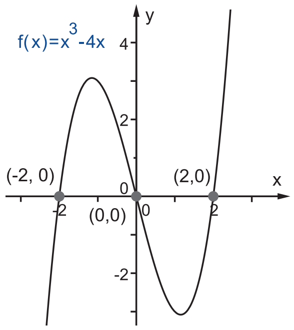
ئێكودوبڕین دگەل هەردوو تەوەران

دشێن هندەك خالان ب ساناهی دیاربكەن ژ ناڤ خالێن شیكاریێ، ئەو خالێن پۆتانەكی وان ببیتە سفر، دبێژنە ڤان خالان **خالێن ئێكودووبڕینێ** دگەل هەردوو تەوەرێن پۆتانان. خالا پۆیێ وێ x ببیتە سفر، ئانكو $(0, b)$دبێژنێ خالا ئێكودووبڕینا چەماویی دگەل تەوەری y ، ئانكو **ئێكودووبڕینا ستوونی**، و خالێن تانێ وان ببیتە سفر، ئانكو $(a, 0)$ دبنە خالێن ئێكودووبڕینا چەماوەیێ نەخشەیێ دگەل تەوەرێ x، و دبێژنێ **ئێكودووبڕینێن ئاسۆیی**.

پۆیێن x ل ئێكودووبڕینێن ئاسۆیی بۆ چەماوەیێ f دبنە رەگێن هاوكێشا$f(x)=0$. چێدبیت نەخشەیێ ئێكودووبڕینێن ئاسۆیی نەبن، یان بتنێ ئێك هەبیت، یان پتر. پۆیێن x بۆ خالێن ئێكودوو بڕینێن ستوونی دبنە$f(0)$ ، هەكە (0) دناڤ بوارێ نەخشێ دابیت. و ئێك ژ سفەتێن نەخشەی، ئەوێ ب زێداهێ ئێك ئێكودووبڕینا ستوونی هەیە.

نموونـــــــه 2 هەژماركرنا ئێكودووبڕینێن ئاسۆیی و ستوونی

ئێكودووبڕینێن ئاسۆیی و ستوونی بۆ وێنەیێ روونكرنا نەخشەیا $f(x)=x^3-4x$ هەژماربكە.



شیكار:

بۆ هەژماركرنا ئێكودووبڕینێن روونكرنا نەخشەیا $f(x)=x^3-4x$ هاوكێشێ شیكاربكە

$$f(x)=0$$

$$x^3-4x=0$$

$$x(x-2)(x+2)=0$$

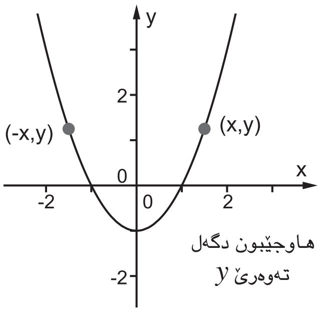
رەگێن هاوكێشێ دبنە -2 ، 0 ، 2 ، لەوا سێ ئێكودووبڕینێن ئاسۆیی هەنە$(-2, 0)$ ، $(0, 0)$، $(2, 0)$. چونكی 0 دانەیە دناڤ بوارێ نەخشەیدا. لەوا چەماوەیێ نەخشەیێ ئێك ئێكودووبڕینا ستوونی هەیە$(0, f(0))$ یان$(0, 0)$.

خالا چاڤدێریێ

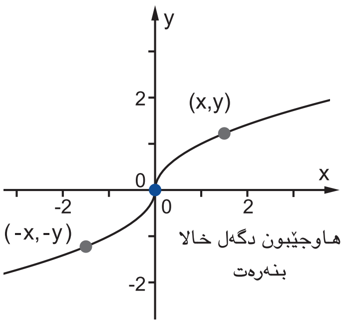
2. ئێكودووبڕینێن ئاسۆیی و ستوونی بۆ روونكرنا نەخشەیا $f(x)=x^4-1$ هەژماربكە.

تەکنۆلۆژیا: د نموونەیا 2 دا رێکا جەبرێ بۆ دەرئینانا ئێکودووبرینان هاتە بکارئینان و هەکە ئەو نەیا دشیاندا بیت ب رێکا جەبری، رێکا وێنەیێ رۆنکرنێ بکاربینە، ب دیارکرنا خالێن ئێکودوبرینا وێنەیێ رونکرنا نەخشێ دگەل هەردوو تەوەران.

هاوجێببوونا وێنەیێن رۆنکرنا نەخشەیان.



هەکە بزانی کو وێنەیێ روونکرنا نەخشێ یی هاوجێیە دگەل راستەهێلەکی یان خالەکێ، ئەڤە وێنەکێشانا وێنەیێ روونکرنێ بساناهی دکەت، نیڤا وێنەیی بکێشە، پاشی بکارئینانا هاوجێبوونێ تەمام بکە. و دشێی دوو جۆرێن هاوجێبوونێ ئەوێن ل خوارێ بکاربینی:

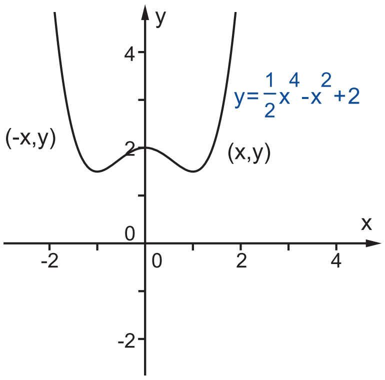


1. **هاوجێبوون دگەل تەوەرێ y** : وێنەیێ رونکرنا نەخشەیا f دێ یی هاوجێ بیت دگەل تەوەرێ y ، هەکە f ئەڤێ مەرجی $f(-x)=f(x)$ ساخبکەت، بۆ هەموو بهایێن x دبوارێ نەخشەیێدا، ئانکو هەکە نەخشەیەکا جووت بیت.

2. **هاوجێبوون دگەل خالا بنەرەت**: وێنەیێ رۆنکرنا نەخشەیا f دێ یی هاوجێ بیت دگەل خالا بنەرەت، هەکە f ئەڤێ مەرجی $f(-x)=-f(x)$ ساخبکەت، بۆ هەموو بهایێن x دبوارێ نەخشەیێدا، ئانکو نەخشەیەکا کت بیت.

ل بیرا تە بیت

رادەی نەگۆڕ لە هاوکێشەیا نەخشەیا رادەدار، دبیتە ئەنجامێ لێکدانا لێ ژمارەیەك ل ($x^0 = 1$)، 0 ژمارەیەکی جووتە.

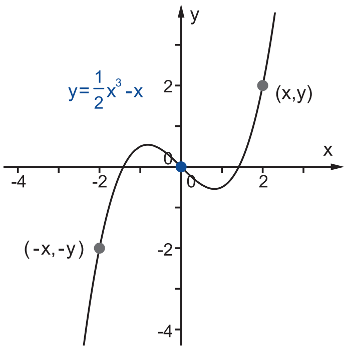


تاقیکرنا هاوجێبوونێ

1. وێنەیێ رونکرنا نەخشەیێ دێ یی هاوجێبون دگەل تەوەرێ y هەکە نەخشەیا جووت بیت.
2. وێنەیێ رونکرنا نەخشەیێ دێ یی هاوجێبون بیت دگەلا خالا بنەڕەت هەکە نەخشەیا کت بیت.

ل بیرا تەبێت

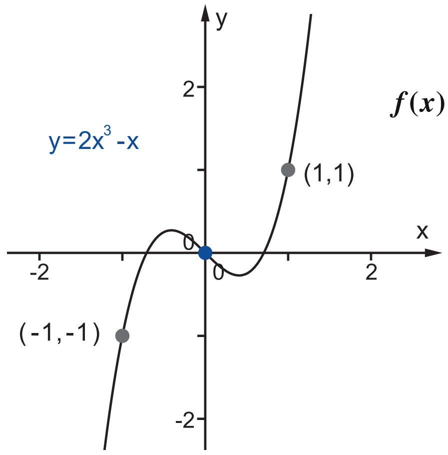
رادەی نەگۆڕ لە هاوکێشەیا نەخشەیا رادەدار، دبیتە ئەنجامی لێکدانا ژمارەیەکێ ل ($x^0 = 1$)، و 0 ژمارەیەکا جووتە.



وێنەیێ رونکرنا نەخشەیەکا رادەدار دێ یی هاوجێ بت دگەل تەوەرێ y ، هەکە پلەیێن هەموو رادەیێن هاوکێشێ ژبلی رادەیێ نەگور جووت بن. وێنەیێ رونکرنەیا نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2+2$ بە هاوجێیە دگەل تەوەرێ y . هەروەسا وێنەیێ رونکرنا نەخشەیەکا رادەدار دێ یی هاوجێ بیت دگەل خالا بنەرەت هەکە رادەیێ نەگور د هاوکێشەیێدا 0 بیت و پلەیێن هەموو رادەیێن ڤێ هاوکێشەیێ کت بن. بۆ نموونە وێنەیێ رونکرنا ڤێ نەخشەیێ $f(x)=\frac{1}{2}x^3-x$ یی هاوجییە دگەل خالا بنەرەت.

نموونـــه 3

تاقیکرنا هاوجیبوونێ دگەل خالا بنەڕەت



دیاربکە کۆ وێنەیێ رونکرنا ڤێ نەخشەیێ $f(x)=2x^3-x$ یێ هاوجییە دگەل خالا بنەڕەت.

شیکار

پتنێ دیارکرنا تاکبوونا ڤێ نەخشەیێ بەسە.

$$f(-x)=2(-x)^3-(-x)=-2x^3+x$$
$$=-(2x^3-x)=-f(x)$$

ئەو ژی بۆ هەموو بهایێن x .

خالا چاڤدێریێ

3. دیاربکە کۆ وێنەیێ رونکرنا ڤێ نەخشێ $f(x)=2x^4-x^2+2$ یێ هاوجێیە دگەل تەوەرێ y .

نموونـــه 4

بکارئینانا ئێکودووبڕینان و هاوجێبوونێ بۆ کێشانا وێنەیێن روونکرنا نەخشەیان.

وێنەیێ رونکرنا ڤێ نەخشەیێ $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}-1$ بکێشە.

شیکار

وێنەیێ رونکرنێ یێ هاوجییە دگەل تەوەرێ y چونکی نەخشەیا جووتە.

$$f(-x)=\frac{2(-x)^2}{(-x)^2+1}-1=\frac{2x^2}{x^2+1}-1=f(x)$$

پتنی بەسە، کۆ نیڤا وێنەیێ رونکرنا ڤێ نەخشەیێ بۆ بهایێن x یێن موجەب بکێشین، پاشی نیڤا دی ب وێنەدانەوی دگەل تەوەرێ y بکێشین.

ئێکودووبرینێن چەماوەیێ نەخشێ دیاربکە.

ئێکودووبرینا ستونی: دبیتە خالا $(0, f(0))$ یان $(0,-1)$.

ئێکودووبرینا ئاسۆیی: دڤێت ڤێ هاوکێشەیێ $f(0)=0$ یان $\frac{2x^2}{x^2+1}-1=0$ شیکاربکەین.

پشتی سادەکرنا هاوکێشەیا $\frac{2x^2}{x^2+1}-1=0$ دبیتە $x^2-1=0$.

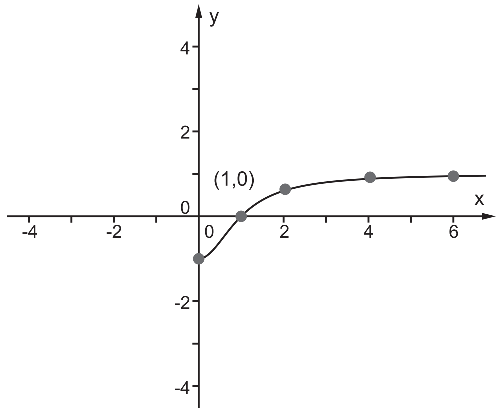
لەوا ڤێ هاوکێشەیێ دوو رەگ هەنە $x=-1$ و $x=1$ ،

ڤێجا دوو ئێکودووبڕینێن ئاسویی هەنە $(-1,0)$ و $(1,0)$.

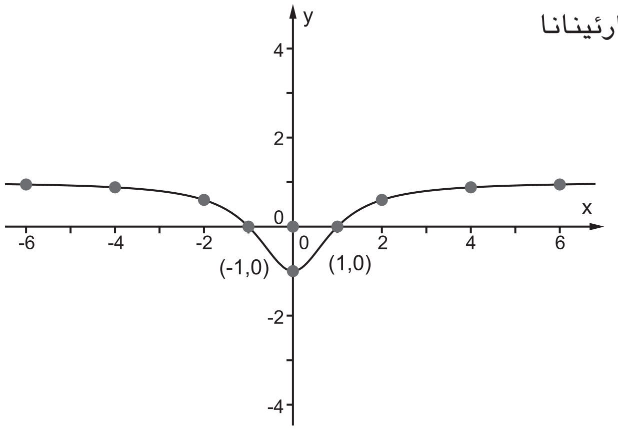
چەند خالێن دیێ ل سەر بەشێ رەخێ راستێ یێ وێنەی دیاربکە: $(2, f(2))$ یان $\left(2,\frac{3}{5}\right)$، $(4, f(4))$ یان $\left(4,\frac{15}{17}\right)$، $(6, f(6))$ یان $\left(6,\frac{35}{37}\right)$.

نیڤا رەخێ راستێ بکێشە

وێنەیێ رونکرنێ تەمامبکە بکارئینانا وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ x.



وێنەیێ رونکرنێ تمامبکە بکارئینانا وێنەدانەوە دگەل تەوەرێ y.



خالا چاڤدێریی

4. وێنەیێ رونکرنا نەخشەیا $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ بکێشە.

خالێن ئێکودووبڕینێ

هەر خالەك د رووتەختێ پوتاندا یا هاوبەش بیت دناڤبەرا وێنەیێن رونکرنا دوو نەخشەیان دا دبیتە **خالا ئێکودووبڕینێ بۆ وێنەیێن رۆنکرنا** هەردوو نەخشەیان. بۆ دەرئینانا خالێن ئێکودووبرینێن وێنەیێ رووونکرنا دوو نەخشەیان f و g ، هاوکێشەیا $f(x)=g(x)$ شیکاربکە. رەگێن ڤێ هاوکێشەیێ دبنە پۆیێن x بۆ خالێن ئێکودووبڕینێ.

نموونــــە 5

دەرئینانا خالێن ئێکودووبرینێ بۆ وێنەیێن رووونکرنا (چەماوەیێ) دوو نەخشەیان.

خالێن ئێکودووبڕینێ بۆ چەماوەیێ هەردوو نەخشەیان: $f(x)=x^2-3$ و $g(x)=x-1$ هەژماربکە.

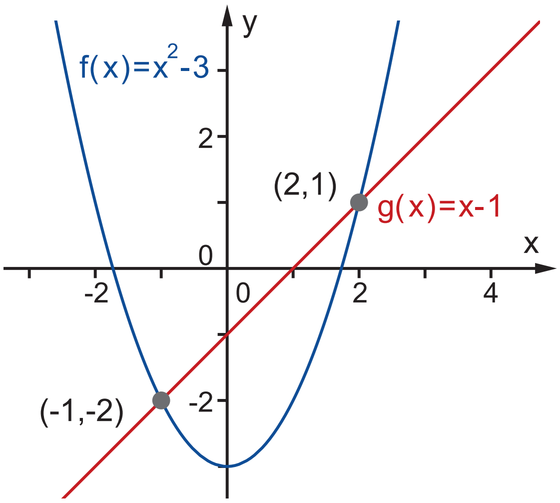
شیکار

دەستپێبکە ب شیکارکرنا هاوکێشەیا $f(x)=g(x)$ یان $x^2-3=x-1$ کۆ دبیتە $x^2-x-2=0$.

ڤێ هاوکێشەیا دووجایی دوو رەگ هەنە ئەو ژی $x=-1$ و $x=2$. وێنەیێن رونکرنا هەردوو نەخشەیان ئێکو دوو دبڕن ل ڤان هەردوو خالان:

$$(-1, f(-1))=(-1, g(-1))=(-1, -2)$$

و $(2, f(2))=(2, g(2))=(2, 1)$



ئەوا بدەست تە کەفتی ب رێکا وێنە کێشانا رونکرنا هەردوو نەخشەیان و دیارکرنا خالێن ئێکودووبڕینێ ساخبکە.

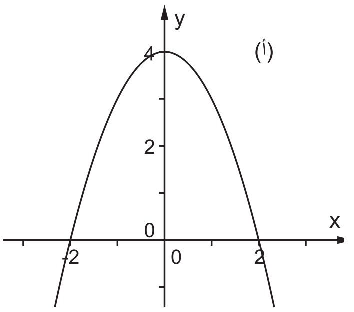
خالا چاڤدێریی

5. خالێن ئێکودووبڕینێن چەماوەیێن هەردوو نەخشەیان $f(x)=x^3-x$ و $g(x)=\frac{1}{4}(x^2-1)$ بینەدەر.

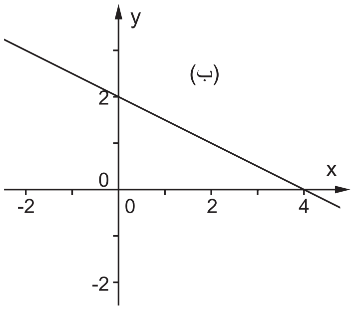
1-1 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا 1 هەتا 4 ، وێنەیێ رونكرنا نەخشەیێ دیاربکە.

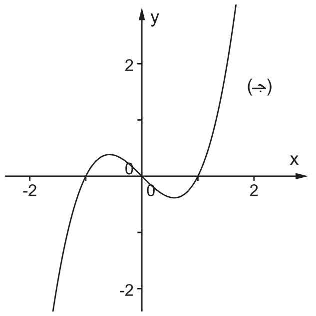
أ



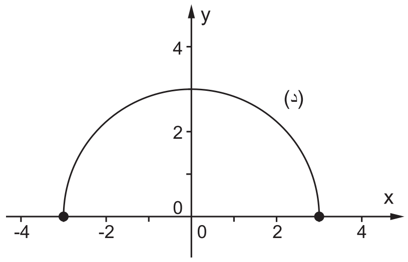
ب



ج



د



1 $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$ **2** $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

3 $f(x)=4-x^2$ **4** $f(x)=x^3-x$

ژ ڕاهێنانا 5 هەتا 10، وێنەیێ رونكرنا نەخشەیی ب خالان بکێشە.

5 $f(x)=6-2x$ **6** $f(x)=(x-3)^2$ **7** $f(x)=|x+2|$

8 $f(x)=\sqrt{x+2}$ **9** $f(x)=\frac{2}{x}$ **10** $f(x)=\frac{1}{x-1}$

ژ ڕاهێنانا 11 هەتا 14 ئێکودووبڕینێن وێنەیێن رونكرنا نەخشەیێ دگەل هەردوو تەوەرێن پوتان هەژماربکە.

11 $f(x)=x^2+x-2$ **12** $f(x)=x^2\sqrt{25-x^2}$

13 $f(x)=(x-1)\sqrt{x^2+1}$ **14** $f(x)=\frac{x^2+3x}{(3x+1)^2}$

ژ ڕاهێنانا 15 هەتا 20 دیاربکە، ئەرێ وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیێ یێ هاوجێیە دگەل تەوەرێ y یان دگەل خالا بنەڕەت.

15 $f(x)=x^2-2$ **16** $f(x)=x^2-x$ **17** $f(x)=\frac{4}{x}$

18 $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ **19** $f(x)=|x^3+x|$ **20** $f(x)=1-\sqrt{x+3}$

ژ ڕاهێنانا 21 هەتا 24 ، خالێن ئێکودووبڕینێن وێنەیێن ڕوونکرناهەردوو نەخشەیان هەژماربکە.

21 $f(x)=2-x$ و $g(x)=2x-1$

22 $f(x)=6-x^2$ و $g(x)=4-x$

23 $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ و $g(x)=-x^2+3x-1$

24 $f(x)=-|2x-3|+6$ و $g(x)=6-x$

25 **خالا مفايى**: ئابوورناس دبێژن، قازانجێ دەستگەهەکى دێ گەهتە **خالا مفايى**، هەکە لێچوويا بەرهەمئينانێ و داهاتێ فرۆتنێ يەکسان بوون. خالا مفايى بۆ دەستگەهەکى هەژماربکە هەکە نەخشا لێچوويا وێ $C = 5.5\sqrt{x} + 10\,000$ و نەخشەيا فرۆتنا وێ $R = 3.29x$ بيت.

دەربارەى چەمکان (تێگەهان)

26 هاوکێشەيا نەخشەى بنڤيسە هەکە ئێکودووبڕينێن ئاسۆيێ $x = -2$، $x = 4$، $x = 6$ بيت.

27 هەر خشتەيەك خالێن شيکارێ بۆ هاوکێشەکێ ژ ڤان هەر چوار هاوکێشەيان دياردکەت:

أ $y = kx + 5$ ب $y = x^2 + k$ ج $y = kx^{\frac{3}{2}}$ د $xy = k$

خشتەيێ هەر هاوکێشەيەکێ دياربکە، و بهايێ k هەژماربکە، رێيا کارێ خو رۆنبکە.

★

x	1	4	9
y	3	24	81

★★

x	1	4	9
y	7	13	23

★★★

x	1	4	9
y	36	9	4

★★★★

x	1	4	9
y	−9	6	71

دروستە يان نەيا دروستە؟ ژ راهێنانا 28 هەتا 31، دياربکە هەکە دەستەواژەيا دروست بيت، هۆيێ وێ رۆنبکە، و هەکە نەيا دروست بيت ب دژە نموونەکێ بسەلمينە:

28 هەکە خالا $(1, -2)$ بکەڤتە سەرچەماوەيەکى هاوجێ دگەل خالا بنەرەت، دێ خالا $(-1, -2)$ کەڤتە سەر وى چەماوەيى.

29 هەکە خالا $(1, -2)$ بکەڤتە سەر وێنەيەکى روونکرنا هاوجێ دگەل تەوەرێ y، دێ خالا $(-1, -2)$ کەڤتە سەر وى وێنەيێ روونکرنێ.

30 هەکە $b^2 - 4ac > 0$ و $a \neq 0$ دێ وێنەيێ روونکرنا نەخشەيا $f(x) = ax^2 + bx + c$ دوو ئێکودووبڕينێن ئاسۆيى هەبن.

31 هەکە $b^2 - 4ac = 0$ و $a \neq 0$، دێ وێنەيێ روونکرنا نەخشەيا $f(x) = ax^2 + bx + c$ ئێك ئێکودووبڕينا ئاسۆيى هەبيت.

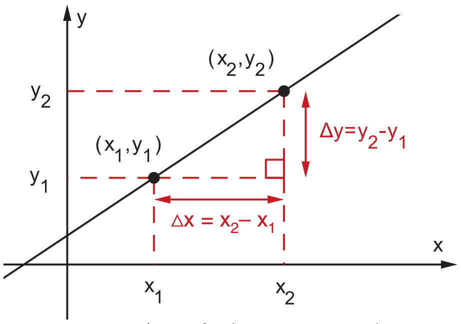
32 هاوکێشەيا وێنەيێ روونکرنا نەخشەيێ بنڤيسە ئەوێ پێکدئێت ژ هەموو خالێن رووتەختێ پۆتانى (x, y) ئەوێن دووريا وان ژ خالا بنەرەت دبيتە دووجارانى دووريا وان ژ خالا $(0, 3)$.

2-1 نموونەیێن هێلی و تێکراییێن گوهۆڕینێ
Linear Models and Rates of change

ئارمانج

- ب زانینا دوو خالان ل سەر راستەهێلەکێ دێ لارێ وی هەژمارکەین.
- ب زانینا لارێ و خالەکێ ل سەر راستەهێلەکێ دێ هاوکێشەیا وی دەرئینین.
- لارێ دێیتە رۆنکرن وەك رێژە یان وەك تێکرایێ گوهۆڕینێ پرسیارێن ژیانا رۆژانە.
- راستەهێلەکێ وێنە دکەن دەمێ هاوکێشا وی ب شێوەیێ لارێ – ئێکودووبرینێ بیت.

لارێ راستەهێلی



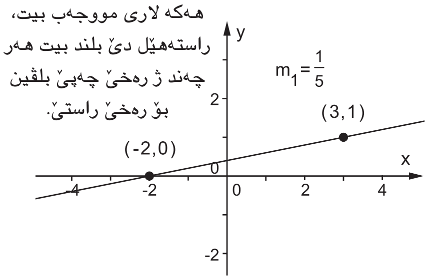
دەمێ خالەك ل سەر راستەهێلەکی نەستوونی بلڤیت ب مەودایەکی ئاسۆیی ب ئێك یەکە ژ رەخێ چەپێ بۆ رەخێ راستێ، دێ خال بلند بیت یان نزم بیت ل دووڤ بارێ وی راستەهێلی. لارێ راستەهێلی دبیتە ژمارا وان یەکێن ئەو خالە بلند دبیت یان «نزم دبیت» ژ ئەنجامێ لڤینا وێ خالێ. خالێن (x_1, y_1) و (x_2, y_2) ل سەر راستەهێلی بکاربینە کا هەر چەند خالەك ل سەر راستەهیلی بلڤیت ژ رەخێ چەپێ بۆ رەخێ راستێ ب مەودایەکێ ئاسۆیی $\Delta x = x_2 - x_1$ یەکە، ئەو خالە ب مەودایەکێ ستوونێ $\Delta y = y_2 - y_1$ یەکە دێ لڤیت، (△ دئێتە خواندن دەلتا Delta) و ئەو پیتەکا یۆنانییە. ($\triangle x$ دبیتە ئێك هێما و هەروەسا $\triangle y$ ئێك هێمایە).

پێناسەیا لارێ راستەهێلی

لارێ راستەهێلەکی نە ستوونی بیت و دهەردوو خالانرا(x_1, y_1)، (x_2, y_2) ببۆریت دبیتە $m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ کۆ $x_2 \neq x_1$

لارێ راستەهێلەکی ستوونی نەیا پێناسەکرییە.

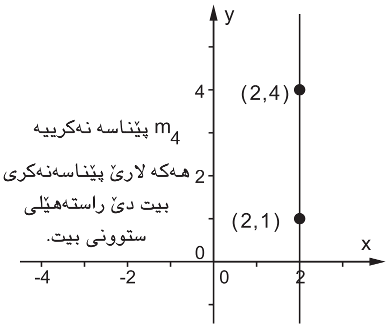
بەرێ خو بدە لارێ راستەهێلێ دهەردوو خالێن(x_1, y_1)، (x_2, y_2) را دبۆریت:

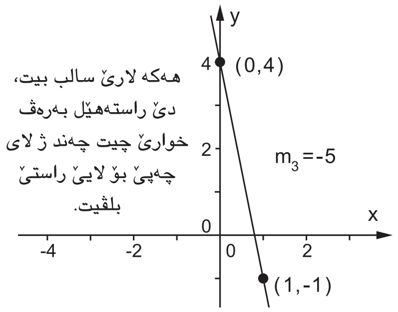


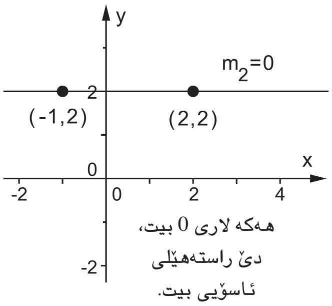
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-(y_2-y_1)}{-(x_2-x_1)} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

هەروەسا، هەلبژارتنا خالا ئێکێ یان یا دووێ کارتێکرنێ ل سەر ئەنجامێ ناکە.

وێنەیێن ل خوارێ 4 راستەهێلن: لارێ ئێکێ یێ مووجەبە، لارێ دووێ 0 و لارێ سییێ یێ سالبە، لارێ یێ دوماهیکێ نەی پێناسەکرییە. ب شێوەیەکێ گشتی، هەر چەند بهایێ رووتێ لارێ زێدە بیت دێ ئەو پتر بلند بیت. بلندبوونا راستەهێلێ خودان لارێ 5– دشێوێ خوارێدا مەزنترە ژ بلندبوونا راستەهێلێ خودان لارێ$\frac{1}{5}$.







زاراڤ
Vocabulary

لارێ Slope

شێوەیێ لارێ – خالەك
Slope - point form

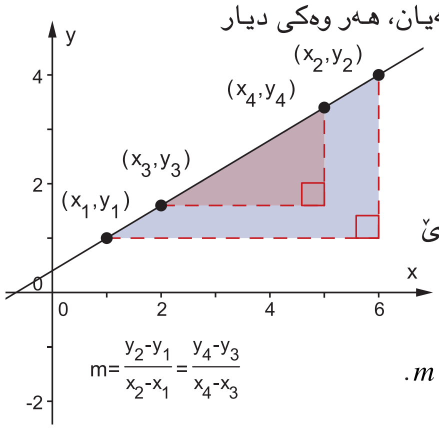
شێوێ لارێ – ئێکودووبرین
Slope - Intercept form

شێوەیێ گشتی General form

تێکرایێ ناڤەندێ گۆهۆڕینێ
Average rate of change

هاوکێشەیا راستەهێلی

چێدبیت هەردوو خالان ژ خالێن راستەهێلەکی نە ستونی بکاربینین بۆ دەرئینانا لارێ وی.
دشێین ئەڤێ چەندێ ساخبکەین بکارئینانا هاوشێوەبوونا سێگوشەیان، هەر وەکی دیار
د وێنەیێ بەرامبەردا.



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

دشێی هاوکێشەیا راستەهێلەکی بنڤیسی هەکە لارێ و پوتانێن ئەوێ
خالا راستەهێل تێرا دبۆریت بزانی. مگرتی m لارێ راستەهێلەکێیە
و دخالا(x_1, y_1) را دبۆریت.
هەکە(x, y)هەر خالەکا دی بیت ل سەر وی راستەهیلی، دێ $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$.

تو دکاری ڤێ هاوکێشێ ل سەر شێوەیێ$y - y_1 = m(x - x_1)$ بنڤیسی. دبێژنە ڤی شێوەیی بۆ نڤیسینا
هاوکێشا راستەهێلی، **شێوەیێ لاری – خالەك**.

شێوەیێ لاری – خالەك بۆ هاوکێشەیا راستەهێلی

هاوکێشا راستەهێلەکی m لارێ وی بیت و د خالا $(x_1 ، y_1)$ راببوریت،
ل سەر شێوەیێ $y - y_1 = m(x - x_1)$ دێ هێتە نڤیسین.

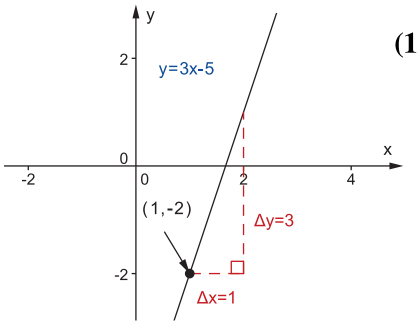
نموونــــه 1

دەرئینانا هاوکێشەیا راستەهێلەکی

هاوکێشەیا راستەهێلەکی لارێ وێ 3 بیت و دخالا$(1, -2)$ راببوریت بنڤیسە.

شیکار:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-2) = 3(x - 1)$$
$$y + 2 = 3(x - 1)$$
$$y = 3x - 5$$



ل بیراتە بیت کو پتنێ راستەهێلێن نە ستونی لاری هەنە، لەوا نڤیسینا هاوکێشەیا راستەهێلەکی
ستوونی ل سەر شێوەێ لاری – خالەك نەیا د شیاندایە. هاوکێشەیا راستەهێلی ستوونی ل سەر
شێوەیێ$x = k$ دهێتە نڤیسین، دەمێ k ژمارەکا راستی بیت. ڤێجا هاوکێشەیا راستەهێلێ
ستوونی ئەوا د خالا$(1, -2)$ را دبۆریت، بۆ نموونە$x = 1$.

خالا چاڤدێریێ

.1 هاوکێشەیا راستەهێلێ (-2) لارێ وێ بیت و دخالا $(1, 1)$ راببوریت بنڤیسە.

رێژە و تێکرایێن گوهورینێ

چێدبیت لارێ راستەهێلێ وەك رێژە یان تێکرا روون بکەین. هەکە x و y ب هەمان یەکەیان هاتبتە
پیڤان، ل ڤێ بارێ لاری یەکەیێ پیڤانێ نابیت و ئەو بتنێ دبیتە رێژە. بەلێ هەکە x و y ب دوو یەکەیێن
پیڤانێن جودا هاتبنە پیڤان، دێ لاری بیتە تێکرایێ گوهۆرینێ. ل ڤێ پۆلێ دێ بینی، هندەك لاری
دبنەرێژە و هندەك دبنە تێکرایێ گوهۆرینێ.

نموونـــــه 2 — ڕوونكرنێن جودا بۆ لارێ

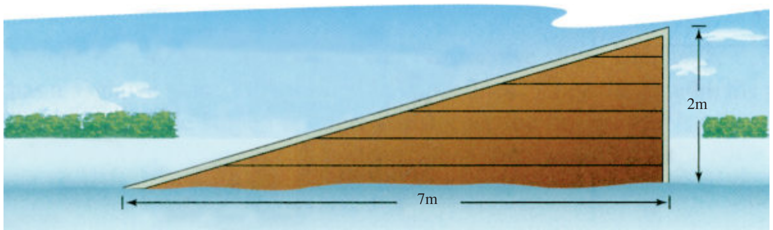
أ ژمارا ئاكنجیێن باژێرەكی 3687000 كەس بوون ل سالا 1990 و 4042000 كەس بوون ل سالا 2000 . تێكراییێ ناڤەند بۆ گۆهۆڕینا ژمارا ئاكنجییان چەندبوو؟

$$\text{تێكراییێ گۆهۆڕینێ} = \frac{\text{گۆهۆڕین دژمارا ئاكنجییان دا}}{\text{گوهۆڕین دژمارا سالان دا}}$$

$$= \frac{4\,042\,000 - 3\,687\,000}{2000 - 1990} = 33\,500$$

ڤێجا تێكراییێ گۆهۆڕینێ دبیتە 33 500 كەس دسالەكێ دا، هەكە ژمارا ئاكنجییان ل ڤی باژێری ب ڤی تێكراییێ زێدەبوو، دێ ژمارا ئاكنجییان بیتە 4 377 000 كەس ل سالا 2010 ، بەرێ خو بدێ لاری ل ڤێ نموونێ دبیتە تێكراییێ ناڤەند.

ب ل گۆڕەپانا حلیسانكێ ل سەر ئاڤێ، یانەیەكێ ڕەمپەك دانا بۆ خو هاڤێتنا یاریزانان، بلنداهیا وێ 2 مێتەر و درێژیا وێ 7 مێتەر بوو، وەك ل وێنەیێ ل خوارێ دیار. لارێ ڕەمپێ هەژماربكە.



لارێ ڕەمپێ دبیتە ڕێژا بلنداهیا وێ بۆ درێژیا وێ $\frac{2}{7} = \frac{2m}{7m} = m$.

بەرێ خو بدێ، ل ڤێ نموونێ لارێ ڕێژەیە، ویەكەیەكە پیڤانێ نینە.

تێكراییێ گۆهۆڕینێ ئەوێ تە ل بەشێ (أ) ل نموونە 2 هەژماركری دبیتە تێكراییێ ناڤەند بۆ گۆهۆڕینێ. تێكراییێ ناڤەند بۆ گۆهۆڕینێ هەردەم ل مەودایێ ماوەیەكی دێتە هەژماركرن. ل نموونە (2) (أ) ئەڤ ماوە $[1990, 2000]$ بوو. ل بەشێ سێێ دێ فێری جۆرەكی دی یێ تێكراییێن گۆهۆڕینێ بی دبێژنێ تێكراییێ ساتی بۆ گۆهۆڕینێ.

خالا چاڤدێریێ

2. زەلامەك ل فرۆكەكێ ل ئەسمانی دنێرت ب بەرزە گوشەیا 60° ، و دووریا ئاسۆیی ل ناڤبەرا وی زەلامی و فرۆكێ $600\ m$ ، لارێ وی راستەهێلی ل ناڤبەرا چاڤێ زەلامی و فرۆكێ چەندە؟ ئەرێ ئەو ڕێژەیە یان تێكراییێ گۆهۆڕینێیە؟ بلنداهیا فرۆكێ چەندە؟

نواندنا نموونەیێن هێلی ب وێنەیێ ڕوونكرنێ

ئەم دكارین زۆربەی پرسیارێن ئەندازیا شێتەلكرنێ بۆ دوو جۆران پۆلینبكەین: ل جۆرێ ئێكێ هەژماركرنا هاوكێشا وێنەیەكی ڕوونكرنا پێدایی (چەماوەبیت یان نە)، و ل جۆرێ دووێ وێنەكێشانا وێنەیێ ڕوونكرنێ بۆ هاوكێشەیەكا پێدای. تو دشێی شێوەیێ لاری – خالەك بۆ هاوكێشا راستەهێلی بكاربینی ل شیكاركرنا پرسیارێن جۆرێ ئێكێ، بەلێ ئەڤ شێوە نا گونجیت دگەل پرسیارێن جۆرێ دووێ. شێوەیەكی دی یێ هاوكێشەیا راستەهێلی هەیە دگونجیت بۆ شیكاركرنا پرسیارێن جۆرێ دووێ، دبێژنێ شێوەیێ لاری – ئێكودوبڕین.

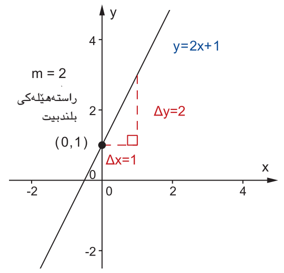
شێوەیێ لاری – ئێكودووبڕین بۆ هاوكێشا راستەهێلی
وێنەیێ ڕۆنكرنێ بۆ نەخشەیا هێلی $y = mx + b$
دبیتە راستەهێلەك لارێ وی m و ئێكودووبڕینا وی یا ستوونی $(0, b)$ یە .

نموونـــه 3 — وێنەکێشانا راستەهێلان

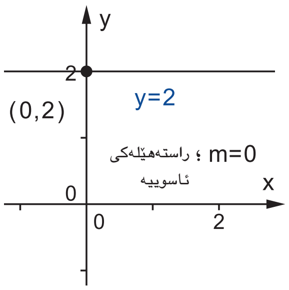
وێنەیێ رونکرنێ بۆ هەر هاوکێشەیەکێ بکێشە.

أ $y=2x+1$ ب $y=2$ ج $3y+x-6=0$

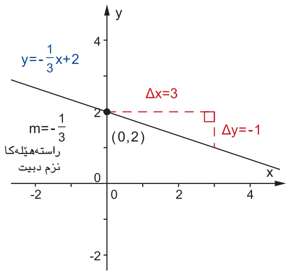
شیکار



أ ئێکودووبڕینا ستوونی دبیتە$(0,1)$ چونکی $b=1$. لارێ راستەهێلێ 2 . دەمێ بلڤێ ب یەکەیەکێ ژ رەخێ چەپێ بۆ رەخێ راستێ ژ خالا$(0,1)$ ، دڤێت دوو یەکەیان بۆ سەری بلند بی: ئانکو خالا $(1,3)$ دکەڤیتە سەر راستەهێلێ.
هەردوو خالان$(0,1)$ و$(1,3)$ دیاربکە و ئەو راستەهێلێ دهەردوویانرا دبووریت وێنەبکە.



ب ئێکودووبڕینا ستوونی دبیتە$(0,2)$ چونکی $b=2$. لارێ راستەهێلێ 0. ئانکو ئەڤ راستەهێلەیێ ئاسوییە. بتنێ راستەهێلێ تەریب بۆ تەوەرێ x و دخالا$(0,2)$ را دبۆریت وێنەبکە.



ج ل دەستپێکێ، هاوکێشەیێ لسەر شێوەیێ لارێ – ئێکودووبڕین بنڤیسە.

$$3y+x-6=0$$
$$3y=-x+6$$
$$y=-\frac{1}{3}x+2$$

ئێکودووبڕینا ستوونی دبیتە $(0,2)$ چونکی $b=2$. لارێ راستەهێلێ دبیتە $-\frac{1}{3}$. ئانکو هەکە تو ژ خالا$(0,2)$ ب 3 یەکەیان ژ رەخێ چەپێ بۆ رەخێ راستێ بلڤی، دڤێت تو یەکەیەکێ بەرەڤ خوارێ بلڤی، و خالا$(3,1)$ دکەڤتە سەر راستەهێلێ. هەردوو خالان$(0,2)$ و$(3,1)$ بنوێنە و راستەهێلێ دوانرا دبۆریت بکێشە.

خالا چاڤدێرییێ

3. وێنەیێ رونکرنێ بۆ هەر هاوکێشەیەکێ بکێشە.

أ $y=3x-1$ ب $y=-2$ ج $y+3x-2=0$

چونکی لارێ راستەهێلێ ستوونی پێناسەنەکرییە، لەوا تو نەشێی هاوکێشەیا وێ ل سەر شێوەیێ لارێ – خالەك یان ل سەر شێوەیێ لارێ – ئێکودووبڕین بنڤیسی:
شێوەیەکێ کشتی بۆ هاوکێشەیا راستەهێلێ هەیە و دگونجیت بۆ هەموو بارەیان، و ئەڤ شێوەیە:

$$Ax+By+C=0$$

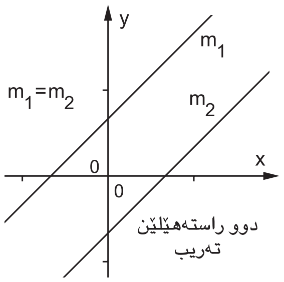
کو هەردوو ژمارە A و B پێکڤە یەکسان نابن 0 ئانکو $|A|+|B|\neq 0$ هەکە $x=k$ هاوکێشەیا راستەهێلێ ستوونی بیت، تو دشێی ل سەر ڤێ شێوەیێ بنڤیسی $(1)x+(0)y+(-k)=0$.

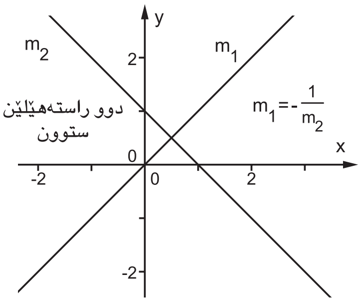
شێوەیێن جودا بۆ هاوکێشەیا ڕاستەهێڵێ

1. شێوەیێ گشتی: $Ax + By + C = 0$ دەمێ $|A| + |B| \neq 0$.
2. شێوەیێ هاوکێشەیا راستەهێڵێ ستوونی: $x = k$
3. شێوەیێ هاوکێشەیا راستەهێڵێ ئاسۆیی: $y = k$
4. شێوەیێ لاری – خالەك: $y - y_1 = m(x - x_1)$
5. شێوەیێ لاری – ئێکودووبرین: $y = mx + b$

تەریببوون و ستوونبوونا ڕاستەهێڵان

لاری رولەکێ گرنگ هەیە بۆ دیارکرنا تەریببوونا دوو راستەهێلان یان ستوونبوونا وان بێی وینەکێشانا وان. هەکە لارێ دوو راستەهێڵێن نە ستوونی دیەکسان بن، ئەو هەردوو راسەهێل دێ دتەریب بن، و هەکە ئەنجامێ لێکدانا لارێ هەردوو راستەهێلان یەکسان بیت ژمارە (-1)، ئەو هەردوو راستەهێل دێ ستوون بن دگەل ئێکودوو.





تەریببوون و ستوونبوونا راستەهێڵان

1. دوو راستەهێڵێن نە ستوونی دێ تەریب بن، هەکە و بتنێ هەکە لارێ هەردوویان دیەکسان بن.
2. راستەهێڵێن ئاسۆیی دتەریب بن دگەل ئێکودوو.
3. راستەهێڵێن ستوونی دتەریب بن دگەل ئێکودوو.
4. دوو راستەهێل دێ ستوون بن دگەل ئێکودوو هەکە ئەنجامێ لێکدانا لارێن هەردووان یەکسان بیت -1 .
5. هەر راستەهێڵەکی ستوونی دێ ستوون بیت دگەل راستەهێڵی ئاسۆیی.

ل بیرا تەبیت

ل بیرا تەبیت

راستەهێڵی ستوونی ئەو راستەهێل تەریبە دگەل تەوەرێ y .

راستەهێڵێ ئاسۆیی ئەو راستە هێلی تەریبە دگەل تەوەرێ x .

نموونـــــە 4 دیارکرنا راستەهێڵێن تەریب و ستوون

أ ل سەر شێوێ گشتی هاوکێشەیا راستەهێل د خالا $(2, -1)$ رادبوریت و تەریب بیت بۆ راستەهێڵێ $2x - 3y = 5$ بنڤیسە.

ب ل سەر شێوێ گشتی هاوکێشەیا راستەهێڵێ دخالا $(2, -1)$ رادبوریت و ستوون بیت دگەل راستەهێڵێ $2x - 3y = 5$ بنڤیسە.

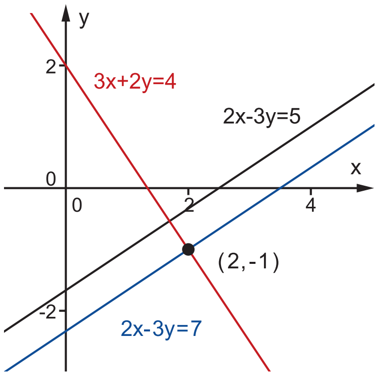
شیکار

ل دەستپێکێ، لارێ راستەهێڵێ $2x - 3y = 5$ بینەدەر، بۆ دەرئینانا وێ، هاوکێشەیێ ل سەر شێوێ لارێ – ئێکودووبرین بنڤیسە: $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$.

لارێ ڤێ راستەهێڵێ دبیتە $\frac{2}{3}$.

أ لارێ راستەهێلێ دخالا$(2, -1)$ را دبۆریت و تەریب بیت دگەل راستەهێلێ $2x-3y=5$ دبیتە $\frac{2}{3}$. هاوکێشەیا راستەهێلێ دخالا$(2, -1)$ رادبوریت و لارێ وێ $\frac{2}{3}$ بنڤیسە.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-(-1)=\tfrac{2}{3}\big(x-(2)\big)$$
$$3(y+1)=2(x-2)$$
$$2x-3y-7=0$$



ب لارێ راستەهێلێ دخالا$(2, -1)$را دبوریت و ستوون بیت دگەل راستەهێلێ $2x-3y=5$ دبیتە $-\frac{1}{\frac{2}{3}}=-\frac{3}{2}$ هاوکێشەیا راستەهێلێ د خالا$(2, -1)$ را دبوریت و لارێ وێ $-\frac{3}{2}$ بیت بنڤیسە.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-(-1)=-\tfrac{3}{2}\big(x-(2)\big)$$
$$2(y+1)=-3(x-2)$$
$$3x+2y-4=0$$

خالا چاڤدێرییێ

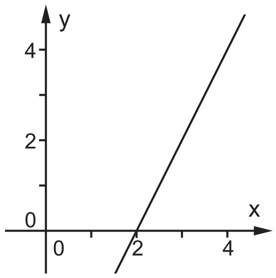
4. أ ل سەر شێوەیێ گشتی، هاوکێشەیا راستەهێلێ د خالا$(1, -3)$ را دبوریت و تەریب بیت دگەل راستەهێلێ $x+5y=-1$ بنڤیسە.

ب ل سەر شێوێ گشتی، هاوکێشەیا راستەهێلێ دخالا$(2, -1)$ را دبۆریت و ستوون بیت دگەل راستەهێلێ $x+5y=-1$ بنڤیسە.

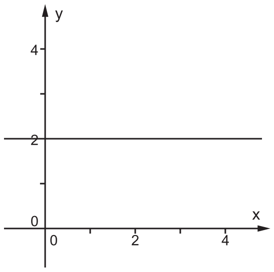
2–1 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا **1** هەتا **4**، لارێ ڕاستەهێلی بخەملینە:

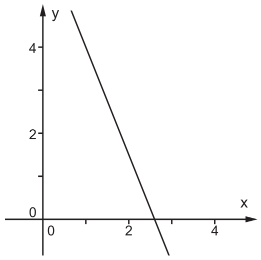
1



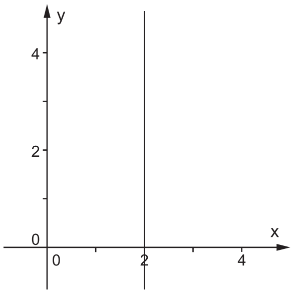
2



3



4



ژ ڕاهێنانا **5** هەتا **10**، وی ڕاستەهێلێ خودان لارا پێدای و دخالا پێدای را دبوریت بکێشە.

5 $(2, 3)$؛ 1

6 $(-4, 1)$؛ -3

7 $(2, 3)$؛ -2

8 $(-4, 1)$؛ 0

9 $(2, 3)$؛ $-\frac{3}{2}$

10 $(-4, 1)$؛ پێناسەنەکرییە

ژ ڕاهێنانا **11** هەتا **14** ، لارێ ڕاستەهێلێ دهەردوو خالێن دیارکری را دبوریت بینەدەر.

11 $(5, 2)$ و $(3, -4)$

12 $(4, -2)$ و $(3, -2)$

13 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ و $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{6}\right)$

14 $(2, 5)$ و $(2, 1)$

ژ ڕهێنانا **15** هەتا **18** ، سێ خالێن سەربار ل سەر ڕاستەهێلێ خودان لارێ پێدای و دخالا خالێن پێدای را دبوریت دیاربکە.

15 $(2, 1)$ ؛ $m = 0$

16 $(1, 7)$ ؛ $m = -3$

17 m پێناسەنەکرییە ؛ $(-3, 4)$

18 $(-2, -2)$ ؛ $m = 2$

ژ ڕاهێنانا **19** هەتا **22** ، لارێ ڕاستەهێلی و ئێکودوبرینا ستوونی هەژماربکە.

19 $x + 5y = 20$

20 $6x - 5y = 15$

21 $x = 4$

22 $y = -1$

ژ ڕاهێنانا **23** هەتا **28** هاوکێشەیەکێ بۆ وی ڕاستەهێلێ خودان لارێ دیارکری و دوو خالێن پێدای را دبوریت بنڤیسە، و پاشی وێنەیێ وی بکێشە.

23 $(0, 3)$ ؛ $m = \frac{3}{4}$

24 $(3, -2)$؛ $m = 3$

25 $(0, 4)$؛ $m = 0$

26 $(-2, 4)$؛ $m = -\frac{3}{5}$

27 $(0, 0)$؛ $m = \frac{2}{3}$

28 $(-1, 2)$ ؛ پێناسەنەکرییە

ژ ڕاهێنانا 29 هەتا 34 ، هاوکێشەیا وی راستەهێلی دهەر دوو خالێن دیارکری را دبۆریت بنڤیسە:

29 $(2, 1)$ و $(0, 3)$

30 $(-3, -4)$ و $(1, 4)$

31 $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ و $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

32 $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right)$ و $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

33 $(5, 1)$ و $(5, 8)$

34 $(1, -2)$ و $(3, -2)$

35 هاوکێشەیا راستەهێلی ستوونی ئەوێ ئێکوددووبڕینا وی یا ئاسۆیی ل 3 هەبیت بنڤیسە.

36 هاوکێشەیا راستەهێلی ئاسۆیی ئەوێ ئێکوددووبڕینا وی یا ستوونی ل 3 هەبیت بنڤیسە.

37 هاوکێشەیا راستەهێلێ د دوو خالان را دبۆریت بکاربینە دا دیاربکەی کو هاوکێشەیا راستەهێلی خودان ئێکوددووبڕینا ئاسۆیی $(a, 0)$ و ئێکوددووبڕینا ستوونی $(0, b)$ دبیتە $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ دەمێ $a\neq 0$، $b\neq 0$.

ل هەردوو راهێنانێن 38 و 39 ، ئەنجامێ راهێنانا 37 بکاربینە بۆ نڤیسینا هاوکێشەیا راستەهێلەکی هەردوو ئێکوددووبڕینێن وی دیارکری:

38 $(2, 0)$ و $(0, 3)$

39 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ و $(0, -2)$

ژ ڕاهێنانا 40 هەتا 43 ، هاوکێشەیا راستەهێلی دخالا پێدای رادبوریت و تەریب دگەل راستەهێل پێدای بنڤیسە:

40 $(2, 1)$ ؛ $4x-2y=3$

41 $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$ ؛ $5x-3y=0$

42 $(-6, 4)$ ؛ $3x+4y=7$

43 $(-1, 0)$ ؛ $y=-3$

ژ ڕاهێنانا 44 هەتا 47 ، هاوکێشەیا راستەهێلی دخالا پێدایی را دبۆریت و ستوون بیت دگەل راستەهیلی پێدای بنڤیسە:

44 $(2, 1)$ ؛ $4x-2y=3$

45 $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$ ؛ $5x-3y=0$

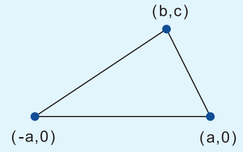
46 $(-6, 4)$ ؛ $3x+4y=7$

47 $(-1, 0)$ ؛ $y=-3$

48 ئەرێ ئەڤ خالانە $(-2, 1)$ و $(-1, 0)$ و $(2, -2)$ دکەڤنە سەر ئێك ڕاستەهێل؟

دەربارەی چەمکان (تێگەهان)

ژ ڕاهێنانا 49 هەتا 51 ، پۆتانێ خالا ئێکوددووبڕینا دەستنیشانکری هەژماربکە، و رونبکە چەوا تە شیکارکر.



49 خالا ئێکوددووبڕینا تەوەرێن لایێن سێگۆشەیێ.

50 خالا ئێکوددووبڕینا ناڤەراستێن سێگۆشەیێ.

51 خالا ئێکوددووبڕینا بلنداهیێن سێگۆشەیێ.

52 **گۆهۆڕینا پلەیێن گەرماتیێ:** ئاڤ ل پلەیا 100° دکەلیت ل سەر پیڤەری سەدی (212° ل سەر پیڤری فەرنهایت)، و ل پلەیا گەرماتیێ 0° دبەستت ل سەر پیڤاریێ سەدی (32° ل سەر پیڤەریێ فەرنهایت). هاوکێشەیەکا هێلی بنڤیسە بۆ گۆهۆڕینێ ژ پیڤەری سەدی بۆ پیڤەری فەرنهایت. و ئێکا دی بۆ گۆهۆڕینێ ل ئاراستێ بەروڤاژی. 72F ژ پیڤەرێ فەرنهایت بۆ پلەیێن گەرماتیێ ل پیڤەری سەدی بگوهۆڕە.

53 کۆمپانیەك ڕۆژانە 15 000 دیناران ددەتە شۆفێرێ بارهەلگرەکێ بۆ خوارنا وی و بهێنقەدانێ، و 350 دیناران ددەتێ بۆ هەر کیلومیتەرەکی ببڕیت. نەخشەکێ بنڤیسە نموونەکێ پێکبینیت بۆ هەژمارکرنا بڕێ پارەیێ کومپانی ددەتە شوفیری پێ ژمارا وان کیلۆمێتەرێن دبڕیت. هەکە شوفێر $137km$ ببڕیت، کومپانی دێ چەند پارەی دەتێ؟

54 **بکاربرنا هێلی:** دەمێ تو ترومبێلەکێ دکرِی، بهایێ وێ سال ل دووڤ سالێ دهێتە خوارێ، ئانکو ترومبێل سال ل دووڤ سالێ دهێتە بکاربرِن، شارەزایێن کارگێرییێ پشت بەست دبن ب ڕێسایەکێ بۆ هەژمارکرنا بکاربرنێ، ل دووڤ ڤێ ڕێسایێ دیاردبیت کو بەهایێ بکاربرنێ یی نەگۆرە ژ سالەکێ بۆ سالەکا دی. کۆمپانیەکێ ئامیرەك کرِی بهایێ وی 875 000 دینار بوو. ئەڤ ئامێرە ب کێر کاری ناهێت و هیچ بهایەك بۆ نامینت پشتی 5 سالان.

أ نەخشەیەکە هێلی بنڤیسە نموونەیەکێ پێکبینت بۆ هەژمارکرنا بهایێ وی ئامیری پێ دەمی t $(0 \le t \le 5)$.

ب بهایێ ڤی ئامیری چەندە هەکە $t = 2$.

ج پشتی چەند دەمی نرخێ وی ئامیری دبیتە 175 000 دینار؟

دووریا خالا (x_1, y_1) ژ ڕاستەهێلی $Ax + By + C = 0$ ب یاسایا $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ دئێتە پیڤان. ژ ڕاهێنانا 55 هەتا 58 ، دووریا خالێ ژ ڕاست هێلی هەژماربکە:

55 $(0, 0)$ ؛ $4x + 3y = 10$

56 $(-2, 1)$ ؛ $x - y - 2 = 0$

57 $(6, 2)$ ؛ $x = -1$

58 $(2, 3)$ ؛ $4x + 3y = 10$

59 پێ m، دووریێ d ل ناڤبەرا خالا $(3, 1)$ و ڕاستەهێلی $y = mx + 4$ بنڤیسە. ب وێنەیێ روونکرنێ d پێ m بنوێنە. کەنگی ئەڤ دووریە دبیتە 0 ؟ ئەنجاێ ب ئەندازێ ڕۆنبکە.

60 بسەلمینە کو شێوەیێ ئەندازەی ئەوێ پێکدهێت ژ ئەنجامێ پێکگەهاندنا ناڤەراستێن لایێن جوار لایەکی ئێك ل دووڤ ئێك دبیتە لاتەریب.

دروستە یان نەیا دروستە (خەلەتە): ژ ڕاهێنانا 58 هەتا 61 ، هەکە دەستەواژەیا دروست بوو ڕۆنبکە، هەکە نەیا دروست بوو بسەلمینە.

61 هەردوو ڕاستەهێلێ $ax + by = c_1$ و $bx - ay = c_2$ ، ستوونن، دەمێ $a \ne 0$ و $b \ne 0$.

62 چێدبیت دوو ڕاستەهێلێن لارێن وان مووجەب، دگەل ئێکودوو ستوون بن.

بەشێ 1

ئەزموونا نیڤا بەشی

1–1 وێنەیێن رونکرنێن نەخشەیان (چەماوە)

1 وێنەیێ رۆنکرنا هەر نەخشەیەکێ ب خالان بکێشە.

أ $f(x)=2x^2-4x$

ب $f(x)=2\sqrt{x+1}-1$

2 ئێکودووبرینێن وێنەیێ رۆنکرنێ بۆ هەر نەخشەیەکێ دگەل هەردوو تەوەرێن پۆتان هەژماربکە. هاوجێبوونا وێ دگەل تەوەرێ y و دگەل خالا بنەرەت دیاربکە:

أ $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$

ب $f(x)=(3x-1)^2+6x$

3 $f(x)=x^3+3x$ و $g(x)=x^2+3$.

أ دیاربکە کو نەخشەیا f یە کتە و نەخشەیا g یە جووتە.

ب خالێن ئێکودووبرینا وێنەیێ رۆنکرنا هەردوو نەخشەیان هەژماربکە.

2–1 هاوکێشەیا راستەهێلی

4 هاوکێشەیا راستەهێلی لاریێ وی (-2) و دخالا $(2, -1)$ را دبۆریت بنڤیسە.

5 هاوکێشەیا راستەهێلی د هەردوو خالێن $(0, 1)$ ، $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$ را دبۆریت بنڤیسە.

6 خالا ئێکودووبرینا هەردوو راستەهێلێن هەردوو راهێنانێن 4 و 5 دیاربکە.

7 هاوکێشایا راستەهێلی دهەردوو خالێن $(2, 0)$ و $(0, b)$ را دبۆریت بنڤیسە، $b\neq 0$. بەهایێ b چەندە هەکە ئەو راستەهێلا ستوون بیت دگەل راستەهێلێ $x-2y+1=0$ ؟

8 بەهایێ m چەندە کو خالێن $(2, 0)$ ، $(0, -3)$ ، $(m, 1)$ بکەڤنە سەر ئێك راستەهێلی؟

3-1

نەخشە و وێنەیێن روونکرنا وان

Functions and Their Graphs

ئارمانج

- نڤیسینا نەخشەیی بکاردئینن بۆ نواندنا نەخشەیێ و هەژمارکرنا بەهایێ وێ.
- بوارو مەودایێ نەخشەیێ دیاردکەن.
- وێنەیێ روونکرنا نەخشەیێ وێنەدکەن.
- گوهۆڕینێن نەخشەیان یێن جۆراوجۆر دیاردکەن.
- نەخشەیان پۆلیندکەن و ئاوێتەکرنا وان دیاردکەن.

نەخشە و نڤیسینا نەخشەیی:

تو دشێی **پەیوەندیێ** ژ کۆمەلا A بۆ کۆمەلا B ب کۆمەلەکا جووتێن رێکخستی(x, y) دەربیڕی کو $x \in A$ و $y \in B$. تو دشێی بێژی پەیوەندی y دگەل x **گرێددەت**.

نەخشە پەیوەندییەکە ژ کۆمەلا A بۆ کۆمەلا B ، و سیفەتێن بنەرەت یێن تایبەت هەنە،، کو دوو دانە y ، z دکۆمەلا B دا دێ یەکسان بن هەکە نەخشە وان هەردووان دگەل هەمان دانە x د کۆمەلا A دا گرێدەت. ئانکو هەکە (x, y) ، (x, z)دوو جووتێن رێکخستی بن ژ وێ کۆمەلا جووتێن رێکخستییێن نەخشەیێ پێکدئینن، دێ $z = y$. ل ڤێ پەیوەندیێ دبێژنە x **گۆڕاویێ ئازاد** و دبێژنە y **گۆڕاویێ پشتبەست (پەیوەست)**.

پێناسا نەخشەیا راستی ب گۆڕاویێ راستی

هەکە A و B دوو کۆمەلە بن ژ ژمارەیێن راستی، هەر نەخشەیەك f ژ A بۆ B دێ بیتە **نەخشەیەکا راستی ب گۆڕاویێ راستی**.

بواریێ نەخشەیا f دبیتە کۆمەلا A . هەکە نەخشەیا f دانەییێ y ل کۆمەلا B دگەل دانەییێ x ل کۆمەلا A گرێدەت، دێ نڤیسن $y = f(x)$ و ، y دبیتە بەهاییێ f ل دەڤ x، یان y دبیتە وێنەییێ x پێ نەخشەیا f. مەودایێ نەخشەیا f دبیتە کۆمەلا بەهاییێن f بۆ هەموو بەهاییێن x..

ل پۆلا یازدێ تو فێربوویی کو تو دشێی نەخشەی ب رێکێن جودا پێناسەبکەی. بەلێ ل پۆلا دوازدێ دێ گرنگیێ دەینە نەخشەیێن پێناسەکرین ب هۆییێ هاوکێشەیێن جەبری.

بۆ نموونە هاوکێشەیا $x^2 + 2y = 1$ تو دشێی گۆڕاویێ پشتبەست (y) وەك نەخشەیەك پێ گۆڕاویێ ئازاد (x) پێناسەبکەی. بۆ نڤیسینا وێ، دێ y پێ x نڤیسی، کو بەهاییێ y هیچ گۆڕاوەکی دی ژبلی x بخۆڤەنەگرت. چونکی$y = f(x)$ دێ ئەم شێین بنڤیسین.

$$y = \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)$$

نڤیسینا نەخشێ ل سەر ڤی شێوەیی دبێژنێ **نڤیسینا نەخشەیی** بۆ نەخشێ. نڤیسینا نەخشەیی گەلەك مفا هەنە، ئەو ب شێوەیەکی ئاشکرا گۆڕاویێ ئازاد (x) و گۆڕاویێ پشتبەست$f(x)$ و ناڤێ نەخشەیا f دیاردکەت. هەروەسا ئەو هەژمارکرنا بەهاییێ نەخشەی ساناهی دکەت دەمێ گۆڕاویێ ئازاد بەهایەکی دیارکری وەردگرت. بۆ نموونە، بۆ هەژمارکرنا بەهاییێ نەخشەیا $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ دەمێ $x = -2$، ل جهێ x ، بهاییێ وی دانە، بەهایێ بڕێ ژمارەی ئەوێ ژ ئەنجامێ لجهدانانێ پەیدادبیت هەژماربکە.

$$f(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) + 1 = 2(4) + 8 + 1 = 17$$

ل بێرا تەبیت، دەمێ تو ل جهێ x بەهایەکی دیارکری وەك (a) دنەخشەیا $f(x)$ ددانی، بەهاییێ$f(a)$ ئەوێ بدەست تەدکەڤیت دبیتە وێنەییێ (x) پ نەخشەیا f.

زاراڤ Vocabulary

پەیوەندی	Relation
گرێدەت	Associate
نەخشەیەکا راستی ب ئێك گۆڕاویێ راستی	Real function in one real variable
بوار	Domain
مەودا	Range
نڤیسینا نەخشەی	Function notation
نەخشەیا جودا	One-to-One function
نەخشەیا گشتیگر	Onto function
نەخشەیا رادەدار	Polynomial function
پلە	Degree
هاوکۆلکە	Coefficient
هاوکولکەیێ سەرەکی	Leading Coefficient
رادەیێ نەگۆڕ	Constant term

نموونـــــه 1

دەرئینانا بەهایێ نەخشەیەکێ

بهایێ هەر برەکێ بکارئینانا نەخشەیا $f(x)=x^2+7$ بینەدەر.

أ $f(3a)$ ب $f(b-1)$ ج $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ کاتێك $\Delta x \neq 0$

شیکار

أ $f(3a)=(3a)^2+7=9a^2+7$

ب $f(b-1)=(b-1)^2+7=b^2-2b+1+7=b^2-2b+8$

ج $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2+7-(x^2+7)}{\Delta x}$

$$=\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+7-x^2-7}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$$

تێبینی: دبێژنە برێ $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ئەنجامێ دابەشکرنا دوو جودایان، و ئەوی روولەکێ گرنگ یێ هەی ل هەژمارکرنا جوداکارییێ، دێ پاشی بینی. و ژێرە نە یەکسانە سفر.

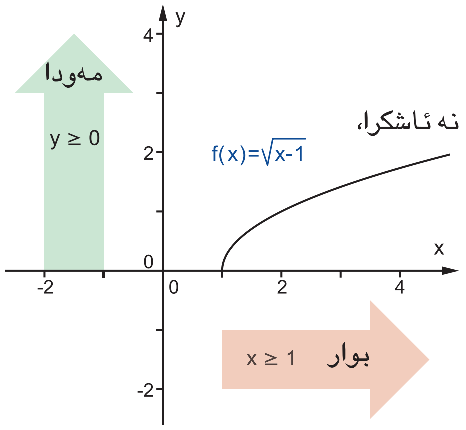
خالا چاڤدێرییێ

1. بهایێ هەر برەکێ بکارئینانا نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{x}$ بینەدەر.

أ $f(3a)$ ب $f(\sqrt{3})$ ج $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ کاتێك $\Delta x \neq 0$

بوار و مەودایێ نەخشەیێ

بوار



بوارێ نەخشەیێ دهێتە دیارکرن ب رێکا ئاشکرا یان ب رێکا نە ئاشکرا، بکارئینانا وێ هاوکێشا نەخشێ پێناسەدکەت:

- بوارێ نەخشەیا $f(x)=\sqrt{x-3}$ دبیتە $\{x/x\geq 3\}$
  چونکی دڤێت $x-3$ نەیێ سالب بیت.
- بوارێ نەخشەیا $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ دبیتە $\{x/x\geq 3\}$
  چونکی دڤێت $x-3$ نەیێ سالب بیت.
- بوارێ نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}$ دبیتە $\{x/x<3\}$ چونکی دڤێت
  $3-x$ نەیێ سالب بیت و نەیەکسانی سفرێ بیت

مەودا

مەودایێ نەخشەیا f، دبیتە کۆمەلا ژمارەیێن راستێ ئەوێن دبن بەهایێن نەخشەی، ئانکو دبنە کۆمەلا بەهایێن $f(a)$ کو a دبوارێ نەخشەیا f دایە.

تو دشێی مەودایێ نەخشەیا f دیاربکەی، بدیتنا وێنەیێ روونکرنا نەخشەی ل سەر شاشا بژمێرا رۆنکرنێ، یان ژ دیتنا هاوکێشا وێ نەخشێ پێناسە دکەت. بۆ نموونە:

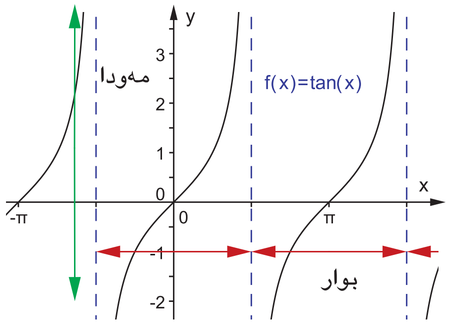
- مەودایێ نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{x}$ دبیتە $\{y/y\neq 0\}$ چونکی $\frac{1}{x}$ نابیت یەکسانی سفر بیت و هەموو بەهایێن دی ژبلی 0 وەردگرت.
- بوارێ نەخشەیا $f(x)=\sin x$ دبیتە $\{y/-1\leq y\leq 1\}$ چونکەی $\sin x$ چو بەهایان ل دەرڤەی ماوەیێ $[-1,1]$ وەرناگرت.

نموونــــــه 2

دیارکرنا بوار و مەودایێ نەخشێ

بوار و مەودایێ هەر نەخشەیەکێ دیاربکە.

أ $f(x)=\sqrt{x-1}$ ب $f(x)=\tan x$



شیکار

أ بوارێ نەخشەیێ دبیتە کومەلا ژمارەیێن راستی ئەوێن $x-1\geq 0$ ساخدکەن، ئەو دبیتە ماوەیێ $[1, +\infty[$
مەودایێ نەخشەیێ دبیتە کومەل ژمارەیێن راستی یێن نە سالب ئانکو $[0, +\infty[$ چونکی $\sqrt{x-1}$ نابیتە بەهایێن سالب وەربگرت.

ب بوارێ نەخشەیێ دبیتە کومەلا ژمارەیێن راستی ئەوێن $x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$ ساخدکەن دەمێ $n\in I$ (Integer). و مەودایێ وی دبیتە کۆمەلا هەموو ژمارەیێن راستی.

خالا چاڤدێری

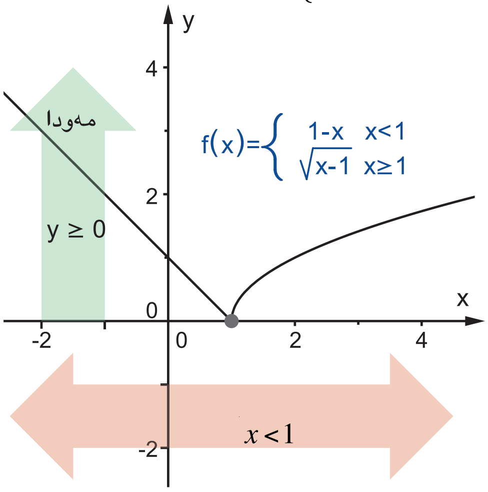
2. بوار و مەودایێ هەر نەخشەیەکێ دیاربکە.

أ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ب $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

نموونــــــه 3

دیارکرنا بوار و مەودایێ نەخشەیەکا ڕێسا پلەدار

بوار و مەودایێ نەخشەیا $f(x)=\begin{cases}1-x & x<1\\ \sqrt{x-1} & x\geq 1\end{cases}$ دیاربکە.



نموونــــــه 4

دیارکرنا بوار و مەودایێ نەخشەی هەکە ڕووتی بخوٚڤە بگرت.

بوار و مەودایێ نەخشەیا $f(x)=|1-x|+x$ دیاربکە.

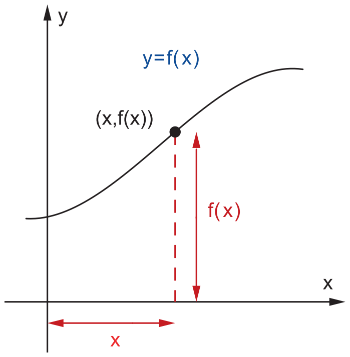
شیکار

بوارێ نەخشەی دبیتە کومەلا هەموو ژمارەیێن راستی، چونکی ئەوا پێاسەکریە بەهایێ x هەر چەند بیت. مەودایێ نەخشەی دبیتە $\{y\,|\,y\geq 1\}$ چونکی، بەهایێ ڕووت نابیتە سالب.
بەرێ خو بدێ کو (0) نە دمەوادایێ نەخشەی دایە چونکی بەهایێ نەخشەی دبیتە سەرجەمێ دوو بەهایێن ڕووت کو بەهایێ هەر ئێك ژوان نابیتە 0 دهەمان دەمدا.

خالا چاڤدێری

3. بوار و مەودایێ نەخشەیا $f(x)=\begin{cases}3-x & x<3\\ \sqrt{x-3} & x\geq 3\end{cases}$ دیاربکە.

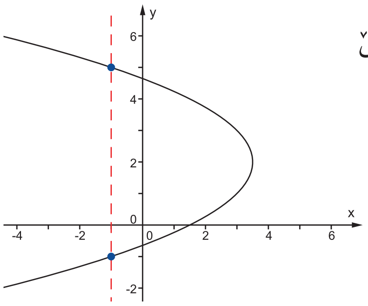
دبێژنە نەخشەیا f نەخشەیا **جودا**، هەکە هەر دانەیەك y دمەودایێ وێدا یێ گرێدایبیت بتنێ دگەل ئێك (x) د بوارێ وێدا، یان ب دەربڕینەکا دی، هەردوو دانە x_1 و x_2 ژ دانەیێن بوارێ دێ یەکسان بن هەکە هەردوو بەها $f(x_2)$ و $f(x_1)$ یەکسان بن. نەخشەیا د نموونەیا (2) دا نەخشەیەکا جودایە و نەخشەیا دنموونەیا (1) دانەیا جودایە، و دبێژنە نەخشەیا f ژ کومەلا A بۆ کومەلا B نەخشەیەکا **گشتگرە**، هەکە مەودایێ وێ هەموو B بخۆڤەبگرت. نەخشەیا دووێ ل نموونەیا (2) نەخشەیەکا گشتگرە.



وێنەیێ روونکرنا نەخشەیێ

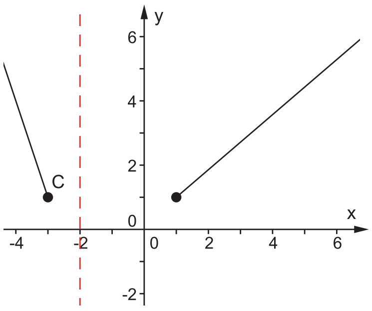
وێنەیێ روونکرنا نەخشەیێ پێکدهێت ژ هەموو خالێن $(x, f(x))$ دەمێ x هەموو بهایێن د بوارێ نەخشەیێدا وەردگرت. بنێرە وێنەیێ بەرامبەر، و ئەڤێ تێبینێبکە:

- x دبیتە دووراتیا جەبری (موجەب یان سالب) دناڤبەرا خالێ و تەوەرێ y دا.
- $f(x)$ دبیتە دووراتیا جەبری دناڤبەرا خالێ و تەوەرێ x دا.

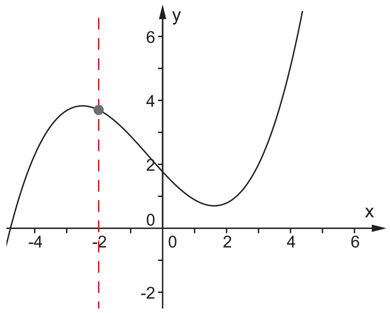


وێنەیێ رونکرنێ نابیتە نەخشە

هەکە تە راستەهێلەکی ستوونی کێشا دێ ئەو وێنەیێ روونکرنا نەخشەیێ بزێدەهی جارەکێ بتنێ بڕت. ئەڤ تێبینیە تاقیکرنا بدیتنێ دابین دکەت بۆ دیارکرنا ئەوێ چەندێ ئەرێ وێنەیێ روونکرنێ نەخشەکێ دنوێنت یان نە، دبێژنە ڤێ **تاقیکرنا راستەهێلی ستوونی**. هەکە راستەهێلێ ستوونی وێنەیێ روونکرنێ پتر ژ خالەکێ بڕی، ئەڤ وێنە نەخشەیەکی نانوینت، وێنەیێ روونکرنا بەرامبەر نابیتە نەخشە چونکی راستەهێلێ $x = -1$ وی وێنەیی ل دووخالێن جودا دبڕیت، بەلێ هەردوو وێنەیێن دی نەخشەیێ دنوێنن.

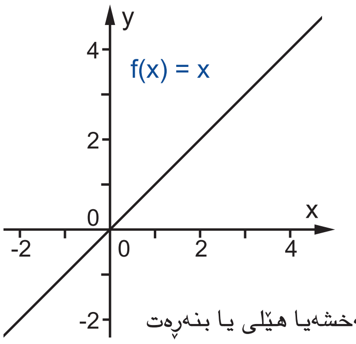


وێنەیێ روونکرن دبیتە نەخشە

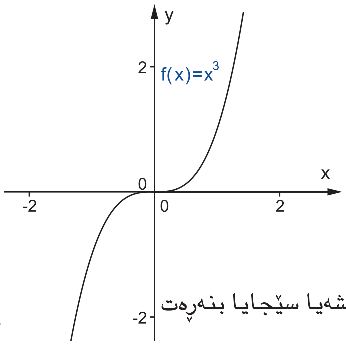


وێنەیێ روونکرنێ دبیتە نەخشە

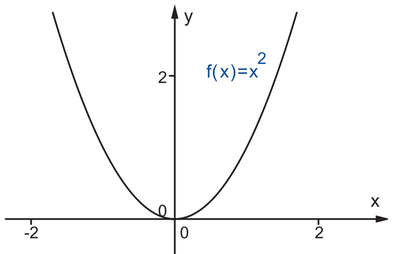
ئەڤ وێنەیێن ل خوارێ روونکرنێن 11 نەخشەیێن بنەڕەت دیاردکەن، هەول بدە هەر نەخشەیەکێ و وێنەیێ وێ پێناسەبکە.



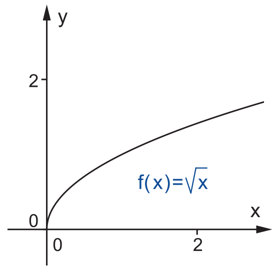
نەخشەیا هێلی یا بنەڕەت



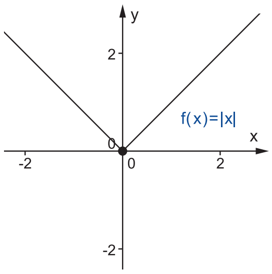
نەخشەیا سێجایا بنەڕەت



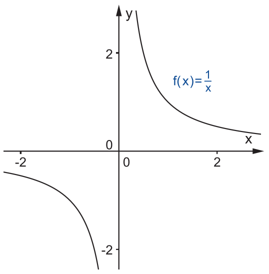
نەخشەیا دووجایا بنەڕەت



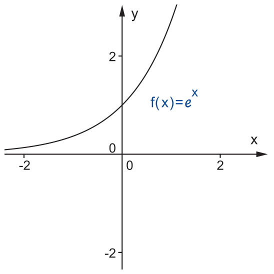
نەخشەیا ڕەگێ دووجایا بنەڕەت



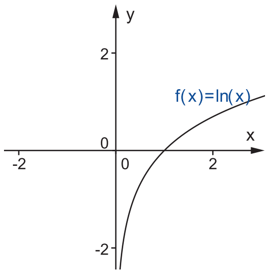
نەخشەیا بەهایێ رووتێ بنەڕەت



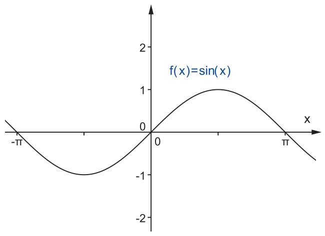
نەخشەیا هەلگەڕاوا بنەڕەت



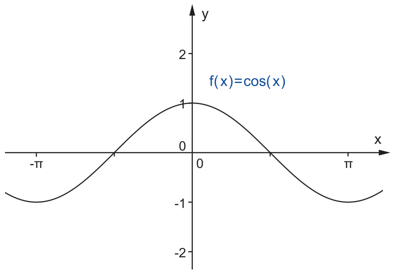
نەخشەیا توانی پا بنەڕەت



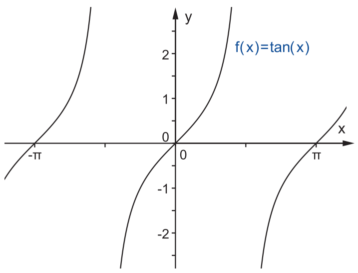
نەخشەیا لوگاریتمی یا بنەڕەت



نەخشەیا ساینا بنەرەت



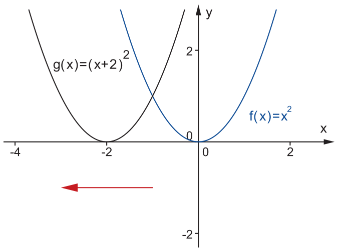
نەخشەیا کوساینا بنەڕەت



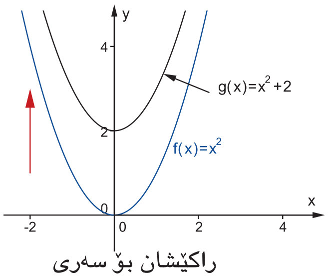
نەخشەیا تانجنتا بنەڕەت

جهگۆهۆڕکێن نەخشەیان

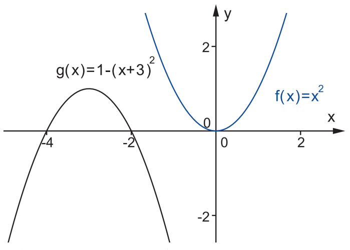
چێدبیت نەخشە دکۆمەلاندا بهێتە پۆلینکرن. وێنەیێن روونکرنێن بۆ هەر کۆمەلەکێ ئێك شێوەیێ گشتی هەنە. هەکە کومەلا نەخشەیێن دووجایی وەربگری، دێ بینی هەموو وێنەیێن روونکرنێن وێ ئێك شێوەیێ بنەڕەت هەنە، هەر وەك دیار ل وێنەیێ ل خوارێ.



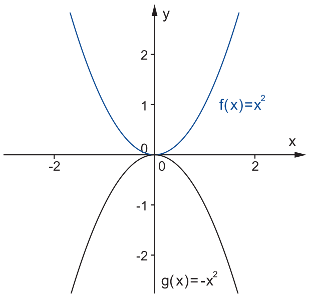
راکێشان بۆ رەخێ چەپێ



راکێشان بۆ سەری



راکێشان بۆ رەخێ چەپێ پاشی وێنەدانەوە لدۆر تەوەرێ x و پاشی راکێشان بۆ سەری



وێنەدانەوە لدۆر تەوەرێ x

هەر رووونكرنەك ژ رووونكرنێن بورین دبیتە جهگوهۆركەك بۆ وێنەیێ ڕۆنكرنا بنەڕەت. سێ ژ هەر چار شێوەیێن بۆرین دبنە جهگۆهۆركێن بنەڕەت: ڕاكێشان بۆ سەری و ڕاكێشان بۆ رەخێ چەپێ، وێنەدانەوە لدور تەورێ x . تو دشێی جهگۆهۆركێن هاتینە ئەنجامدان ژ نەخشەیێن بنەڕەت دیاربكەی، ئەو ژی ب ئێك ب ئێك ژ لڤێن وێ بێی هەردوو وێنەیێن رووونكرنێ بهێنە كێشان.

هەكە نەخشەیا بنەڕەت ئەڤ نەخشەیە بیت $f(x)=x^2$ ، دێ رووونكرنێن هەر چار نەخشەیان:

$y=f(x)+2$	ڕاكێشان ب 2 یەكان بۆ سەری.
$y=f(x+2)$	ڕاكێشان ب 2 یەكان بۆ رەخێ چەپێ.
$y=-f(x)$	وێنەدانەوە لدۆر تەوەرێ x .
$y=-f(x+3)+1$	ڕاكێشان ب 3 یەكان بۆ رەخێ چەپێ و وێنەدانەوە لدور تەوەرێ x و ڕاكێشان ب یەكەیەكێ بۆ سەری.

جهگۆهۆركێن بنەڕەت $(c>0)$

$y=f(x)$	وێنەیێ رووونكرنا بنەڕەت
$y=f(x-c)$	ڕاكێشانا ئاسویی ب c یەكان بۆ رەخێ ڕاستێ
$y=f(x+c)$	ڕاكێشانا ئاسویی ب c یەكان بۆ رەخێ چەپێ
$y=f(x)+c$	ڕاكێشانا ستوونی ب c یەكان بۆ سەری
$y=f(x)-c$	ڕاكێشانا ستوونی ب c یەكان بۆ خوارێ
$y=-f(x)$	وێنەدانەوە لدور تەوەرێ x
$y=f(-x)$	وێنەدانەوە لدور تەوەرێ y
$y=-f(-x)$	وێنەدانەوە لدور خالا بنەڕەت

پۆلینكرنا نەخشەیان

باشیا جەمكێ نویێ نەخشێ ڤەدگەڕێت بۆ رەنجا زانایێن بیركاریێ دهەردوو چەرخان دا (17 و 18). و باشیا نڤیسنا نەخشەیا $y=f(x)$ ڤەدگەڕێت بۆ لیوناردو ئولەری Leonhard Euler . زانا لدوماهیكا چەرخێ (18) گەهشتنە ڤێ چەندێ كو یا دشیاندایە هندەك نموونەیێن بیركاری دیاربكەن بۆ ڤەكۆلینا گەلەك پرسیارێن ژیانا رۆژانە بكارئینانا كۆمەلەكا نەخشەیان گۆتنێ **نەخشەیێن سادە**.

نەخشەیێن سادە دسێ جۆران دا دهێنە پۆلینكرن، تە ل پۆلێن دهێ ویازدێ یێن خواندنین:

- **نەخشەیێن جەبری** (ڕادەدار، ڕێژەیی، ڕەگدار)
- **نەخشەیێن سێگۆشەیی** (نەخشەیێن ساین و كوساین و تانجنت)
- **نەخشەیێن توانی و لوگاریتمی**.

نەخشەیێن ژ هەموویان بەربەلاڤتر **نەخشەیێن ڕادەدارن**. شێوەیێ گشتی بۆ نەخشەیا ڕادەدار ئەڤەیە:

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \; ; \quad a_n \neq 0$$

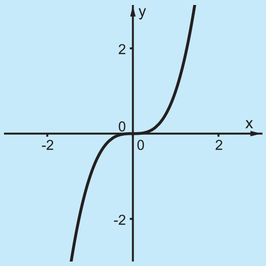
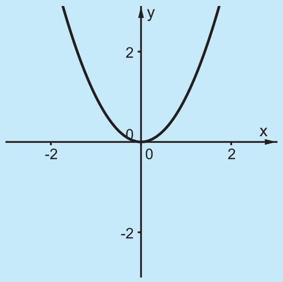
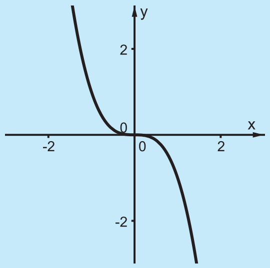
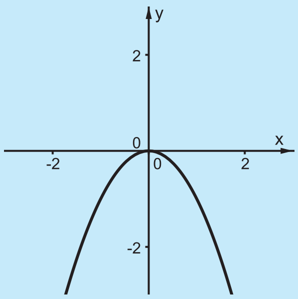
لیۆناردو ئولەر 1707 – 1783

زێدەباری پیتەدانا وێ بۆ هەموو بەشێن بیركاریێ. ئولەر دهێتە هژمارتن ژ یێن ئێكێ بۆ بجهئینانا هەژماركرنا جواكاری و تەماكاریێ ل سەر برسیارێن ژیانێ دفیزیایێدا. ئەوی دگەلەك پەرتووكێن خودا بەحسی چێكرنا پاپۆران و زانستا دەنگی و زانستا رونایێ و گەردون و میكانیكێ و بارێ میگناتیكێ كریوو.

دەمێ ژمارەیا تەواوا موجەب n دبیتە پلەیا نەخشەیێ و ژمارەیێن $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ دبنە **هاوکۆلکەیێن نەخشەی**، و هاوکۆلکەیێ a_n **هاوکۆلکەیێ سەرەکییە**، و هاوکولکەیێ a_0 **رادەیێ نەگۆڕە یان هاوکۆلکەیێ نەگۆڕە**، گەلەک جاران هێمایێن a_i بۆ نڤیسینا هاوکۆلکەیێن نەخشەیا رادەدار بکاردئینن، بەلێ هەکە رادەدار ژ پلەیێن نزم بن، هاوکۆلکەیێن وان بکارئینانا پیتێن جودا دنڤیسین، هەروەک دیار ل خشتەیێ ل خوارێ:

پلە	شێوە	ناڤ
نەخشەیەکا رادەدار پلەیا 0	$f(x) = a$	نەخشەیا نەگۆڕە
نەخشەیەکا رادەدار پلەیا ئێکێ	$f(x) = ax + b$	نەخشەیا هێلیە
نەخشەیەکا رادەدار پلەیا دووێ	$f(x) = ax^2 + bx + c$	نەخشەیا دووجاییە
نەخشەیەکا رادەدار پلەیا سێیێ	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	نەخشەیا سێجاییە

چێدبیت ل سەر چەماوەیێ نەخشەیا رادەدارا نەیا نەگۆڕ هندەک خالێن جهگۆهورکێ دیاربن کە ئەو بێسنور بلند بیت یان نزم بیت دەمێ x بەرەڤ $+\infty$ یان $-\infty$ بلڤیت. پشتبەستن ب پلەیا جووت یان پلەیا کت یا نەخشەیێ و نیشانا هاوکۆلکەیێ وێ یێ سەرەکی، دێ شێن سیفەتێ نەخشەیا رادەدار دیاربکەن، ئەڤ خشتە پۆختەیێ ڤێ سیفەتێیە.

بۆ نەخشەی...	پلەیا کت بیت	پلەیا جووت بیت
هاوکۆلکەیێ سەرەکی موجەب	$f(x) \to +\infty$ دەمێ $x \to +\infty$  $f(x) \to -\infty$ دەمێ $x \to -\infty$	$f(x) \to +\infty$ دەمێ $x \to +\infty$  $f(x) \to +\infty$ دەمێ $x \to -\infty$
هاوکۆلکەیێ سەرەکی سالب	$f(x) \to -\infty$ دەمێ $x \to +\infty$  $f(x) \to +\infty$ دەمێ $x \to -\infty$	$f(x) \to -\infty$ دەمێ $x \to +\infty$  $f(x) \to -\infty$ دەمێ $x \to -\infty$

ئاوێتەكرنا نەخشەیان

تو ل پولا یازدێ فێری وێ چەندێ بوویی كۆ یا دشیاندایە نەخشەیێن نو پێناسەبكەی بكارئینانا هەردوو نەخشەیان f و g . هەكە $f(x)=2x-3$ و $g(x)=x^2+1$ ، تو دشێی ڤان نەخشەیان پێناسەبكەی:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(2x-3)+(x^2+1)=x^2+2x-2$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(2x-3)-(x^2+1)=-x^2+2x-4$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=(2x-3)(x^2+1)=2x^3-3x^2+2x-3$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x-3}{x^2+1}$$

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=2\big(g(x)\big)-3=2(x^2+1)-3=2x^2-1$$

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=\big(f(x)\big)^2+1=(2x-3)^2+1=4x^2-12x+10$$

تێبینی:- $f\circ g\neq g\circ f$

نموونـــە 4 دیاركرنا بوارێ نەخشەیا ئاوێتە

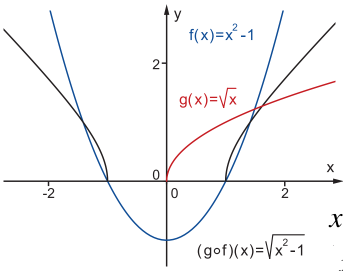
بوارێ نەخشەیا $g\circ f$ دیاربكە دەمێ $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$.

بوارێ نەخشەیا gofoh دیاربكە دەمێ $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=3x$ و $h(x)=x-2$

شیكار

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2-1}$$

بوارێ نەخشەیا $g\circ f$ دبیتە كومەلا ژمارەیێن راست x ئەوێن $x^2-1\geq 0$ ساخدكەن.



بۆ شیكاركرنا ڤێ لاسەنگیێ $x^2-1\geq 0$، وێنەیێ روونكرنا نەخشەیا $f(x)=x^2-1$ بكێشە. كومەلا ژمارەیێن راستی x ئەوێن $x^2-1\geq 0$ ساخدكەن دبیتە كومەلا ژمارەیێن راستی ئەوێن $x\leq -1$ یان $x\geq 1$ ساخدكەن.

ڤێجا بوارێ نەخشەیا $g\circ f$ دبیتە $\{x\leq -1$ یان $x\geq 1\}$.

خالا چاڤدێریێ

4. بوارێ ڤێ نەخشەیێ $g\circ f$ بینەدەر دەمێ $f(x)=x^2-1$ ، $g(x)=\frac{1}{x}$.

3-1 راهێنان

ل هەردوو راهێنانان 1 و 2 ، وێنەیێ روونكرنا f و g بكاربینە بۆ بەرسڤدانا پرسیارێن ل خوارێ:

أ بوار و مەودایێ هەر نەخشەیەكێ دیاربكە.

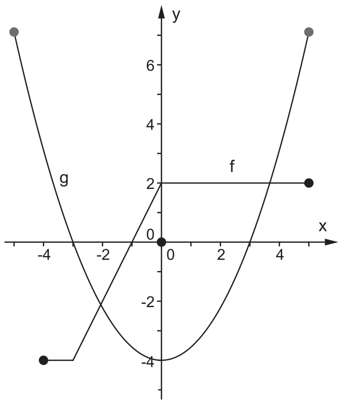
ب $f(-2)$ و $g(3)$ هەژماربكە.

ج بەهایێن x ئەوێن $f(x)=g(x)$ ساخدكەن هەژماربكە.

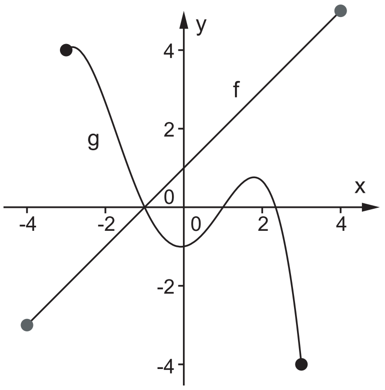
د شیكارەكێ بۆ هاوكێشەیا $f(x)=2$ بخەملینە.

هـ شیكارەكێ بۆ هاوكێشەیا $g(x)=0$ بخەملینە.

2



1



ژ ڕاهێنانا 3 هەتا 8 ، بەهایێن داخوازکری بۆ نەخشەیێ هەژماربکە هەکە یا دشیاندا بیت، ئەنجامی سادەبکە.

3 $f(x)=\sqrt{x+3}$ ؛ $f(-2)$ ، $f(6)$ ، $f(-5)$ ، $f(x+\Delta x)$

4 $f(x)=3-x^2$ ؛ $f(0)$ ، $f\left(\sqrt{3}\right)$ ، $f(-2)$ ، $f(t-1)$

5 $f(x)=\cos 2x$ ؛ $f(0)$ ، $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ، $f(-2)$ ، $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

6 $f(x)=x^3-x$ ؛ $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

7 $f(x)=x^3$ ؛ $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

8 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ ؛ $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

ژ ڕاهێنانا 9 هەتا 11، بوار و مەودایێ هەر نەخشەیەکێ دیاربکە:

9 $f(x)=-\sqrt{x+3}$

10 $f(t)=ln(1\text{-}t)$

11 $f(x)=\frac{2}{x-1}$

ژ ڕاهێنانا 12 هەتا 14 ، بوارێ هەر نەخشەیەکێ دیاربکە:

12 $f(x)=\sqrt{1-x}$

13 $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

14 $f(x)=\frac{1}{|x+3|}$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 15 و 16 ، بەهایێن داخوازکری بۆ نەخشەیێ هەژماربکە.

15 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x<0\\ 2x+2 & x\geq 0\end{cases}$ ؛ $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ ، $f(t^2+1)$

16 $f(x)=\begin{cases}|x|+1 & x<1\\ -x+1 & x\geq 1\end{cases}$ ؛ $f(o)$ ، $f(-3)$ ، $f(1)$ ، $f(3)$ ، $f(b^2+1)$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 17 و 18 ، ب وێنەیێ ڕوونکرنێ بوار و مەودایێ هەر نەخشەیەکێ دیاربکە.

17 $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

18 $f(x)=2\sin\pi x$

دەربارەی چەمکان

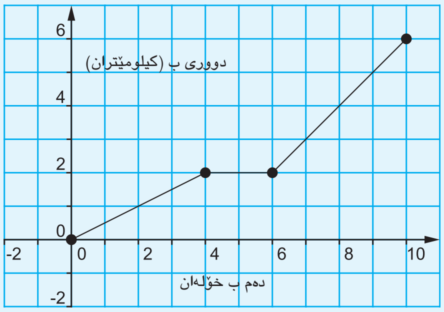
19 وێنەیێ ڕوونکرنا بەرامبەر ڕێرەوێ ئەوێ دووریا قوتابیەک ب ترومبێلا خو دبڕت ژ مال هتا زانکویێ (پێ دەمی) دیاردکەت.

لەزا وی چەند بوو لناڤبەرا $t=0$ ، $t=4$؟

لەزا وی چەند بوو لناڤبەرا $t=4$ ، $t=6$؟

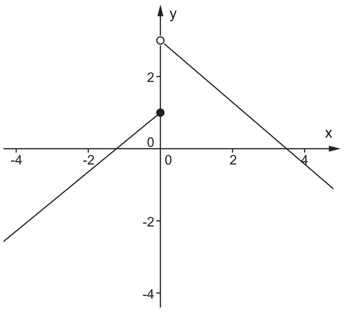
لەزا وی چەند بوو لناڤبەرا $t=6$ ، $t=10$؟

بەحسێ هاژۆتنا ترومبێلا قوتابی بکە.

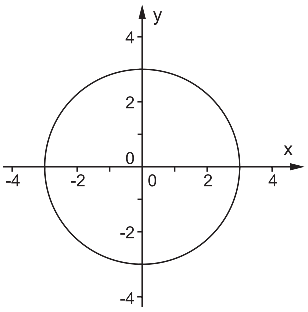


ل هەردوو ڕاهێنانێن 20 و 21 ، تاقیکرنا راستەهێلێ ستوونێ بکاربینە دا بریارێ بدەی ئەرێ وێنەیێ روونکرنێ نەخشەیەکێ دنوێنت یان نە.

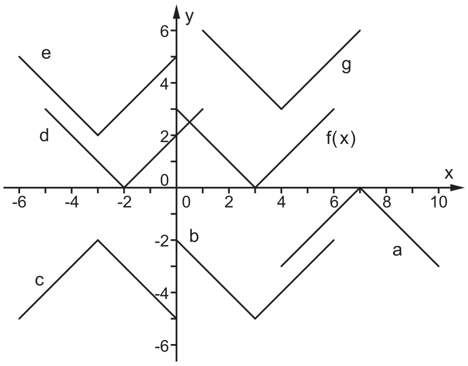
21



20



ژ ڕاهێنانا 22 هەتا 27 ، وێنەیێ روونکرنا نەخشەیا $y = f(x)$ بکاربینە ژ بۆ دیارکرنا وێنەیێ روونکرنا هەر نەخشەیەکێ.



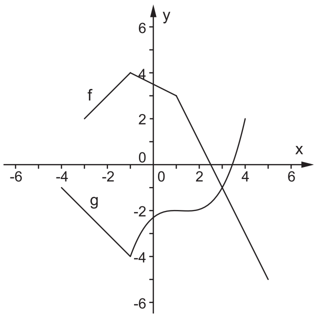
22 $y = f(x+5)$ **23** $y = f(x) - 5$ **24** $y = -f(-x) - 2$

25 $y = -f(x-4)$ **26** $y = f(x+6) + 2$ **27** $y = f(x-1) + 3$

28 $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ هەژماربکە دەمێ $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$. ئەرێ $f \circ g = g \circ f$ ؟

29 $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ هەژماربکە دەمێ $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \sqrt{x+2}$. ئەرێ $f \circ g = g \circ f$ ؟

30 وێنەیێ روونکرنا بەرامبەر بکاربینە بۆ هەژمارکرنا بەهایێن داخوازکری.



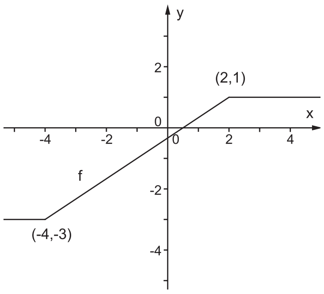
أ $(f \circ g)(3)$ ب $g(f(2))$ ج $g(f(5))$

هـ $(f \circ g)(-3)$ د $(g \circ f)(-1)$ و $f(g(-1))$

31 وێنەیێ روونکرنا نەخشەیا f یا بەرامبەر بکاربینە بۆ وێنەکێشانا وێنەیێ روونکرنێ بۆ هەر نەخشەیەکا ل خوارێ:

أ $y = \sqrt{x} + 2$ ب $y = -\sqrt{x}$ ج $y = \sqrt{x-2}$

32 وێنەیێ روونکرنا نەخشەیا $f(x) = \sqrt{x}$ بکاربینە بۆ وێنەکێشانا هەر نەخشەیەکێ ل خوارێ:



أ $f(x-4)$ ب $f(x+2)$ ج $f(x) + 4$

هـ $f(x) - 1$ د $2f(x)$ و $\frac{1}{2}f(x)$

33 **بازنە:** شیرینێ بەرەك هاڤێتە دناڤ گۆلەكا ئاڤێدا بازنێن ئێك ل دووڤ ئێك و هاوبەش دچەقێدا هاتنە چێكرن. نیڤتیرەیێ بازنەیا ژ هەمووان فرەهتر زێدە دەبیت ل دووڤ ڤێ نموونەیێ $r = 0.6t$ كو t دەمێ بۆری ژ هاڤێتنا بەری ب چركان دنوێنت و (r) هێمایێ نیڤتیرەیێ بازنێە ب پێیان. رووبەرێ بازنێ دهێتە هەژمارتن پی یاسایا $A = \pi r^2$. نەخشەیا $(A \circ r)(t)$ هەژماربكە. رووبەرێ فرەهترین بازنە چەندە پشتی 6 چركان ژ هاڤێتنا بەری.

34 هەرسێ نەخشەیان f، g ، h هەژماربكە هەكە $k = f \circ g \circ h$ و $k(x) = \sqrt{2x-2}$.

ژ ڕاهێنانا 35 هەتا 38 ، دیاربكە ئەرێ نەخشەیە جووتە یان كتە؟

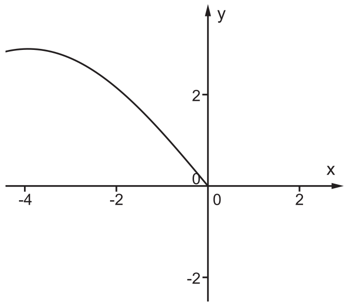
35 $f(x) = x^2\left(4 - x^2\right)$

36 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

37 $f(x) = x\cos x$

38 $f(x) = \sin^2 x$

39 بوارێ نەخشەیێ ل وێنەیێ بەرامبەر دبیتە $-5 \le x \le 5$ وێنەیێ رووونكرنا نەخشەیێ ل هەر بارەكی تەمام بكە هەكە:



أ نەخشەیە جووت بیت.

ب نەخشەیە كت بیت

كارامەیێن (شارەزاییێن) بیركارییێ: ل خوارێ 4 نەخشە و 4 خشتەیێ پێداییان هەنە. دڤێت تو وێ نەخشەیا هەر خشتەیەكێ دنوێنت هەژماربكەی، و بەهایێ c دیاربكە.

$f(x) = cx$ $\quad g(x) = cx^2$ $\quad h(x) = c\sqrt{|x|}$ $\quad k(x) = \frac{c}{x}$

40

x	−4	−1	0	1	4
y	−32	−2	0	−2	−32

41

x	−4	−1	0	1	4
y	−1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1

42

x	−4	−1	0	1	4
y	−8	−32	پێناسە نەكرییە	32	8

43

x	−4	−1	0	1	4
y	6	3	0	3	6

دروستە یان نەیا دروستە؟ ژ ڕاهێنانا 44 هەتا 47 ، دیابكە هەكە دەستەواژە یا دروست بوو هۆیێ وێ ڕۆنبكە، و هەكە نەیا دروست بوو ب دژە نموونەكێ بسەلمینە.

44 هەكە f نەخشەیەك بیت و $f(a) = f(b)$ ، دێ $a = b$.

45 چێدبیت راستەهێلێ ستوونی وێنەیێ رونكرنا نەخشەیێ ب زێداهی ئێك چارێ ببڕیت.

46 هەكە $f(-x) = f(x)$ ، x هەژمارەیەك بیت دبوارێ f دا، دێ وێنەیێ رووونكرنا نەخشەیێ یی هاوجێ بیت دگەل تەوەرێ y .

47 هەكە f نەخشەیەك بیت، دێ $f(ax) = af(x)$.

48 **هزربكە:** نەخشەیا $f(x) = |x| + |x-2|$ بنڤیسە بێی بكارئینانا بەهایێ ڕووت.

بـەشـێ 1

پێداچوونا بەشی

ژ راهێنانا 1 هەتا 4 ، ئێكودووبرینێن نەخشەیێ دگەل هەردوو تەوەرێن پۆتان دیاربكە هەكە هەبن:

1 $y=2x-3$ **2** $y=(x-1)(x-3)$ **3** $y=\frac{x-1}{x-2}$ **4** $y=\frac{4}{x}$

د هەردوو راهێنانادا 5 و 6 جورێ هاوجێ بوونا وێنەیێ روونكرناهاوكێشەیێ دیاربكە.

5 $x^2y-x^2+4y=0$ **6** $y=x\,(x^4-x^2+3)$

ژ راهێنانا 7 هەتا 10 ، وێنەیێ روونكرنا هاوكێشەیێ بكێشە:

7 $-\frac{1}{3}x+\frac{5}{6}y=1$ **8** $f(x)=7-6x-x^2$

9 $f(x)=\sqrt{5-x}$ **10** $f(x)=|x-4|-4$

دهەردوو راهێنانادا 11 و 12 ، خالێن ئێكودوبرینا هەردوو وێنەیێن روونكرنێ بینەدەر.

11 $3x-4y=8 \quad x+y=5$ **12** $y-x^2=7 \quad x-y+1=0$

13 **هزربكە:** هاوكێشا نەخشەیەكێ بنڤیسە هەكە یە هاوجێ بیت دگەل خالا بنەڕەت و دوو ئێكودوو برینێن ئاسۆیی هەبن ل $x=-2$ ، $x=2$.

14 **هزربكە:** بەهایێ k چەندە هەكە وێنەیێ رونكرنا نەخشەیا $f(x)=kx$ دخالا دیاركری را ببوریت.

أ $(1, 4)$ ب $(-2, 1)$ ج $(0, 0)$ د $(-1, -1)$

د هەردوو راهێنانادا 15 و 16 ، لاری بكاربینە بۆ دیاركرنا بهایێ t دەمێ هەرسێ خال لسەر ئێك راستەهێل بن.

15 $(-2, 5)$ ، $(0, t)$ ، $(1, 1)$ **16** $(-3, 3)$ ، $(t, -1)$ ، $(8, 6)$

ژ راهێنانا 17 هەتا 20 ، هاوكێشەیا راستەهێلێ دخالا دیاركری را ببوریت و لارێ دیاركری هەبیت بنڤیسە.

17 $(0, -5)$ ؛ $m=\frac{3}{2}$ **18** $(-2, 6)$ ؛ $m=0$

19 $(-3, 0)$ ؛ $m=-\frac{2}{3}$ **20** $(5, 4)$ لاری پێناسەنەكرییە.

21 هاوكێشەیەكێ بۆ راستەهێلێ د خالا $(-2, 4)$ رادبۆریت و سیفەتێ دیاركری هەبیت هەژماربكە.

أ لارێ وێ $\frac{7}{16}$ ب تەریب بیت بۆ راستەهێلێ $5x-3y=3$

ج دخالا بنەڕەت را ببوریت د تەریب بیت بۆ تەوەرێ y

22 هاوكێشەیەكێ بۆ راستەهێلێ دخالا $(1, 3)$ را دبۆریت و سیفەتێ دیاركری هەبیت بینەدەر.

أ لارێ وێ $-\frac{2}{3}$ بیت ب ستون بیت دگەل راستەهێلێ $x+y=0$

ج د خالا $(2, 4)$ را ببوریت د تەریب بیت دگەل تەوەرێ x .

23 **تێکرایێ گۆهۆڕینێ:** بهایێ ئامیرەکێ نوی 12 500 000 دیناربوو، ب ئەگەرێ بکاربرنێ، بهایێ وێ یێ سالانە 850 000 دیناران کێم دبیت. نەخشەیا هێلی بۆ نواندنا نرخێ ڤی ئامیری پشتی بۆرینا t سال ژ کرینا وێ بنڤیسە. بهایێ وێ دێ بیتە چەند پشتی 3 سالان ژ کرینا وێ؟

24 هەکە $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x<0 \\ |x-2| & x\geq 0 \end{cases}$ ڤان هەژماربکە:

أ $f(-4)$

ب $f(0)$

ج $f(1)$

25 بوار و مەودایێ هەر نەخشەیەکێ دیاربکە.

أ $f(x)=\sqrt{36-x^2}$

ب $f(x)=\frac{7}{2x-10}$

ج $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 2-x & x\geq 0 \end{cases}$

26 هەکە $f(x)=1-x^2$ ، $g(x)=2x+1$، ڤان هەژماربکە:

أ $f(x)-g(x)$

ب $f(x)g(x)$

ج $g(f(x))$

27 **رووبەر:** شەریتەک درێژیا وێ 24 m بوو، هاتە برین بۆ (4) پارچەیان ژ بۆ چێکرنا لاکێشەکێ درێژیا لایێ وێ یێ بچووک x بوو.

أ رووبەرێ لاکێشەیێ (A) یێ x بنڤیسە.

ب بوارێ نەخشەیا A دیاربکە، و وێنەیێ روونکرنا وێ دناڤ بوارێ دیارکری دا بکێشە.

ج بۆ خەملاندنا مەنترین رووبەرێ دشیاندا بۆ لاکێشەیێ وێنەیێ روونکرنا نەخشەیێ بکاربینە.

دەستەواژەیەکێ ل سەر هەردوو دووریێن لاکێشێ بنڤیسە کو وێ مەزنترین رووبەر هەبیت.

28 وێنەیێ رونکرنێ بۆ وێ نەخشەیێ بکێشە کو بوارێ وێ $\{3، 2، 1، 0، -1، -2\}$ بیت و هەر بەهایەکێ x ژ بوارێ وێ دگرێدەت دگەل $y = x + 2$.

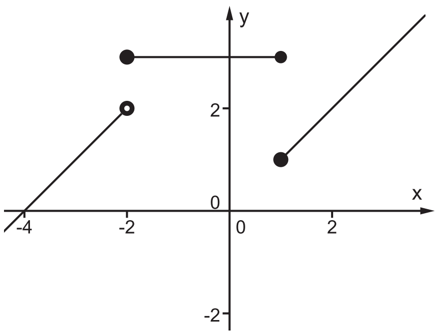
تێبینیێ بکە کو بوارێ نەخشێ ژ ژمارەکا سنووردار یا بەهاییان یا پێکهاتی.

بەشی 1

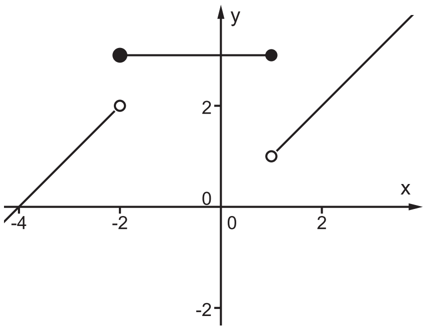
بەرهەڤکرن بۆ ئەزموونێ

1 کیژ ڤان وێنەیێن روونکرنێ نەخشەیەکێ نانوێنت؟

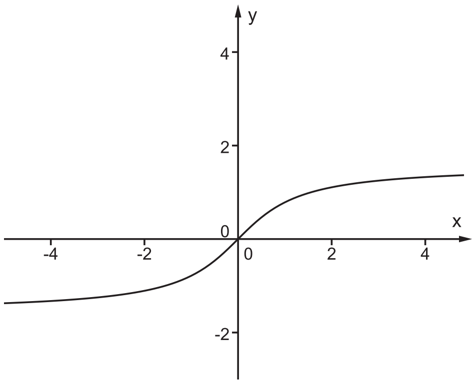
أ



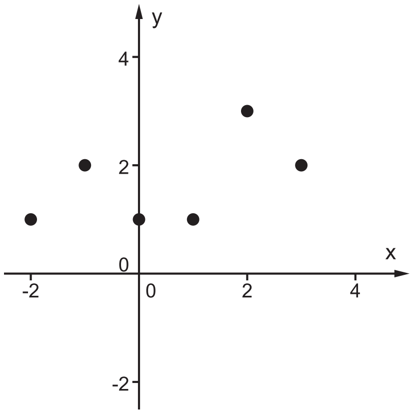
ب



ج



د



هـ هەموو نەخشەیێ دنوینن

2 پوتانێن خالێن ئێکودووبرینا هەردوو نەخشەیان $f(x)=3x+1$ و $g(x)=x^2-3$ کیژکە؟

أ $x=0$ ب $x=4$ و $x=1$ ج $x=-4$ و $x=-1$ د $x=4$ و $x=-1$

هـ چو ژ وان نینن

3 کیژ نەخشەیە کتە؟

أ $f(x)=\cos x$ ب $f(x)=x^2-x+1$ ج $f(x)=x^3-x$ د $f(x)=x^2+x$

هـ هەموو جووتن

4 کیژ نەخشە نەیا کتە؟

أ $f(x)=\sin x+\frac{1}{x}$ ب $f(x)=x^2-x+1$ ج $f(x)=x^3-x$ د $f(x)=x^3+x$

هـ هەموو کتن

5 راستەهێل $7x-3y=5$ دکیژ خالێرا نابۆریت؟

أ $(2, 3)$ ب $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ ج $(4, 11)$ د $\left(-\frac{1}{7}, -2\right)$ هـ دڤان هەموو خالانرا دبوریت

6 لارێ راستەهێلێ دڤان هەردوو خالانرا $(6,10)$ و $(-1,4)$را دبوریت چەندە؟

أ $\frac{7}{6}$ ب $-\frac{7}{6}$ ج $\frac{6}{7}$ د $-\frac{6}{7}$ هـ چوو ژ ئەڤان نینن

7 هاوکێشەیا راستەهێلێ دخالا $(3, 10)$ را دبوریت و تەریب بیت دگەل راستەهێلێ $x-3y=1$ چییە؟

أ $y=\frac{1}{3}x+9$ ب $y=3x+1$ ج $y=-3x+19$ د $y=-\frac{1}{3}x+11$ هـ چوو ژ ئەڤان نینن

8 لارێ راستەهێلێ ستوون بیت دگەل راستەهێلێ $2x+3y+9=0$ کیژ وانە؟

أ $\frac{2}{3}$ ب $-\frac{2}{3}$ ج $\frac{3}{2}$ د $-\frac{3}{2}$ هـ چوو ژ ئەڤان نینن

9 $f(x)=\begin{cases} 3x+4 & x\le 2 \\ x^2+1 & x>2 \end{cases}$. کیژ ڤان یەکسانە $f(3)$ ؟

أ 13 ب 10 ج 5 د 3 هـ چوو ژ ئەڤان نینن

10 $f(x)=x^2-3x+4$ کیژ ڤان یەکسانە بۆ $f(x+2)-f(2)$ ؟

أ x^2-3x-4 ب x^2+x ج x^2+x-8 د x^2-3x+4 هـ چوو ژ ئەڤان نینن

11 $f(x)=2-x^2$ کیژ ڤان یەکسانە بۆ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ؟

أ $\frac{x^2-h-h^2}{h}$ ب $\frac{-2x^2-h^2}{h}$ ج $-2x-h$ د $\frac{1}{2}$ هـ چوو ژ ئەڤان نینن

12 بوارێ نەخشەیا $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ کیژکە؟

أ $\{x/x\ne 1\}$ ب $\{x/x\ne -1\}$ ج $\{x/x\ne 0\}$ د R هـ چوو ژ ئەڤان نینن

13 بوارێ نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ کیژکە؟

أ $]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]1, +\infty[$ ب $]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$

ج R د $]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$ هـ چوو ژ ئەڤان نینن

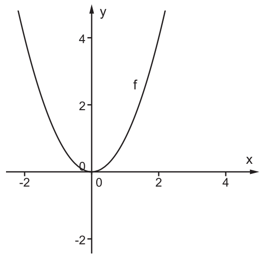
14 کیژ جهگۆهۆرك وێنەیێ روونکرنا نەخشەیا $f(x)=x^2$ دگۆهۆریت بۆ وێنەیێ روونکرنا نەخشەیا $g(x)=(x+9)^2$ ؟

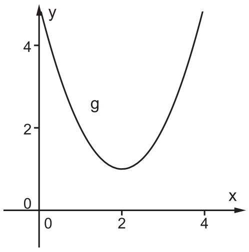
أ ڕاکێشان بۆ سەری ب 9 یەکەیان. ب راکێشان بۆ خوارێ ب 9 یەکەیان.

ج راکێشان بۆ رەخێ راستێ ب 9 یەکەیان. د راکێشان بۆ رەخێ چەپێ ب 9 یەکەیان.

☐ چوو ژ ئەڤان نینن

15 وێنەیێ روونکرنا نەخشەیا $f(x)=x^2$ بکاربینە بۆ دیارکرنا هاوکێشەیا نەخشەیا g خودانا وێنەیێ روونکرنا دوویێ:





أ $g(x)=(x-2)^2+1$ ب $g(x)=(x-1)^2+2$ ج $g(x)=(x+2)^2+1$

د $g(x)=(x+1)^2-2$ هـ چوو ژ ئەڤان نینن

16 $(f+g)(x)$ هەژماربکە هەکە $f(x)=2x-4$ و $g(x)=1+3x$.

أ $5x-3$ ب $x-3$ ج $-(x+3)$ د 0 هـ چوو ژ ئەڤان نینن

17 $(fg)(3)$ هەژماربکە هەکە $f(x)=x$ و $g(x)=x^2-7$.

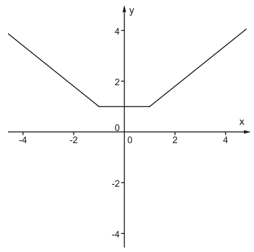
أ -13 ب 29 ج 5 د 6 هـ چوو ژ ئەڤان نینن

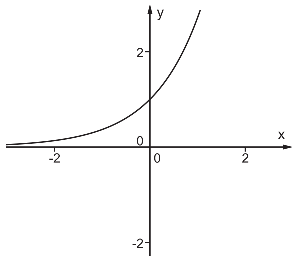
18 $(f\circ g)(x)$ هەژماربکە هەکە $f(x)=4-2x^2$ و $g(x)=2-x$.

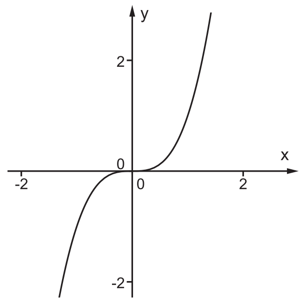
أ $4x^2-16x+20$ ب $2x^2-4$ ج $2x^2-2$ د $-2x^3-4x^2-4x+8$

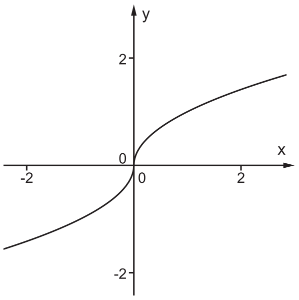
هـ چوو ژ ئەڤان نینن

19 کێژ وێنەیێ روونکرنێ ل خوارێ نەخشەیا جودا نانوێنت؟

أ


ب


ج


د


هـ هەموو نەخشەیێن جودا نانوێنن.

20 سیفەتێ نەخشەیا $f(x)=3x^5-7x^2+2$ چییە دەمێ x بەرەف $-\infty$ دچیت و دەمێ x بەرەف $+\infty$ دچیت؟

أ نەخشە بەرەف $-\infty$ دچیت دەمێ x بەرەف $-\infty$ ، نەخشە بەرەف $+\infty$ دچیت دەمێ x بەرەف $+\infty$ دچیت.

ب نەخشە بەرەف $-\infty$ دچیت دەمێ x بەرەف $-\infty$ ، نەخشە بەرەف $-\infty$ دچیت دەمێ x بەرەف $+\infty$ دچیت.

ج نەخشە بەرەف $+\infty$ دچیت دەمێ x بەرەف $-\infty$ ، نەخشە بەرەف $-\infty$ دچیت دەمێ x بەرەف $+\infty$ دچیت.

د نەخشە بەرەف $+\infty$ دچیت دەمێ x بەرەف $-\infty$ ، نەخشە بەرەف $+\infty$ دچیت دەمێ x بەرەف $+\infty$ دچیت.

هـ چوو ژ وان نینن.

بەشێ
2

ئارمانج Limits

بەشێ دوو

وانە

1–2 دەروازەیەك بۆ هەژمارکرنا. جوداکاریێ و تەمامکاریێ

2–2 دیارکرنا ئارمانجان ب وێنەیێ ڕوونکرنێ و ب ژمارەیێ.

3–2 هەژمارکرنا ئارمانجان.

ئەزموونا نیڤا بەشی

4–2 نەخشەیێن بەردەوام.

5–2 ئارمانجێن بێدوماهیێ.

پێداچوون

بەرهەڤکرن بۆ ئەزموونێ

هندەك ژ جوتیاران جۆرەك ژ زیندەوەرێن مێشەخۆر (الحشرات الطفیلیە) بکاردئینن ژ بۆ نەهێلانا وان ئیشێن چاندنێ دگرن. نەخشەیا $D(t)=\frac{t^2}{90}+\frac{t}{3}$ نموونەیەکە بۆ زێدەبوونێ، ئەو دبیتە نموونەیەك بۆ زێدەبوونا ڤی جۆرێ زیندەوەری ل سەر ڕووەکی. تێکڕایێ گوهۆڕینێ بۆ ڤێ زیندەوەری (حشرات) چەندە دەمێ چڕییا وێ 20 ل سەر ڕووەکەکی بیت.

ئەرێ تو یێ ئامادەیی؟

زاراڤ

1 هەر دەستەواژەیەکا ل ستوونا ڕەخێ ڕاستێ دگەل شرۆڤەکرنا وێ یا گونجای ل ستوونا ڕەخێ چەپێ گرێدە.

1. نەخشەیا ڕێژەیی — أ. هندەك بەهایان وەردگریت ئەو مەزن دبن بێسنوور.

2. x بەرەڤ $+\infty$ دچیت — ب. کۆمەڵا وان بەهایێن نەخشە وەردگریت دەمێ x هەموو بەهایێن بواری وەردگریت.

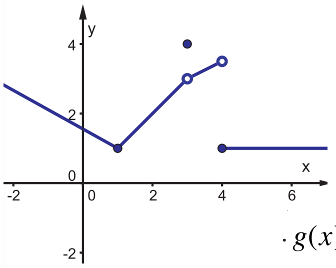
3. نڤیسینا برەکی ڕێژەی ل سەر سادەترین شێوە — ج. نەخشەیا برەکییە کو ڕێسایا وێ برەکی ڕێژەییە.

4. مەودایێ نەخشەیێ — د. نەخشەکە برێ وێ ڕێژا دوو ژماران بخۆڤەدگریت.

ه. نڤیسینا برەکی ل سەر شێوەیێ ڕێژا دوو برێن ڕادەدار کو کۆڵکەیێ هاوبەش دناڤبەرا واندا نەبیت.

خواندنا وێنەیێن ڕوونکرنێ (چەماوەیان)

ل هەردوو ڕاهێنانان 2 و 3 ، چەماوەیێ بەرامبەر بۆ f بکاربینە.



2 بەهایێ هەرئێکێ هەژماربکە $f(1)$، $f(2)$، $f(3)$، $f(4)$، $f(5)$.

3 ڕێسایا نەخشەیا f بنڤیسە.

کردار ل سەر نەخشەیان

4 ڕێسایا نەخشەیا $g \circ f$ ونەخشەیا $f \circ g$ بنڤیسە، دەمێ $f(x) = x + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$.

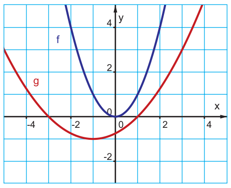
5 ئەرێ پەیوەندییا بەرۆڤاژی بۆ نەخشەیا $y = 4x + 3$ ل ناڤبەرا x و y دبیتە نەخشە؟ هەکە بەرسڤ «بەلێ» بوو، ئەوێ پەیوەندییا بەرۆڤاژی ل سەر شێوەیێ نەخشەیەکێ بنڤیسە، و هەکە «نەخێر» بوو هۆیێ وێ ڕۆنبکە.

6 ئەرێ پەیوەندییا بەرۆڤاژی بۆ نەخشەیا $y = x^2$ ل ناڤبەرا x و y دبیتە نەخشە؟ هەکەر بەرسڤ «بەلێ» بوو ئەوێ پەیوەندییا بەرۆڤاژی ل سەر شێوەیێ نەخشەکێ بنڤیسە، و هەکەر «نەخێر» بوو هۆیێ وێ ڕۆنبکە.

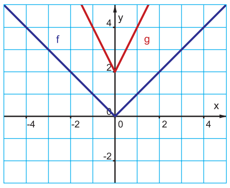
جهگوهۆڕکێن نەخشەیان

ژ ڕاهێنانا 7 هەتا 10 ، وێنە چەماوە یێن هەردوو نەخشەیان f و g دیاردکەت. جهگۆهۆڕکا ئەندازەیی ئەوا چەماوەیێ f بۆ چەماوەیێ g دگۆهۆڕیت دیاربکە، و ڕێسایا g بنڤیسە.

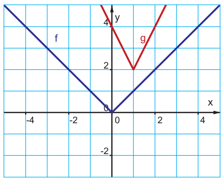
7



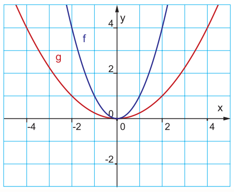
8



9



10



1–2 دەروازەیەك بۆ هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ
Introduction to Calculus

ئارمانج

- زانینا هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ و جوداهییا وێ ژ جەبرێ.
- فێردبن کو پرسیارا لێکەفتی دبیتە پرسیارەکا بنەڕەت ل هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ.
- فێربدن کو پرسیارا ڕووبەری دبیتە پرسیارەکا بنەڕەت ل هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریی.

مفایەك

بەردەوام ل بیرا تەبیت، کو خواندنا هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ ل ڤێ پۆلێ دبیتە بابەتەکێ بنەڕەت. و ئێکەمین ئارمانج ئەوە تو فێربی چەوا ڤی بابەتی دێ بکارئینی بۆ دروستکرنا نموونەیان ل سەر پرسیارێن ژیانا ڕۆژانە، ب مەرەما شیکارکرنا وان. ئەڤێن ل خوارێ پێنگاڤێن شیکارکرنا پرسیارانە:

1. پشتڕاستبە ژ تێگەهشتنا پرسیارێ. پێدایێن پرسیارێ چنە؟ و داخوازی چییە؟

2. پلانێ دانە. گەلەك ڕێك هەنە، کو تو دشێی بکاربینی: ل دووڤ شێوازەکی بگەڕە. پرسیارەکا ساناهیتر شیکاربکە. ل دووڤ پێنگاڤێن خۆ بزڤڕە. وێنەکێ ڕوونکرنێ بکێشە، تەکنولۆژیایێ بکاربینە.

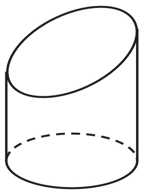
3. پلانا خۆ بجهبینە. پشتڕاستبە ژ بەرسڤدانا خۆ بۆ پرسیارێ. شێوازێ بەرسڤێ دا برێژە. بۆ نموونە، ل جهێ تو بنڤیسی بەرسڤ، $x = 4.6$ بنڤیسە «ڕووبەرێ شێوەیێ $4.6\ cm^2$ »

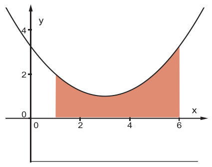
4. پێداچوونەکێ ل سەر کارێ خۆ بکە. ئەرێ بەرسڤا تە ڕامان هەیە؟ ئەرێ ڕێیەك هەیە داتو پشتڕاستبی ژ ڕەوایا بەرسڤێ؟

هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ چییە؟

هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ بیرکارییا گوهۆڕینێیە (لەز و تاودان)، هەروەسا ئەو بیرکارییا لێکەفتی و لاری و ڕووبەری و قەبارەیی و سەنتەرێ سەنگێ و چەماندنێ و گەلەك چەمکێن دییە. ئەڤێ بیرکاریێ هاریکاریا زانایان و ئەندازەیاران و ئابوورناسان کر بۆ پێکهێنانا نموونەیێن کارتێکەر ژ بۆ خواندنا بارەیێن ژیانا ڕۆژانە. بیرکارییا هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ دبنە بیرکارییا لڤینێ (Dynamic) ئەو بەرۆڤاژیا ئەوێ بیرکارییا هەتا نەها تو فێربوویێ، ئەوا دهێتە وەسفکرن ب بیرکارییا ڕاوەستاندنێ (Stutic). ئەڤێن ل خوارێ هندەك نموونەنە:

- تو دشێی ڤەکۆلینێ ل سەر لڤینا ئەوی تەنێ ب لەزەکا نەگۆڕ دلڤت ئەنجامبدەی بکارئینانا ئەوێ بیرکارییا هەتا نۆکە تو فێربوویێ، لێ بۆ خواندنا لڤینا تەنەکی لەزا وی ل دووڤ دەمی دهێتە گوهۆڕین تە پێدڤیاتی هەیە ب هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ:
- تو دشێی لارێ ڕاستەهێلەکی دیاربکەی بکارئینانا ئەوێ بیرکارییا هەتا نەها تو فێربوویێ. لێ بۆ دیارکرنا لارێ چەماوەیەکی لدەڤ خالەکێ تو پێدڤی هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ.
- تو دشێی ڕووبەری یان قەبارێ گەلەك شێوە و تەنێن ئەندازەیی بهەژمێری بکارئینانا ئەوێ بیرکارییا هەتا نەها تو فێربوویێ. لێ بۆ هەژمارکرنا ڕووبەرێ شێوەیەکێ نەڕێك، یان بۆ هەژمارکرنا قەبارێ تەنەکی نەئاسایی تو پێدڤی هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ.



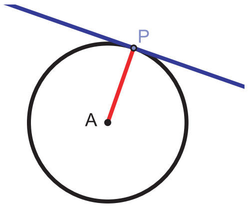


هەموو بارەیێن پێشتر ئێك کاری بخۆ ڤەدگرن: شێوازێ هندەك ئەوێ بیرکارییا تو فێربوویێ جارەکادی بهێتە دوبارەکرن ل دووڤ بکارئینانا چەمکێ ئارمانجێ. لەوا ئێك بەرسڤ بۆ پرسیارا: هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ چییە؟ ئەوە کو ئەو هۆیەکی هەژمارتنێیە چەمکێ وێ یێ تیۆری کارکرنە دگەل ئارمانجان ، بجهئینانا وێ یا پراکتیکی دبیتە بکارئینانا ڕێسا و یاسایێن هویر. و ب دەربڕینەکا هویرتر، هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ سێ ئاستان بخۆڤە دگریت: ئاستێ ئێکێ دبیتە ئەو بیرکارییا هەتا نەها تو فێربوویێ، و ئاستێ دووێ ئاستێ ئارمانجانە، و ئاستێ سێیێ دبیتە ئاستێ داتاشراو و جوداکاریی.

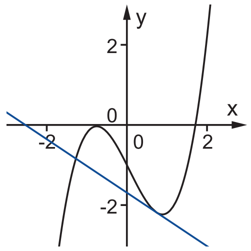
بیرکارییا هەتا نەها تو فێربوویێ ← **ئارمانج** ← **داتاشراو و جوداکاری**

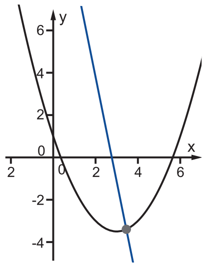
چەمکێ ئارمانجێ دبیتە بنچینە بۆ خواندنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ. دا هندەك چەمك لدەڤ تە دروستبن ل سەر ڕۆلێ ئارمانجێ ژ بۆ هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ، ئەڤێ ل خوارێ کو ل سەر دوو پرسیارێن مێژوویێ ژ پرسیارێن ڤی بابەتی: پرسیارا لێکەفتی و پرسیارا ڕووبەری.

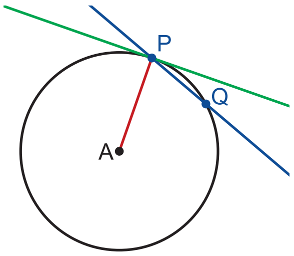
پرسیارا لێکەفتی



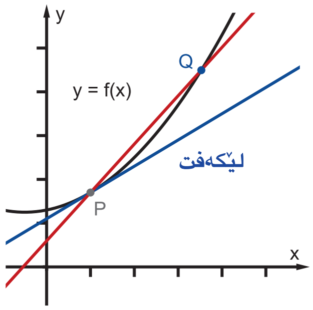
تو ل پۆلێن پێشتر فێربووی، کو لێکەفتێ بازنەکا سەنتەرێ وێ A ل خالا P دبیتە، ئەو ڕاستەهێلی بازنێ دبڕیت بتنێ ل خالەکێ، و ئەو خالە P یە، ئەڤ پێناسە نەیا دروستە بۆ وێنەیێن ڕوونکرنێن نەخشەیان ب شێوەیەکێ گشتی هەر وەک دیاردبیت ل هەردوو وێنەیێن ل خوارێ.





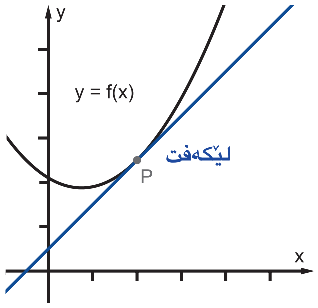


لێکەفتێ بازنێ ل خالا P دبیتە بڕەرێ $\overleftrightarrow{PQ}$ دەمێ خالا Q نێزیکی خالا P دبیت. پشتبەستن ب ڤێ تێبینیێ ئەم دشێین بێژین کو لێکەفتێ چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)$ ل خالا P دبیتە بڕەرێ $\overleftrightarrow{PQ}$ دەمێ خالا Q نێزیکی خالا P دبیت.



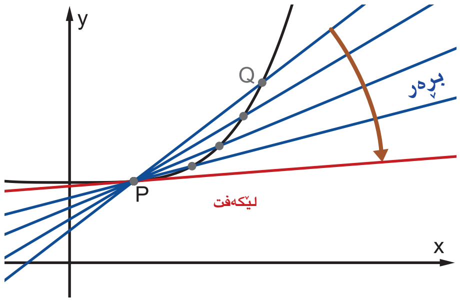
ل پرسیارا لێکەفتی، نەخشەیا f و خالا P ل سەر وێنەیێ ڕوونکرنا وێ دیاردکەن، و داخوازێ ژ تەدکەن هاوکێشەیا لێکەفتێ چەماوەیێ نەخشەیێ ل ڤێ خالێ دیاربکەی، هەروەک ل وێنەیێ بەرامبەر دیارکری.

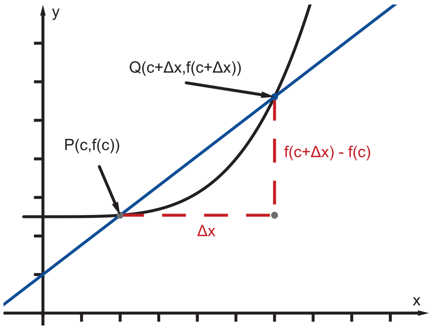
ژ بلی وان بارەیێن لێکەفتێ ستوونێ بخۆڤەدگرن، پرسیارا دیارکرنا هاوکێشەیا لێکەفتێ چەماوەیێ نەخشەیا f ل خالا P پێدڤی ب هەژمارکرنا لارێ ڤێ لێکەفتێ هەیە. تو دشێی بەهایەکی نێزیککری بۆ ڤی لارێ هەژماربکەی بکارئینانا ڕاستەهێلەکی د خالا لێکەفتنێرا ببۆریت و خالەکا دی ل سەر چەماوەیێ نەخشەیێ، هەروەک دیار ل وێنەیێ بەرامبەر.



دبێژنە ڤێ ڕاستەهێلی بڕەرێ چەماوەیێ نەخشەیێ. هەکە $P(c, f(c))$ خالا لێکەفتنێ بیت و $Q(c+\Delta x, f(c+\Delta x))$ خالەکا دی بیت ل سەر چەماوەیێ نەخشەیێ، لارێ ڕاستەهێلێ د وان هەردوو خالانرا دبۆریت دێ بیتە

$$m = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{(c+\Delta x) - c} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$





هەر چەند خالا Q نێزیکی خالا P ببیت، دێ لارێ بڕەرێ نێزیکی لارێ لێکەفتی بیت، وەک وێنەیێ ڕەخێ چەپێ ل سەری دیاردکەت. هەکە بڕەری جهێ دوماهیکێ هەبیت، ئەم دێ بێژین لارێ لێکەفتی دبیتە ئارمانجا لارێ بڕەری (دێ ل وانەیێن ئایندا ڤێ پرسیارێ وەرگرین).

ڤەدیتن

خالێن ل خوارێ دکەڤنە سەر چەماوەییێ نەخشەیا $f(x)=x^2$.

$Q_1\left(1.5, f(1.5)\right)$ ، $Q_2\left(1.1, f(1.1)\right)$ ، $Q_3\left(1.01, f(1.01)\right)$.

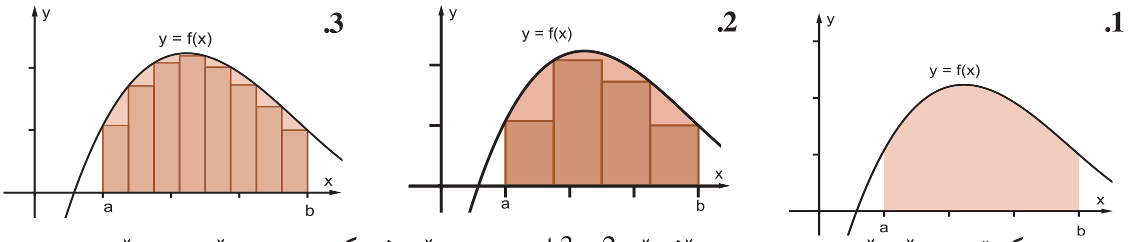
$Q_4\left(1.001, f(1.001)\right)$ ، $Q_5\left(1.0001, f(1.0001)\right)$.

ئەڤ خالە ب ڕێز نێزیکی خالا $P(1,1)$ دبن. لارێ ڕاستەهێلێ ل خالا P و Q_1 ڕادبۆریت هەژماربکە. و لارێ ڕاستەهێلێ ل P و Q_2 ... ڕادبۆریت هەژماربکە. ل سەر ڕووتەختێ پۆتانی چەماوەیێ نەخشەیێ و ڕاستەهێلێن تە لارێن وان هەژمارتێ وێنەبکە. وان ئەنجامێن بدەست تە کەفتین بکاربینە بۆ دیارکرنا بەهایەکی نێزیککری بۆ لارێ چەماوەیێ نەخشەیێ ل خالا P.

پرسیارا ڕووبەری

تە ل پرسیارا لێکەفتی دیت چەوا چەمکێ ئارمانجێ هاتە بجهئینان ل سەر لارێ ڕاستەهێلی ژبۆ دیارکرنا لارێ نەخشەیێ. پرسیارا مێژوویی یا دووێ ل هەژمارکرنا جوداکارییێ و تەواوکارییێ، پرسیارا هەژمارکرنا ڕووبەرێ دەڤەرەکێیە کو چەماوەیێ نەخشێ ئەو دەڤەرە سنووردابیت. ئەڤ پرسیارا دئێتە شیکارکرن بکارئینانا چەمکێ ئارمانجێ. ئەڤ چەمکە دئێتە بجهئینان بکارئینانا ڕووبەرێ لاکێشێ بۆ هەژمارکرنا ڕووبەرێ دەڤەرەکا نە ئاسایی.

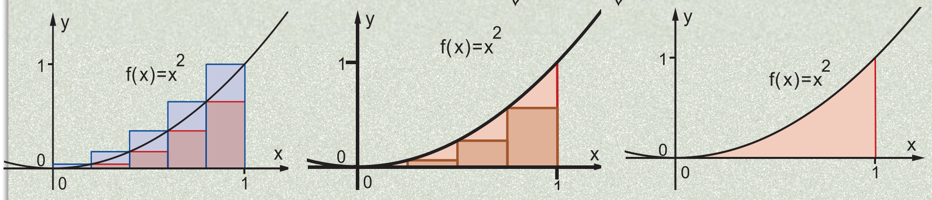
بۆ نموونە: بەرێ خۆ باش بدە دەڤەرا سنووردایی ب چەماوەیێ نەخشەیا $y=f(x)$ و تەوەرێ x و هەردوو ڕاستەهێلێن ستوونی $x=a$ و $x=b$ وەك دیار ل وێنەیێ 1.



هەکە تو بەرێ خۆ بدەیە هەردوو وێنەیێن 2 و 3 ل سەری دێ بینی کو سەرجەمێ ڕووبەرێن لاکێشەیان دبیتە بەهایەکێ نێزیککری بۆ ڕووبەرێ دەڤەرێ. هەر چەند ژمارا لاکێشان زێدەبیت، دێ سەرجەمێ وان نێزیکی ڕووبەرێ دەڤەرێ بیت و نێزیککرن دێ یا باش تربیت، چونکی وێ دەڤەرا دکەڤیتە ناڤبەرا چەماوەیێ نەخشێ و لاکێشەیان دێ بچووکتر و بچووکتربیت. بۆ هەژمارکرنا ڕووبەرێ دەڤەرێ دڤێت تو ئارمانجێ سەرجەمێ ڕووبەرێن لاکێشەیان هەژماربکەی، هەکە هەبیت، دەمێ ژمارا ڤان لاکێشەیان بەردەوام زێدەبیت.

ڤەدیتن

بەرێ خۆ بدە دەڤەرا سنووردای ب چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=x^2$ و هەردوو ڕاستەهێلان $y=0$ و $x=1$. تو دشێی ڕووبەرێ ڤێ دەڤەرێ هەژماربکەی بکارئینانا دوو کۆمەلێن لاکێشان. کۆمەلا ئێکێ چەماوەیێ نەخشێ ل دۆروان دایە ویێ دووێ چەماوەیی ئەو دەوردایە، هەر وەك دیار ل وێنەیێ دووێ و سێیێ ل خوارێ، ڕووبەرێ هەر کۆمەلەکا لاکێشەیان بهەژمێرە، وپشتبەستن ب وان هەردوو ئەنجامان بەهایەکی نێزیك بۆ ڕووبەرێ ڕەنگکری ل وێنەیی ئێکێ هەژماربکە.



1-2 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا 1 هەتا 9 ، دیاربکە ئەرێ تو دشێی پرسیارێ بێی بکارئینانا چەمکێ ئارمانجێ شیکاربکەی.

1 تەنەك برێقە دچیت ل دووڤ یاسایا $d=3t^2$ ، t دەمە ب چرکان و d دووراتیە ب مێتەران. تێکڕایێ لەزێ پێ h هەژماربکە ل ناڤبەرا هەردوو دەمان $t=10$ و $t=10+h$ پاشی لەزا تەنی دەرئەنجامبکە ل دەمێ $t=10$.

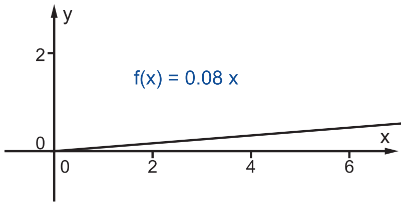
2 لارێ لێکەفتێ نەخشەیا $y=x^2$ هەژماربکە ل خالا $(3,9)$.

3 وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیا $y=\frac{1}{x}$ ل سەر ماوەیێ $[0,2]$ وێنەبکە. ئەڤێ ماوەیێ دابەشبکە بۆ 8 بەشێن یەکسان. ڕووبەرێ دەڤەرا سنووردایی ب چەماوەیێ نەخشەیێ و تەوەرێ x و هەردوو ڕاستەهێلان $x=1$ و $x=2$ هەژماربکە.

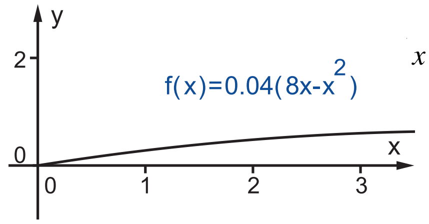
4 دووریا تەنەك ل 15 چرکان دبڕیت هەژماربکە، هەکە لەزاوی 7 مێتەر بیت د چرکەکێ دا.

5 تەنەك برێقەدچیت ب لەزەکێ دهێتە گوهۆڕین دگەل دەمێ ل دووڤ سامپلێ $v(t)=5+7\cos t$ ، t هێمایە بۆ دەمی ب چرکەیان $v(t)$ لەزاتەنییە ل دەمێ t ب مێتەران د چرکەکێ دا. دووریا ئەڤ تەنە ل دەمێ 15 چرکەیان دبڕیت هەژماربکە.

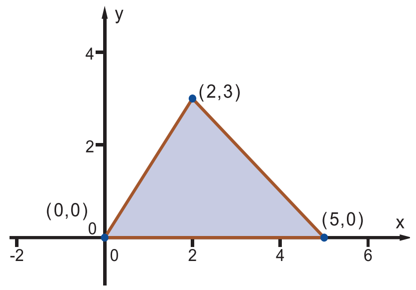
6 خاڵەك دلڤیت ل سەر چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=0.08x$. x بەرەڤ پێشڤەچوونا ئاسۆیی دنوینیت بۆ خاڵێ، و $f(x)$ بلنداهیا بەرامبەر دنوێنیت. تێکڕایێ گوهۆڕینا بلنداهیا خاڵێ ل $x=2$ هەژماربکە.



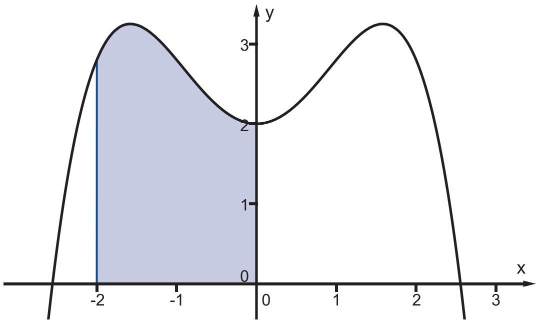
7 خاڵەك دلڤیت ل سەر چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=0.04(8x-x^2)$ x بەرەڤ پێشڤەچوونا نەخشەی دنوێنیت، و $f(x)$ بلنداهیا بەرامبەر دنوێنیت. تێکڕایێ گوهۆڕینا بلنداهییا خاڵێ ل $x=2$ هەژماربکە.



8 بەهایێ ڕووبەرێ دەڤەرا سێبەرکری هەژماربکە.



9 ڕووبەرێ دەڤەرا سیبەرکری هەژماربکە.



10 نەخشەیا $f(x)=4x-x^2$ و خالا $P(1,3)$ ئەوا دکەفتە سەر چەماوەیێ نەخشەیێ بکاربینە:

أ چەماوەیێ نەخشەیا f و برەرێن د خالا P و خالێن $Q(x,f(x))$ ڕادبۆرن وێنەبکە، دەمێ x بەهایێن 2، 1.5، 0.5 ب ڕێز وەردگریت.

ب لارێ هەرسێ برەران هەژماربکە.

ج ئەنجامێن پرسیاران بکاربینە بۆ خەملاندنا لارێ لێکەفتێ چەماوەیێ نەخشەیێ ل خالا P. وەسفبکە چەوا بەهایێ لارێ لێکەفتی نێزیك و نێزیك دکەی بۆ بەهایێ وی یێ ڕاستی.

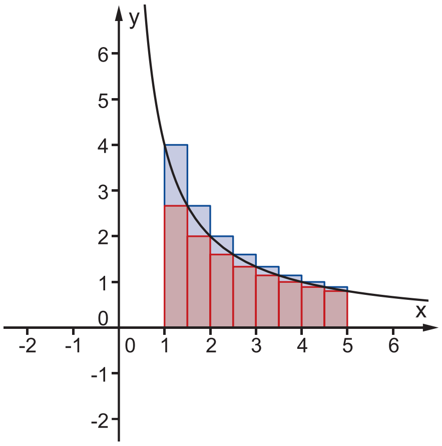
11 نەخشەیا $f(x)=\sqrt{x}$ وخالا $p(4,2)$ ئەوا دکەفتە سەر چەماوەیێ نەخشێ بکاربینە.

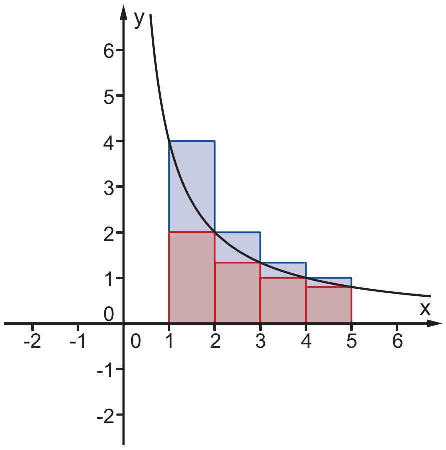
أ چەماوەیێ نەخشەیا f و برەرێن د خالا P و خالێن $Q(x,f(x))$ ڕادبۆرن وێنەبکە، دەمێ x بەهایێن 1 ، 3 ، 5 ب ڕێز وەردگرن.

ب لارێ هەرسێ برەران هەژماربکە.

ج ئەنجامێن پرسیارا (ب) بکاربینە بۆ خەملاندنا بەهایێ لارێ لێکەفتی چەماوەیێ نەخشەیێ ل خالا P. وەسفبکە چەوا بەهایێ لارێ لێکەفتی نێزیك و نێزیك دکەی بۆ بەهایێ وی یێ ڕاستی.

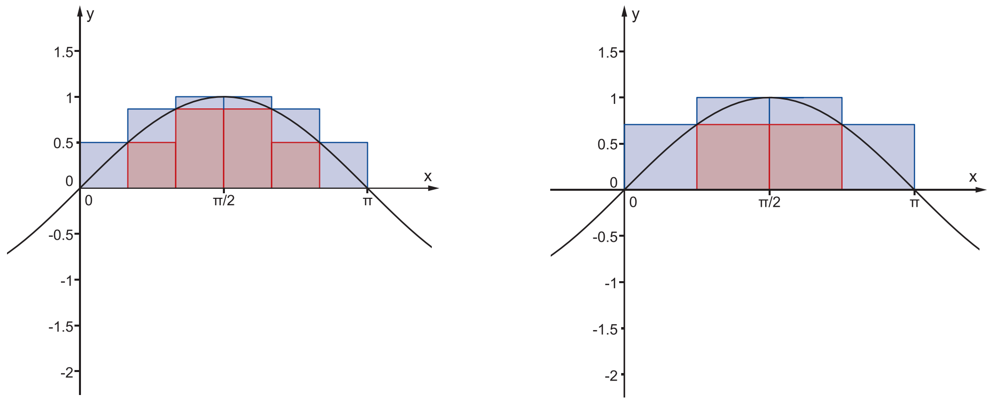
12 أ ل هەر وێنەکی، لاکێشەیان بکاربینە بۆ هەژمارکرنا بەهایەکێ نێزیککری بۆ ڕووبەرێ دەڤەرا سنووردایێ ب چەماوەیی نەخشەیا $f(x)=\frac{4}{x}$ و ڕاستەهێلێن $y=0$ و $x=1$ و $x=5$.





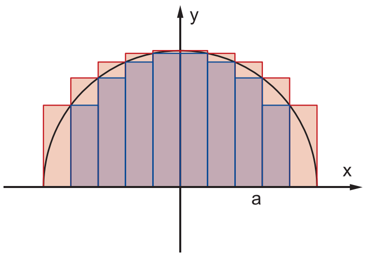
ب ڕوونبکە چەوا تو دشێی ل سەر ڤێ کردارێ بەردەوام بی بۆ بدەست کەفتنا بەهایەکی بۆ ڕووبەرێ کو پتر نێزیك بیت بۆ بەهایی وێ یێ ڕاستی.

13 أ ل هەر وێنەیەکی لاکێشەیان بکاربینە بۆ هەژمارکرنا بەهایەکێ نێزیککری بۆ ڕووبەرێ دەڤەرا سنووردای ب چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\sin x$ و ڕاستەهێلان $y=0$ و $x=0$ و $x=\pi$.



ب ڕوونبکە چەوا تو دشێی ل سەر کردارێ بەردەوامیێ بۆ بدەستکەفتنا بەهایەکی بۆ ڕووبەرێ دەڤەرێ پتر و پتر نیزیك بیت بۆ بەهایێ وێ یێ ڕاستی.

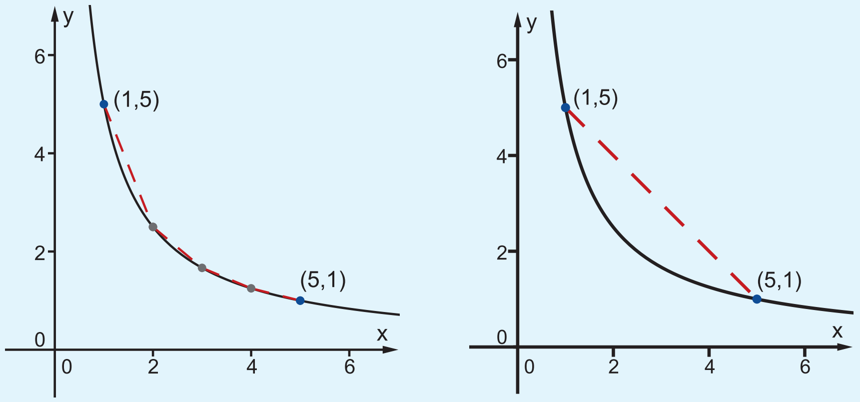
14 لاکێشەیان بکاربینە بۆ هەژمارکرنا بەهایەکێ نێزیککری بۆ ڕووبەرێ نیڤا بازنەکێ تیرەیێ وێ 2a بیت. تو چ دکەی دا بگەهیە بەهایەکێ نێزیك و نێزیك.



دەربارەی چەمکان

15 چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\frac{5}{x}$ ل ناڤبەرا هەردوو خالان $(1,5)$ و $(5,1)$ بکاربینە.

أ بەهایەکێ نێزیککری بۆ درێژیا کڤانێ چەماوەیێ نەخشەیێ ل ناڤبەرا هەردوو خالان بینەدەر ب هەژمارکرنا دورییا ل ناڤبەرا هەردوو ڕەخێن کڤانەیی، هەروەك دیار ل وێنەیێ ئێکێ.



ب بەهایەکێ نێزیککری یێ نوو بۆ درێژیا کڤانێ چەماوەیێ بینەدەر، ب هەژمارکرنا سەرجەمێ درێژیێن هەرچار پارچە ڕاستەهێلان هەروەك دیار ل وێنەیێ دووێ.

ج ڕوونبکە چەوا تو دشێی ل سەر ڤێ کردارێ بەردەوامیێ بۆ بدەست کەفتنا بەهایێن نێزیککری بۆ درێژیا کڤانێ چەماوەیێ پتر و پتر یێ نێزیك بیت بۆ درێژیا وی یا ڕاستی.

2-2 هەژمارکرنا ئارمانجان ب وێنەیێ ڕوونکرنێ و ب ژمارەیی
Finding Limits Graphically and Numercially

ئارمانج

- بەهایێ ئارمانجێ دخەملینن بکارئینانا وێنەیێ ڕۆنکرنێ یان ب ژمارەیی.
- فێری وان بارەیێن جودادبن ئەوێن ئارمانج نەبن.

زاراڤ
Vocabulary

ئارمانج Limit

دەروازەیەك بۆ ئارمانجان

وەسا دانە کو ئەڤ وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا
$x \neq 1$: $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ دکێشین.

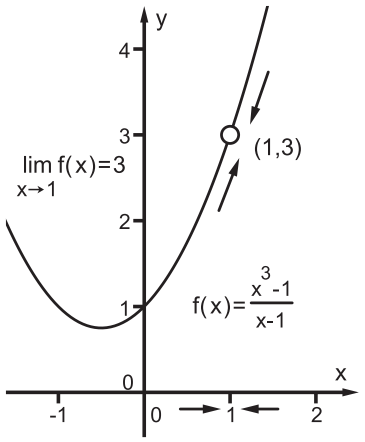
ئەم دشێین وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ ڤێ نەخشەیێ ڤالان بکێشن ژبلی $x = 1$. ل ڕەخەکێ دی وێنە دێ نەیێ ڕوون بیت. ل $x = 1$. دا ئەڤ بیروکە ڕوون بیت و سیفەتێ نەخشەیا f ل هاوسێ $x = 1$ دیار بیت، ئەم دشێین دوو کۆمەڵێن بەهایان بۆ گۆڕاوێ x بکاربینن، کۆمەلا ئێکێ وان بەهایێن نێزیکی (1) دبن ژ ڕەخێ چەپێ و کۆمەلا دووێ وان بەهایێن نێزیکی (1) دبن ژ ڕەخێ ڕاستێ.

بەهایێن x نێزیکی (1)ێ دبن ژ ڕەخێ ڕاستێ ← | → بەهایێن x نێزیکی (1)ێ دبن ژ ڕەخێ چەپێ

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	؟	3.003	3.030	3.310	3.813

بەهایێن $f(x)$ نێزیکی 3 دبن ژ ڕەخێ ڕاستێ ← | → بەهایێن $f(x)$ نێزیکی 3 دبن ژ ڕەخێ چەپێ

تێبینیێ بکە، کو هەر چەندە x نەشێت بەهایێ $x = 1$ وەربگریت، لێ چێدبیت بەهایێن وێ پتر و پتر نێزیکی (1)ێ ببن و ئەڤە وەسا دکەت کو بەهایێن $f(x)$ پتر و پتر نێزیکی 3 ببن. و دەربڕینێ ژ وێ دکەن ب نڤیسینا $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$



بخوینە: ئارمانج $f(x)$ دەمێ x ژ 1 نێزیك دبیت یەکسانە ب 3

ئەڤ شرۆڤەکرنا ل سەری مە دگەهینتە پێناسەیا ئارمانجێ.
هەکە بەهایێ $f(x)$ پتر و پتر نێزیکی ژمارەیا دیارکری c دبیت ژ هەردوو ڕەخان، دێ L بیتە ئارمانجێ $f(x)$ دەمێ x نێزیکی c دبیت، و ئەڤێ ب نڤیسین ل سەر ڤێ شێوەیی دەردبڕین:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

ڤەدیتن

ئەوا پێشتر هندەك نموونەیان پەیدا دكەت بۆ دیاركرنا ئارمانجێ نەخشەیێ: ب ژمارەیی ب دروستكرنا خشتەیێ بەهایان، و ب وێنەیێ ڕوونكرنێ ب وێنەكرنا چەماوەیێ نەخشەیێ.

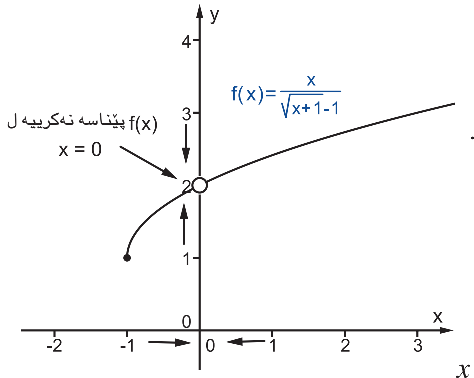
خشتەیێ بەهایان بكاربینە بۆ دیاركرنا $\lim_{x\to 2}(x - 1)$

x	1.75	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.25
$f(x)$	؟	؟	؟	؟	؟	؟	؟	؟	؟

نموونــــە 1

دیاركرنا ئارمانجێ ب ژمارەیی

بەهایێن نەخشەیا $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ بهەژمێرە، دەمێ x هندەك بەهایین نێزیك بۆ $x = 0$ وەربگریت. و ئەوێن بدەست تە كەفتین بكاربینە بۆ دیاركرنا بەهایەكێ نێزیك بۆ ئارمانجێ. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.



شیكار:

خشتەیێ ل خوارێ بەهایێن $f(x)$ دیاردكەت دەمێ x هندەك بەهایێن نێزیك بۆ $x = 0$ وەردگریت.

بەهایێن x نێزیكی (0)ێ ژ ڕەخێ چەپێ ←   → بەهایێن x نێزیكی (0)ێ دبن ژ ڕەخێ ڕاستێ

x	−0.01	−0.001	−0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	1.99499	1.99950	1.99995	؟	2.00005	2.00050	2.00499

بەهایێ $f(x)$ نێزیكی 2 ژ ڕەخێ چەپێ ←   → بەهایێن $f(x)$ نێزیكی 2 دبن ژ ڕەخێ ڕاستێ

خشتەیێ ئەنجامان دیاردكەت كو چێدبیت 2 بهێتە دانان وەك بەهایەكێ نێزیك بۆ ئارمانجێ نەخشەیا f، دەمێ x بەرەڤ (0) دچیت. و وێنەیێ ڕوونكرنێ ڤێ دەرئەنجامێ ساخدكەت.

بەرێ خۆ بدێ كو نەخشەیا ل نموونە (1) نەیا پێناسەكرییە ل $x = 0$، لێ نەخشە دیاردبیت كو ئەو بەرەڤ ئارمانجەكێ دچیت دەمێ x بەرەڤ (0) دچیت. زۆربەی جاران ئەڤ كارە ڕوودەت. لەوا دڤێت ئەم ئاگەهداربین كو هەكە نەخشەیە پێناسەكرییبیت یان نەیا پێناسەكرییبیت ل $x = c$ و ئەڤە كارتێكرنێ ناكەت ل سەر هەبوونا ئارمانجێ $f(x)$ دەمێ x بەرەڤ c دچیت.

خالا چاڤدێریی

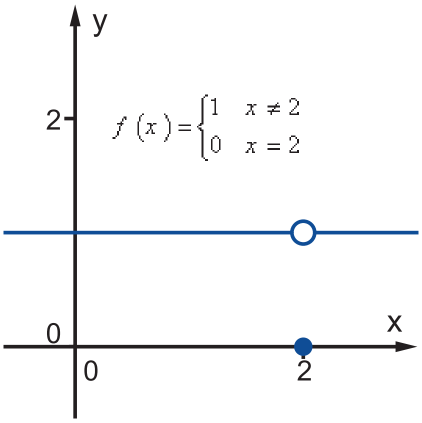
1. بەهایێ نەخشەیا $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ بهەژمێرە دەمێ x هندەك بەهایێن نێزیك بۆ $x = 0$ وەربگریت. و ئەوێن بدەست تە كەفتین بكاربینە بۆ دیاركرنا بەهایەكێ نێزیك بۆ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$.

نموونـــــه 2

ئارمانجا نەخشەیەکا ڕێسا پلەدار

ئارمانجا ڤێ نەخشەیێ $f(x)=\begin{cases}1 & x \neq 2\\ 0 & x = 2\end{cases}$ **دیاربکە.**

دەمێ x بەرەڤ 2 دچیت.



شیکار:

$f(x)=1$ دەمێ x بەهایێن جودا ژ (2) وەردگریت.

لەوا تو دشێی دەرئەنجامبکەی کو ئارمانج دبیتە 1،

هەروەك دیار ل وێنەیێ بەرامبەر. و تو دشێی بنڤیسی

$$\lim_{x \to 2} f(x)=1$$

پێناسەکرنا $f(x)$ ل $x=2$ و $f(2)=0$ کارتێکرنێ ناکەت ل سەر هەبوونا ئارمانجێ و ل سەر بەهایێ وێ. هەروەسا هەکە نەخشەیە پێناسەکریبایە ب ڤی شێوەی:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x \neq 2\\ 2 & x = 2\end{cases}$$

ئارمانجا نەخشەیێ نەدهاتە گوهۆڕین

خالا چاڤدێریێ **.2**

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -x-1 & x>0\end{cases}$$

ئارمانجا نەخشەیێ دیاربکە دەمێ x بەرەڤ ۰ دچیت.

تو هەتا نوکە ڕابوویی ب دیارکرنا ئارمانجان ب ژمارەیی و ب وێنەیێ ڕوونکرنێ. تو دێ ل وانەیا دهێت فێری تەکنیکێن جەبرێ بی ژ بۆ دیارکرنا ئارمانجان. ل خواندنا خۆ بۆ هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ، هەولبدە بکارئینانا ڤان هەرسێ ڕێکێن ل خوارێ گەشەبکە بۆ شیکارکرنا پرسیارێن ئارمانجان:

- ڕێکێن ژمارەیی: پێکئینانا خشتەیێ بەهایان بۆ نەخشەیێ.
- ڕیکێن وێنەیێ ڕوونکرنێ: وێنەکرنا چەماوەیێ نەخشەیێ.
- ڕیکێن جەبری: بکارئینانا جەبرێ یان هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ.

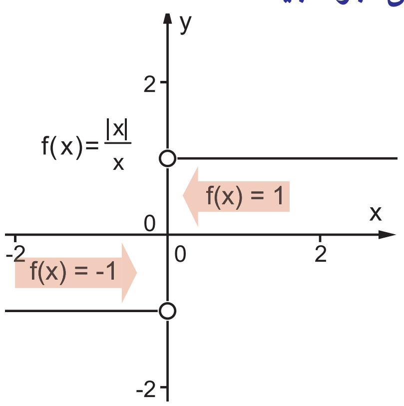
ئەوێن ئارمانجێن وان نەبن

ل هەرسێ نموونەیێن ل خوارێ دێ هندەك بارەیان بینی کو ئارمانجا نەخشەیێ هەردەم نینە.

نموونـــه 3

دەمێ سیفەتێ نەخشێ ل ڕەخێ ڕاستێ و چەپێ یێ جودا بیت

دیاربکە کو ئارمانجا $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ نینە



وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا $f(x)=\frac{|x|}{x}$ وێنەبکە، بەرێ خۆ بدە وێنەیێ:

$\frac{|x|}{x}=1$ دەمێ $x>0$ و $\frac{|x|}{x}=-1$ دەمێ $x<0$ بەهایێن $f(x)$ د مووجەبن بۆ هەموو بەهایێن x ل ڕەخێ ڕاستێ 0 و بەهایێن $f(x)$ دسالبن بۆ هەموو بەهایێن x ل ڕەخێ چەپێ 0 و بەهایێن $f(x)$ ل هەردوو ڕەخان دجودانە دەمێ x بەرەڤ (0)ێ دچیت ژ ڕەخێ ڕاستێ یان ژ ڕەخێ چەپێ. و ژڤێ دیاردبیت کو نەخشێ ئارمانج نینە دەمێ x بەرەڤ 0 دچیت.

خالا چاڤدێریێ

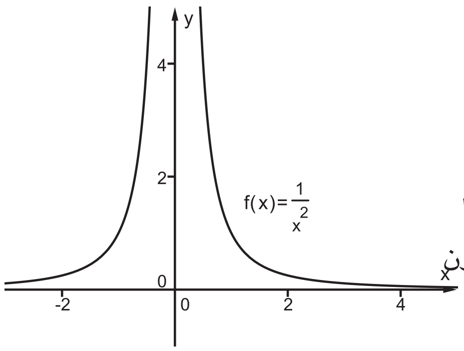
3. دیاربکە کو $\lim_{x\to 0}f(x)$ دەمێ $f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ x+1 & x>0\end{cases}$ نینە.

نموونـــه 4

سیفەتێ بێسنوور

دیاربکە ئەرێ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ هەیە یان نە

شیکار



وێنەیێ بەرامبەر چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{x^2}$ دنوێنیت. بەهایێ $f(x)$ بێسنوور زێدەدبیت دەمێ x بەرەڤ 0 دچیت ژ ڕەخێ ڕاستێ یان چەپێ، و ڕاماناڤێ ئەوە کو یا دشیانداتە تو بەهایێ $f(x)$ گەلەك مەزن بکەی ب هەلبژارتنا بەهایەکێ بۆ x و نێزیکی 0.

بۆ نموونە: تو دشێی بەهایێ $f(x)$ مەزنتر بکەی ژ 100 هەکو تو بەهایەکێ بۆ x هەلبژێری کێمتربیت ژ $\frac{1}{10}$ بۆ (0). ئانکو هەکە $0<|x|<\frac{1}{10}$ دێ $f(x)=\frac{1}{x^2}>100$، هەروەسا تو دشێی بەهایێ $f(x)$ مەزنتر بکەی ژ 1000 000 هەکەر بەهایەکێ بۆ x هەلبژێری کێمتربیت ژ $\frac{1}{1000}$ بۆ 0، چونکی پەیوەندیا $0<|x|<\frac{1}{1000}$ دیاردکەت کو $f(x)=\frac{1}{x^2}>1000\,000$. چونکی $f(x)$ نێزیکی ژمارەکا سنووردار L نابیت دەمێ x بەرەڤ 0 دچیت، لەورا ئارمانجا نەخشەی نینە.

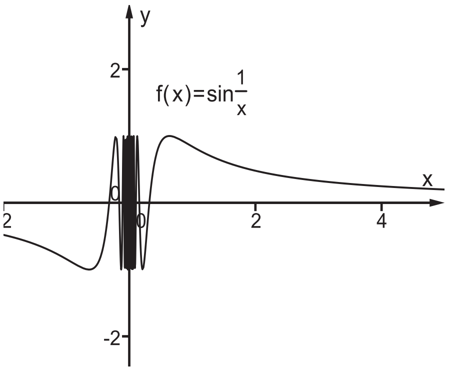
خالا چاڤدێریێ

4. دیاربکە ئەرێ $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$ هەبوون هەیە یان نە

نموونـــــه 5

سیفەتێ لەرەلەرە

ل هەبوونا ئارمانجا $\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ بگەرە



شیکار:

شێوەیێ بەرامبەر وێنەیێ روونکرنێ بۆ نەخشەیا $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ دیاردکەت. تو دبینی کو بەهایێ $f(x)$ لەرەلەرە دبیت ل ناڤبەرا 1 و -1 هەر چەند x بەرەڤ 0 بچیت ژ رەخێ راستێ یان ژ رەخێ چەپێ.

بێگومان هەردەم تو دشێی دوو بەهایان x_1 و x_2 بۆ گۆڕاوێ x هەلبژێری کو نێزیکی (0)ێ بن و ساخبکەی کو $f(x_1)=\sin\frac{1}{x_1}=1$ و $f(x_2)=\sin\frac{1}{x_2}=-1$ وەك ل خشتەیێ ل خوارێ دیاردبن.

x	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	$\frac{2}{11\pi}$	$x\to0$
$f(x)$	1	-1	1	-1	1	-1	ئارمانج نینە

خالا چاڤدێریێ

5. هەبوونا ئارمانجا $\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ دیاربکە

جۆرێن سیفەتێ دەمێ نەبوونا ئارمانجێ

1. دەمێ x نێزیکی c دبیت ژ رەخێ راستێ، بەهایێن $f(x)$ بۆ ژمارەکێ نێزیك دبن و ئەو یا جودایە ژ وێ ژمارا $f(x)$ بۆ وێ نێزیك دبیت دەمێ x بەرەڤ c دچیت ژ رەخێ چەپێ.

2. دەمێ x بەرەڤ c دچیت، بەهایێن $f(x)$ ب شێوەیەکێ بێسنوور زێدەدبن یان کێم دبن.

3. دەمێ x بەرەڤ c دچیت، بەهایێن $f(x)$ ل ناڤبەرا دوو ژمارەیێن نەگۆڕ و جودا لەرەلەرە دکەن.

گەلەك نەخشەیێن دی هەنە ئەوان سیفەتێن نە ئاسایی هەنە دەمێ x بەرەڤ بەهایەکێ دیارکری وەك c دچیت. ژ ڤان نەخشەیان نەخشەیا دیریکلیە Dirichlet function و ئەو یا پێناسەکرییە ب ڤی شێوەی:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in Q\\ 1 & x\notin Q\end{cases}$$

(Q کۆمەلا ژمارەیێن رێژەییە)

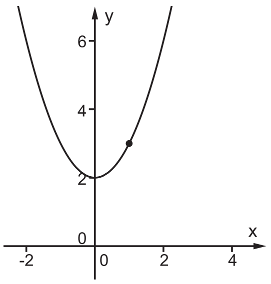
ڤی نەخشەی ئارمانج نینە دەمێ x بەرەڤ هەر ژمارەیەکا راستی x دچیت، و ئەو نەیا بەردەوامە ل هەموو ژمارەیێن راستی. دێ بەردەوامییا نەخشەیان ل وانەیا دهێت خوینین.

پێتەر دیریکلیە ١٨٠٥-١٨٥٩
دیریکلیە ئێکەمین کەس بوو پێناسەیەکا نوو بۆ نەخشەیێ دیارکری پشتبەستن ب وێ نەخشەیا ب ناڤێ وێ هاتیە ناسکرن.

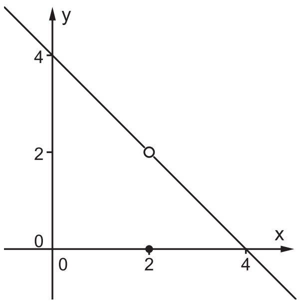
2-2 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا **1** هەتا **6** ، وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیێ بکاربینە بۆ دیارکرنا ئارمانجێ (هەکە هەبیت). هەکە ئارمانج نەبیت، هۆیێ وێ بێژە.

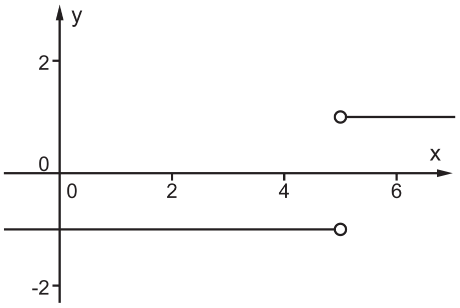
1 $\lim_{x\to 1}\left(x^2+2\right)$



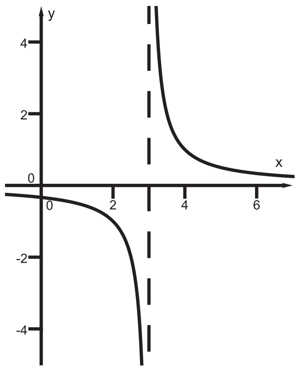
2 $\lim_{x\to 2} f(x)$ دەمێ $f(x)=\begin{cases}4-x & x\neq 2\\ 0 & x=2\end{cases}$



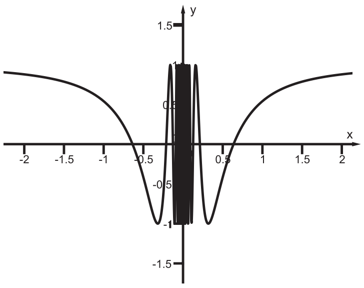
3 $\lim_{x\to 5}\dfrac{|x-5|}{x-5}$



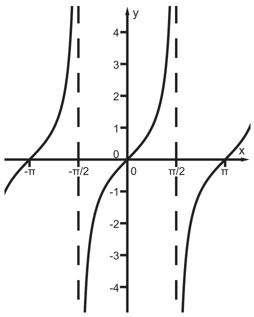
4 $\lim_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}$



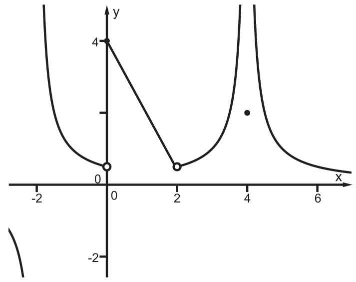
5 $\lim_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$



6 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\tan x$



7 وێنەیێ ڕوونکرنێ یێ بەرامبەر بۆ بەرسڤ دانێ بکاربینە. هەکە ئارمانج هەبیت، بەهایەکێ نێزیککری بۆ وێ دیاربکە، و هەکە نەبیت، هۆیێ وێ ڕوونبکە.



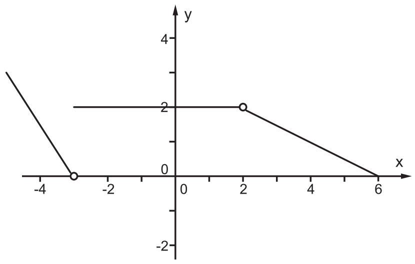
أ $f(-2)$ ب $\lim_{x\to -2} f(x)$

ج $f(0)$ د $\lim_{x\to 0} f(x)$

هـ $f(2)$ و $\lim_{x\to 2} f(x)$

ز $f(4)$ ح $\lim_{x\to 4} f(x)$

8 وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیا f بکاربینە بۆ دیارکرنا بەهایێن c دەمێ $\lim_{x\to c} f(x)$ هەبیت.



9 وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 2 \\ 8-2x & 2<x<4 \\ 4 & x\ge 4 \end{cases}$ وێنەبکە بکە و ئەوێ بۆ دیارکرنا بەهایێن c بکاربینە دەمێ ئارمانجا $\lim_{x\to c} f(x)$ هەبیت.

10 بژمێرێ بکاربینە بۆ دیارکرنا بەهایەکی نیزیککری بۆ $\lim_{x\to 0} f(x)$ دەمێ $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$. وێنەیەکێ ڕۆنکرنێ یێ نێزیککری بۆ ڤێ نەخشەیێ بکێشە، ب هەژمارکرنا بەهایێن ڤێ نەخشەیێ دەمێ x بەهایێن نێزیک بۆ (0) ێ وەربگرت.

دروستە یان نەیا دروستە؟ ژ ڕاهێنانا 11 هەتا 14 هەکە دەستەواژە یا دروست بیت هۆیێ وێ بێژە، و هەکەر نەیا دروست بیت ئەوێ ب دژە نموونەیەکێ بسەلمینە.

11 هەکە نەخشەیا f نەیا پێناسەکری بیت ل $x=c$، $\lim_{x\to c} f(x)$ نابیت.

12 هەکە $f(c)=L$ دێ $\lim_{x\to c} f(x)=L$.

13 هەکە $\lim_{x\to c} f(x)=L$ دێ $f(c)=L$.

14 نەخشەیا $f(x)=\sqrt{x}$ بکاربینە.

أ ئەرێ یە دروستە کو؟ $\lim_{x\to 0.25} \sqrt{x}=0.5$ ، بەرسڤا خۆ ڕۆنبکە.

ب ئەرێ یە دروستە کو؟ $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}=0$، بەرسڤا خۆ ڕۆنبکە.

دەربارەی چەمکان

15 کورتە باسەکێ ل سەر ڕامانا $\lim_{x\to 8} f(x)=25$ بنقیسە.

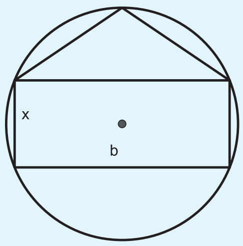
16 هەکە $f(2)=4$ ئەرێ تو دشێی تشتەکی دەرئەنجام بکەی دەربارەی ئارمانجا $f(x)$ دەمێ x نێزیکی 2 دبیت؟ بەرسڤا خۆ ڕۆنبکە.

17 هەکە $f(x)$ یەکسانی 4 بیت، دەمێ x نێزیکی 2 دبیت، ئەرێ تو دشێی تشتەکی دەرئەنجامبکەی دەربارەی $f(2)$؟ئەوێ ڕۆنبکە.

18 3 جۆرێن سیفەتێن نەخشەیان بێژە کو ئەوان ئارمانج نەبن، وێنەیەکێ ڕوونکرنێ وێنەبکە دەربڕینێ ژ هەر سیفەتەکێ بکەت.

بەرهنگاری

19 وێنەلاکێشەکێ و سێگۆشەیەکا دوولا یەکسان دیاردکەت کو هەردوو ب بازنەکێ د دەوردانە نیڤتیرەیێ وێ 1 . بەهایێ x چەندە کو ڕووبەرێن لاکێشەیێ و سێگۆشەیێ دیەکسان بن؟



3-2

هەژمارکرنا ئارمانجان
Finding Limits

ئارمانج

- ئارمانجا نەخشەیێ هەژماردکەن بکارئینانا ڕێسایان.
- دیارکرنا ڕێکەکێ بۆ هەژمارکرنا ئارمانجێ وبکارئنانا وێ.
- ئارمانجێ هەژماردکەن ب نڤیسینا برێ ل سەر سادەترین شێوەیێ.
- هەژمارکرنا ئارمانجێ بکارئینانا سەلمیناراوا (سەلمیناراوا دوو مەرج)

هەژمارکرنا ئارمانجان

تو ل وانەیا بوری فێربووی، چەوا بەهایەکێ نێزیك بۆ ئارمانجێ نەخشەیەکێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ و ب ژمارەیێ دیاردکەی (هەکە هەبیت). دێ ل ڤێ وانەیێ فێربی چەوا ئارمانجێ نەخشەیەکێ هەژماربکەی بکارئینانا ژمارەکا ڕێسایان و هندەك ئارمانجێن ناسیار. هەروەسا دێ فێری سەلمیناراوا سەندەویچی بی (سەلمیناراوا دوو مەرج)، و دێ چەوا بکارئینێ ل هەژمارکرنا ئارمانجان.

ڕێسایێن هەژمارکرنا ئارمانجان

ڕێسایا نەخشەیا نەگۆڕ: هەکە $f(x)=a$ دەمێ a ژمارەکا ڕاستی یا نەگۆڕ بیت $\lim\limits_{x\to c} f(x)=a$.

ڕێسایا نەخشەیا هێلی یا بنەڕەت: هەکە $f(x)=x$ دێ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=c$

ڕێسایا نەخشەیا هێزێ: هەکە $f(x)=x^n$ دێ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=c^n$

ڕێسایا نەخشەیا ڕەگێ دووجایی: هەکە $f(x)=\sqrt{x}$ دێ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\sqrt{c}$ دەمێ $c>0$

ڕێسایا لێکدان دگەل ژمارەکا نەگۆڕ: هەکە $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ هەبیت، دێ $\lim\limits_{x\to c}[af(x)]=a\lim\limits_{x\to c} f(x)$.
دەمێ a ژمارەکا ڕاستی یە نەگۆڕبیت.

ڕێسایا سەرجەمی: هەکە f و g دوو نەخشەبن، و هەکە هەردوو ئارمانج $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to c} g(x)$
هەبن، دێ $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to c} f(x)+\lim\limits_{x\to c} g(x)$

ڕێسایا جوداهیێ: هەکە f و g دوو نەخشەبن، و هەکە هەردوو ئارمانج $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ هەبن،
دێ $\lim\limits_{x\to c}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to c} f(x)-\lim\limits_{x\to c} g(x)$

ڕێسایا لێکدانێ: هەگە f و g دوو نەخشەبن، و هەکە هەردوو ئارمانج $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ هەبن،
دێ $\lim\limits_{x\to c}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to c} f(x)\lim\limits_{x\to c} g(x)$

نموونـــه 1

ئارمانجێ نەخشەیا ڕادەدار

هەژماربکە دەمێ $f(x)=-2x^5+3x^2-7x+5$ ، $\lim_{x\to 2} f(x)$.

شیکار:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(-2x^5+3x^2-7x+5\right)$$

ڕێسایا کۆمکرنێ بکاربینە
$$=\lim_{x\to 2}\left(-2x^5\right)+\lim_{x\to 2}\left(3x^2\right)+\lim_{x\to 2}(-7x)+\lim_{x\to 2}(5)$$

ڕێسایا لێکدان دگەل ژمارەکێ بکاربینە
$$=-2\lim_{x\to 2}\left(x^5\right)+3\lim_{x\to 2}\left(x^2\right)+(-7)\lim_{x\to 2}(x)+\lim_{x\to 2}(5)$$

ڕێسایا نەخشەیا هێزێ بکاربینە
$$=-2\times 2^5+3\times 2^2-7\times 2+5=-61$$

خالا چاڤدێری 1. هەژماربکە دەمێ $f(x)=3x^5-2x^3-4x^2-3$ ، $\lim_{x\to 2} f(x)$

هندەك ڕێسایێن هەژمارکرنا ئارمانجان

ڕێسایا ئارمانج نەخشەیا ڕادەدار: هەکە $f(x)$ نەخشەیەکا ڕادەدار بیت، دێ $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

ڕێسایا دابەشکرنێ: هەکە f و g دوو نەخشەبن، و هەکە هەردوو ئارمانج $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ هەبن، $\lim_{x\to c} g(x)\neq 0$ دێ

$$\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

نموونـــه 2

ئارمانجێ نەخشەیا ڕێژەیی

هەژماربکە $\lim_{x\to 2} f(x)$ هەکە $f(x)=\frac{x^2-1}{x-3}$ نەخشەیەکا ڕێژەییە

شیکار:

بکارئینانا ڕێسایا دابەشکرنێ، تو دشێی بنڤیسی:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{\lim_{x\to 2}\left(x^2-1\right)}{\lim_{x\to 2}(x-3)}=\frac{2^2-1}{2-3}=-3$$

خالا چاڤدێری 2. هەژماربکە $\lim_{x\to 2} f(x)$ هەکە $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ نەخشەیەکا ڕێژەیە.

چێدبیت دەمێ تو هەوڵددەی ئارمانجەکێ دیاربکەی، تو ڕووبەڕووی بارەکێ ژ بارەیێن نەدیار ببەی وەك $\frac{0}{0}$. ئەڤە زۆربەی جاران ڕوودددەت ل هەژمارکرنا ئارمانجێ نەخشەیەکا ڕێژەی. دێ ل نموونەیا ل خوارێ بینی، چەوا بارەیێ نەدیار ب جەبرێ لاددەی، و ئارمانجێ هەژماردکەی. دێ ڤەگەڕیە ڤێ پرسیارێ د بەشێ ئایندەدا و دێ فێری ڕێیەکا کارابی بۆ چارەسەریا کارێن وەسا.

نموونــــــه 3

بارەیێ نە دیار

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ هەژماربکە

شیکار:

بجهئینانا ڕێسایا نەخشەیا ڕێژەی، بارەکی ژ بارەیێن نەدیار پەیدادکەت.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-1}{\lim\limits_{x\to 1}x-1}=\frac{0}{0}$$

بۆ لادانا بارەیێ نەدیار، ئەڤێ بکاربینە: $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$ دەمێ $x\neq 1$ و ژ ڤێ دەرئەنجام دبیت کو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

خالا چاڤدێریێ

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ هەژماربکە

نموونــــــه 4

بارەیێ نە دیار

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ هەژماربکە

شیکار

بجهئینانا ڕێسایا نەخشەیا ڕێژەی بارەیەکێ نە دیار پەیدادکەت.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+6}-3}{\lim\limits_{x\to 3}x-3}=\frac{0}{0}$$

ژبۆ لادانا بارەیێ نە دیار، سەرەیی و ژێرەیی دگەل ئاولێ سەرەیێ $\sqrt{x+6}+3$ لێکبدە.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(\sqrt{x+6}+3)}=\frac{1}{6}$$

خالا چاڤدێریێ

4. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ هەژماربکە

هندەک ڕیساییێن هەژمارنا ئارمانجان

ڕێسایا هەژمارکرنا ئارمانجێ نەخشەیا ئاوێتە: هەکە f و g دوو نەخشەبن، و هەکە هەردوو ئارمانج $\lim\limits_{x\to c}g(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to L}f(x)$ هەبن، دێ

$$\lim_{x\to c}[f(g(x))]=f\left(\lim_{x\to c}g(x)\right)=f(L)$$

نموونــــه 5

ئارمانجێ نەخشەیا ئاوێتە

هەژماربکە $\lim_{x\to 2} f(x)$ هەکە $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.

شیکار:

$f(x)$ نەخشەیەکا ئاوێتەکرییە ژ دوو نەخشەیان: $u(x)=\sqrt{x}$ و $v(x)=x^2+4$

ئانکو $f(x)=\sqrt{x^2+4}=\sqrt{v(x)}=u(v(x))$

و ژ ئەڤێ دەرئەنجام دبیت کو: $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} u(v(x))$ بەلێ $\lim_{x\to 2} v(x)=v(2)=8$

قێجا $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 8}\sqrt{x}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

خالا چاڤدێریێ 5. $\lim_{x\to 2} f(x)$ هەژماربکە هەکە $f(x)=\sqrt{x^3-4}$.

هندەک رێسایێن هەژمارکرنا ئارمانجان

رێسایا نەخشەیێن سێگۆشەی

$\lim_{x\to c} \sin x=\sin c$ $\lim_{x\to c} \cos x=\cos c$ $\lim_{x\to c} \tan x=\tan c$ $c\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

نموونــــه 6

ئارمانجێ نەخشەیەکا نەخشەیا سێگۆشەی بخۆڤەدگریت

هەژماربکە $\lim_{x\to \pi} f(x)$ $f(x)=x\cos x$

شیکار:

$$\lim_{x\to \pi} f(x)=\lim_{x\to \pi}(x\cos x)=\lim_{x\to \pi}(x)\lim_{x\to \pi}(\cos x)=\pi\cos\pi=-\pi$$

خالا چاڤدێریێ 6. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)$ هەژماربکە هەکە $f(x)=x\sin x$

هندەک رێسایێن هەژمارکرنا ئارمانجان

رێسایا نەخشەیا توانی یا سروشتی $\lim_{x\to c}(e^x) = e^c$

رێسایا نەخشەیا لوگاریتمی یا سروشتی: $\lim_{x\to c} \ln x=\ln c$ $c>0$

نموونــــه 7

ئارمانجێ نەخشەیا توانی

هەژماربکە $\lim_{x\to \pi} f(x)$ $f(x)=3e^{\sin x}$

شیکار:

$$\lim_{x\to \pi} f(x)=\lim_{x\to \pi}(3e^{\sin x})=\lim_{x\to \pi}(3)\lim_{x\to \pi}(e^{\sin x})=3e^{\lim_{x\to\pi}\sin x}=3e^{\sin\pi}=3e^0=3$$

خالا چاڤدێریێ 7. $\lim_{x\to0} f(x)$ هەژماربکە، هەکە $f(x)=3ln(x+1)$.

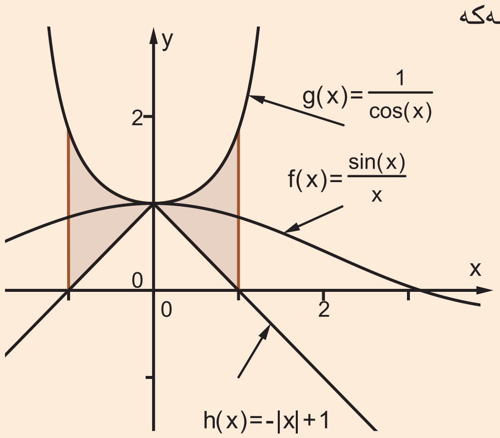
چێدبیت ل هندەك بارەیان هەژمارکرنا ئارمانجێ نەخشەیەکێ ڕاستەوخۆ نەیا ساناهی بیت. ل وان بارەیان، **سەلمینڕاوا** سەندەویج دێ هاریکاریا تە کەت ژبۆ هەژمارکرنا ئارمانجێ داخوازکری.

سەلمینراوا 2–1 سەلمینراوا هەردوو لەت (دوو مەرج – سەندەویچ)

هەکە $g(x) \le f(x) \le h(x)$ بەهایێ x هەر چەندبیت ل ڕەخێن (هاوشێوەیێن $x=c$ هەر چەندبیت ژبلی $x=c$، و هەکە

$$\lim_{x\to c} h(x) = L = \lim_{x\to c} g(x)$$

دێ $\lim_{x\to c} f(x)$ هەبیت و $\lim_{x\to c} f(x) = L$.



سەلمینراوا هەردوو لەت دێ هاریکاریا تە کەت بۆ هەژمارکرنا هندەك ئارمانجێن گرنگ، وەك ڤان هەردوو ئارمانجێن ل خوارێ.

هندەك ئارمانجێن سێگۆشەیی

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

نموونـــــە 8 بکارئینانا سەلمینراوا هەردوو لەت

$\lim_{x\to0} x\cos\frac{1}{x}$ هەژماربکە.

شیکار:

پشتبەستن ب لاسەنگیا جۆتك $-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$ تو دشێی بنڤیسی $-x \le x\cos\frac{1}{x} \le x$ هەکە $x \ge 0$ و
$-x \ge x\cos\frac{1}{x} \ge x$ هەکە $x<0$
تو دشێی سەلمینڕاوا سەندەویج و لاسەنگەیا $-x \le x\cos\frac{1}{x} \le x$ بکاربینی دا دەرئەنجامبکەی
کو $x\cos\frac{1}{x}$ نێزیکی 0 دبیت دەمێ x نێزیکی 0 دبیت ژ ڕەخێ ڕاستێ.
هەروەسا تو دشێی سەلمینڕاوا سەندەویج و لاسەنگەیا $-x \ge x\cos\frac{1}{x} \ge x$ بکاربینی دا
دەرئەنجامبکەی کو $x\cos\frac{1}{x}$ نێزیکی 0 دبیت دەمێ x نێزیکی 0 دبیت ژ ڕەخێ چەپێ، وئەڤە
دسەلمینت کو: $\lim_{x\to0} x\cos\frac{1}{x} = 0$

خالا چاڤدێریێ 8. $\lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}$ هەژماربکە

3–2 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا **1** هەتا **3** ، ئارمانجێ داخوازكری هەژماربكە:

1 $\lim_{x\to 1}\left(3x^3-2x^2+4\right)$

2 $\lim_{x\to 3}\frac{2}{x+2}$

3 $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}}{x-4}$

ل هەردوو ڕاهێنانان **4** و **5** ، زانیارێن پێدایێن بكاربینە بۆ هەژماركرنا ئارمانجێ داخوازكری:

4 $f(x)=5-x : g(x)=x^3$ بدۆزەوە.

أ $\lim_{x\to 1} f(x)$ ب $\lim_{x\to 4} g(x)$ ج $\lim_{x\to 1} g(f(x))$

5 $f(x)=2x^2-3x+1 : g(x)=\sqrt[3]{x+6}$ بدۆزەوە.

أ $\lim_{x\to 4} f(x)$ ب $\lim_{x\to 21} g(x)$ ج $\lim_{x\to 4} g(f(x))$

ژ ڕاهێنانا **6** هەتا **9** ، ئارمانجێ داخوازكری هەژماربكە:

6 $\lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}$

7 $\lim_{x\to \pi}\cos 3x$

8 $\lim_{x\to 3}\tan\frac{\pi x}{4}$

9 $\lim_{x\to 6}\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{6}}$

ل هەردوو ڕاهێنانان **10** و **11** ، زانیارێن پێدایێن بكاربینە بۆ هەژماركرنا ئارمانجێن داخوازكری:

10 $\lim_{x\to c} f(x)=2 : \lim_{x\to c} g(x)=3$

أ $\lim_{x\to c}[5g(x)]$ ب $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ ج $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)]$ د $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$

11 $\lim_{x\to c} f(x)=27$

أ $\lim_{x\to c}\sqrt[3]{f(x)}$ ب $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{18}$ ج $\lim_{x\to c}[f(x)]^2$ د $\lim_{x\to c}[f(x)]^{\frac{2}{3}}$

ژ ڕاهێنانا **12** هەتا **20** ، ئارمانجێ داخوازكری هەژماربكە:

12 $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}$

13 $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8}$

14 $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

15 $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+4}-\frac{1}{4}}{x}$

16 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$

17 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

18 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}$

19 $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

20 $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3+x}-\frac{1}{3}}{x}$

ژ ڕاهێنانا **21** هەتا **26** ، ئارمانجێ داخوازكری هەژماربكە:

21 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{5x}$

22 $\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)}{x}$

23 $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\tan x}{x}$

24 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$

25 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x}$

26 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (هاریكاری : بنڤیسە $\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{2\sin 2x}{2x}\times\frac{3x}{3\sin 3x}$)

ل هەردوو ڕاهێنانان 27 و 28 ، $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ هەژماربكە:

27 $f(x)=\sqrt{x}$

28 $f(x)=\frac{4}{x}$

ل هەردوو ڕاهێنانان 29 و 30 ، سەلمێنراوا دوو مەرج بكارببنە بۆ هەژماركرنا $\lim_{x\to c}f(x)$

29 $4-x^2\le f(x)\le 4+x^2$ ، $c=0$

30 $b-|x-a|\le f(x)\le b+|x-a|$ ، $c=a$

دەربارەی چەمكان

31 دەستەواژەیا «دوو نەخشەیێن هاو وێنە ژبلی ئێك خالێ» ڕوونبكە.

32 نموونەیەكێ بینە ل سەر دوو نەخشەیێن هاووێنە ژبلی ئێك خالێ

33 ب شێوازێ خۆ سەلمێنراوا دوو مەرج ڕوونبكە.

ل هەردوو ڕاهێنانان 34 و 35 ، نەخشەیا جهێ $s(t)=-4.9t^2+150$ ئەوا جهێ بەرەكێ دكەڤیت ژ بلنداهیا $150\ m$ دیاردكەت پشتی t چركەیان ژ كەفتنا وێ. $\lim_{t\to a}\frac{s(a)-s(t)}{a-t}$ دەربڕینا لەزا تەنەكێ دكەڤیت ل $t=a$ دكەت.

34 لەزا بەرەكێ ل $t=5$ هەژماربكە.

35 لەزا وێ بەرێ دێ چەندبیت دەمێ ل ئەردی دكەڤیت؟

36 دوو نەخشەیا f و g كو ئەڤانان بجهدئین دیاربكە: ئارمانجا $\lim_{x\to 0}f(x)$ و $\lim_{x\to 0}g(x)$ بوون نینە د دەمەكیدا ئارمانجا $\lim_{x\to 0}[f(x)+g(x)]$ بوون هەیە.

37 f و g ئەڤان ساخدكەن: $\lim_{x\to c}f(x)=0$ و $|g(x)|\le M$ بەهایێ x هەرچەند بیت ژبلی $x=c$ دەمێ M ژمارەكا مووجەب و نەگۆڕ بیت. بسەلمینە كو $\lim_{x\to c}f(x)g(x)=0$.

دروستە یان نەیا دروستە؟ ژ ڕاهێنانا 38 هەتا 41 ، هەكە دەستەواژەیا دروست بیت، هۆیێ وێ ڕوونبكە، و هەكە نەیا دروست بیت، ئەوێ ب دژە نموونەیەكێ بسەلمینە، یان هۆیێ وێ ڕوونبكە.

38 $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=1$

39 $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x}=1$

40 هەكە $f(x)=g(x)$ ، بەهایێ x هەر چەندبیت ژبلی $x=0$ و هەكە $\lim_{x\to 0}f(x)=L$ دێ $\lim_{x\to 0}g(x)=L$

41 $\lim_{x\to 2}f(x)=3$ دەمێ $f(x)=\begin{cases}3 & x\le 2\\ 0 & x>2\end{cases}$

بەشی 2

ئەزموونا نیڤا بەشی

لارێ لێکەفتێ

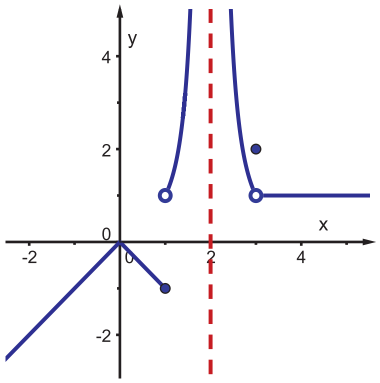
1 نەخشیا $f(x)=1-\frac{4}{x}$ و خالا $A(1,-3)$ ئەوا دکەفتە سەر وێنەیێ ڕونکرنا وێ بکاربینە.

أ وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیێ و برەڕێن d و d_2 و d_3 ئەوێن د خالا A و د خالێن $Q(x, f(x))$ ڕادبۆرێن بکێشە، دەمێ x بەهایێن 3 ، 2، 1.5 ب ڕێز وەردگریت.

ب لارێ هەر برەڕەکی هەژماربکە.

ج ڕوونبکە چەوا ئەو کردارا تە ل پرسیارا (ب) ئەنجام دای هاریکاریا تە دکەت ژبۆ هەژمارکرنا بەهایێ لارێ لێکەفتێ چەماوەیێ نەخشەیێ ل خالا A.

2 وێنەیێ بەرامبەر چەماوەیێ نەخشیا $f(x)$ دیاردکەت. ئەوی وێنەیی بکاربینە بۆ هەژمارکرنا بەهایێن $f(1)$ و $f(2)$ و $f(3)$ و $\lim_{x\to0} f(x)$ و $\lim_{x\to1} f(x)$ و $\lim_{x\to2} f(x)$ و $\lim_{x\to3} f(x)$.



هەژمارکرنا ئارمانجان

ژ ڕاهێنانا 3 هەتا 8 ، ئارمانجێ داخوازکری هەژماربکە.

3 $\lim_{x\to1} 2x^3-5x+2$

4 $\lim_{x\to-1} 5x^2+e^{2x}$

5 $\lim_{x\to1} \frac{x^2-2x+1}{|x-1|}$

6 $\lim_{x\to2} \frac{2x^2-8}{2-x}$

7 $\lim_{x\to-1} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}}{x+1}$

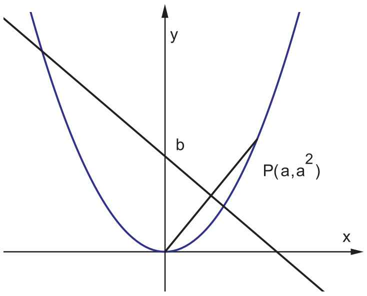
8 $\lim_{x\to0} \frac{3x-\sin 2x}{2x-\sin 3x}$

سەلمیناوا سەندەویچ

9 سەلمیناوا سەندەویچ بکاربینە ژبۆ هەژمارکرنا $\lim_{x\to0}|x|\sin\frac{1}{x^2}$.

کەفتنا ئازاد

10 نەخشیا $d(t)=-4.9t^2+60$ نموونەیەکێ دنوێنیت بۆ دەستنیشانکرنا جهێ بەرەکی ژ بلنداهیا 60 مێتەران دکەڤیت پشتی t چرکان ژ کەفتنا وی. $\lim_{t\to a}\frac{d(t)-d(a)}{t-a}$ دەربرینێ ژ لەزا بەرەکی دکەت ل $t=a$



أ لەزا بەرێ پشتی چرکەکێ ژ کەفتنا وی هەژماربکە.

ب لەزا بەرێ هەژماربکە دەمێ ل ئەردی دکەڤیت.

11 $P(a, a^2)$ ، $a>0$ خاڵەکا ل سەر چەماوەیێ برگەیێ هاوتا $f(x)=x^2$ هەکە b ئێکودوو برینا ستوونی بیت یا تەوەرێ ئەوی پارچەڕاستەهێلێ ناڤبەرا خالا P و خالا بنەڕەت دگەهینیت. ئارمانجێ b دەمێ P نێزیکی خالا بنەڕەت دبیت چەندە؟

4-2

نەخشەیێن بەردەوام
Continuous Functions

ڤەدیتن

هەکە تە شیا چەماوەیێ نەخشەیەکێ وێنە بکەی بێی سەرێ پێنڤیسێ خۆ ژ سەر کاغەزێ ڕابکەی، دێ هەست پێکەی ئەو نەخشەیا بەردەوامە. وێنەیێ ڕوونکرنێ (چەماوە) بۆ هەر نەخشەیەکا ل خوارێ وێنەبکە، پاشی دیار بکە ئەرێ هەرئێك ژ وان یا بەردەوامە یان نە.

.1 $f(x)=x+1$ .2 $f(x)=\frac{1}{x-2}$ .3 $f(x)=\begin{cases}2x-4 & x\le 0\\ x+1 & x>0\end{cases}$

ئارمانج

- بەردەوامیا نەخشەیێ ل خاڵەکێ.
- دیارکرنا بەردەوامیا نەخشەیێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ.
- تێگەهشتنا سەلمینراوا بەهایێ ناڤەڕاست و بکارئینانا وێ.

زاراڤ
Vocabulary

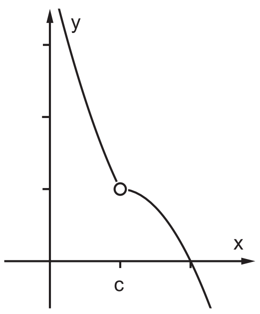
نەخشەیا بەردەوام
Continuous Function

نەخشەیا پچاندی
Discontinuous Function

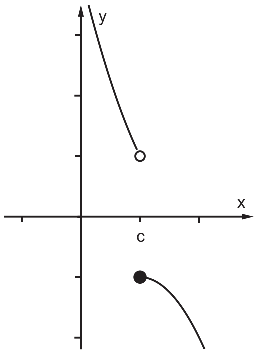
شیانا لادانا پچاندنێ هەیە
Removable Discontinuity

بەردەوامیا نەخشەیێ د خاڵەکێدا

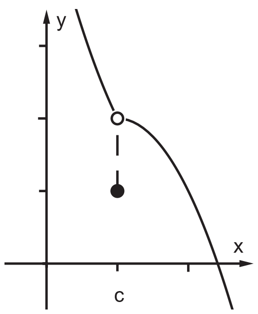
ڕامانا پەیڤا بەردەوامیێ ل بیرکاریێ دگونجیت دگەل ڕامانا وێ د ژیانا ڕۆژانەدا. دبێژین نەخشەیە بەردەوامە ل خاڵا $x=c$ هەکە چەماوەیێ وێ نەیێ پچاندی بیت ب هۆیێ (کەلینەکێ) یان دویرکەفتنەکێ. سێ وێنەیێن ل خوارێ بارێن نە بەردەواممییا نەخشەیێ ل خاڵا $x=c$ دیاردکەن. و نەخشە ل هەموو خاڵێن دی یە بەردەوامە.



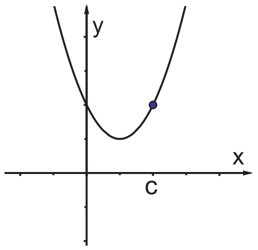
نەخشەیە بەردەوامە $x=c$



نەخشەیە پێناسەکرییە ل $x=c$



$\lim_{x\to c} f(x)\neq f(c)$



مەرجێن نە بەردەوامیا نەخشەیێ ل $x=c$

شێوەیێن ل سەری دیارکر کو هەر مەرجەکێ ل خوارێ نەبەردەوامییا نەخشەیێ ل $x=c$ دگەهینیت.

.1 هەکە نەخشەیا پێناسەکربیت ل $x=c$

.2 هەکە نەخشەیێ ئارمانج نەبیت دەمێ x نێزیکی c دبیت.

.3 هەکە نەخشەیێ ئارمانج هەبیت دەمێ x نێزیکی c دبیت، بەلێ ئەڤ ئارمانجە نە یەکسانی $f(c)$ بیت.

ئەڤ مەرجەنە مە پاڵدەن بۆ دارژتنا پێناسا نەخشەیا بەردەوام ل خاڵا $x=c$.

پێناسا بەردەواميا نەخشەیێ ل خاڵەکێ

نەخشەیا f دێ یا بەردەوام بیت ل خاڵا $x = c$ هەکە هەرسێ مەرجێن ل خوارێ ساخکرن:

1. نەخشەیە پێناسەکری بیت ل $x = c$.

2. $\lim_{x \to c} f(x)$ هەبیت.

3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

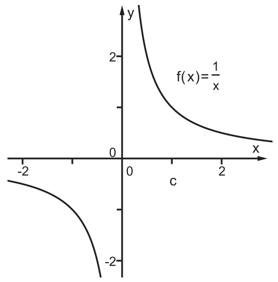
دێ بێژین نەخشەیە بچاندییە ل خاڵا $x = c$ هەکە نەیا بەردەوام بیت ل ڤێ خاڵێ. تو دشێی ل هندەك بارەیان پێناسا نەخشەیا بچاندی ل $x = c$ دوبارەبکەی کو بچاندنا وێ ل ڤێ خالێ لابدەی.

نموونـــــە 1 بەردەواميا نەخشەیێ

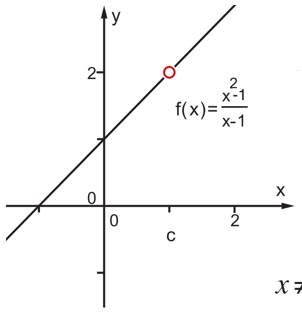
دانوستاندنێ ل سەر بەردەواميا هەر نەخشەیەکا ل خوارێ بکە، و خاڵێن بچاندنێ دیاربکە هەکە هەبن.

أ $f(x) = \frac{1}{x}$ **ب** $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ **ج** $h(x) = \begin{cases} x+1 & x \le 0 \\ x^2+1 & x > 0 \end{cases}$ **د** $k(x) = \sin x$

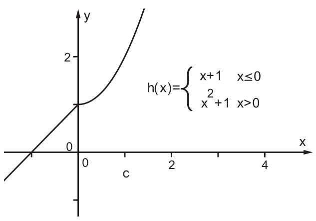
شیکار:



أ بوارێ نەخشەیێ پێکدهێت ژ هەموو ژمارەیێن ڕاستی ژبلی 0 ، ژ وێ دەرئەنجام دکەین کو نەخشە نەیا پێناسەکرییە ل خاڵا 0 $x = 0$ لەورا ئەو نەخشە نەیا بەردەوامە ل $x = 0$. ل ڕەخەکێ دی نەیا دشیانداییە پچاندنا نەخشەیێ ل ئەڤێ خاڵێ لابدەن. چونکی $f(0)$ ناهێتە پێناسەکرن هەتا نەخشەیە بەردەوام بیت ل $x = 0$.

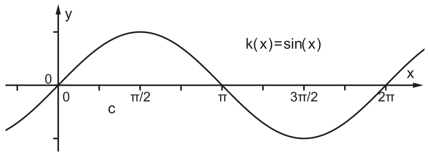


ب بوارێ نەخشەیێ پێکدهێت ژ هەموو ژمارەیێن ڕاستی ژبلی 1 ژ. وێ دەرئەنجام دکەین کو نەخشە نەیا پێناسەکرییە ل خاڵا 1 $x = 1$ لەورا ئەو نەخشە نەیا بەردەوامە ل ڤێ خاڵێ. ل ڕەخەکێ دی لادانا پچاندنێ ل ڤێ خاڵێ یا دشیاندایە، چونکی ئەو نەخشە دهێتە گوهۆڕین بۆ نەخشەیا g یا بەردەوام ل $x = 1$ هەکە تو g پێناسەبکەی ل سەر ڤی شێوەی: $g(1) = 2$ و $g(x) = f(x)$ دەمێ $x \ne 1$



ج بوارێ نەخشەیێ پێکدهێت ژ هەموو ژمارەیێن ڕاستی. نەخشەیە بەردەوامە ل هەر خاڵەکێ $x = c$ دەمێ $c \ne 0$ ، و دەربارەی خاڵا $x = 0$ نەخشەیە بەردەوامە ل وێ خاڵێ ژی. چونکی نەخشەیە پێناسەکرییە ل $x = 0$ ل ڕەخەکی، و ئەوێ ئارمانج هەیە یەکسانە 1 دەمێ x نێزیکی c دبیت (ژ ڕەخێ ڕاستێ یان ژ ڕەخێ چەپێ) ل ڕەخێ دووێ، و چونکی $\lim_{x \to 0} h(x) = 1 = h(0)$ ل ڕەخێ سێیێ.

د بوارێ نەخشەیێ پێکدهێت ژ هەموو ژمارەیێن ڕاستی. یا دیارە کو نەخشەیە بەردەوامە ل هەر خاڵەکێ $x = c$ ژ خاڵێن بوارێ وێ، و ئەڤە وەدکەت کو نەخشەیە بەردەوام بیت.



خاڵا چاڤدێرییێ

1. دانوستاندنێ ل سەر بەردەواميیا هەر نەخشەیەکێ بکە.

أ $f(x) = \frac{1}{x-1}$

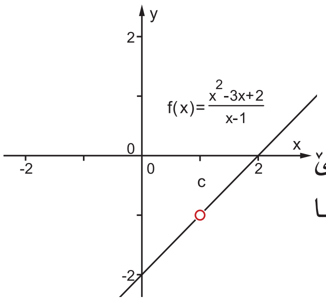
ج $h(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \le 0 \\ -x+1 & x > 0 \end{cases}$

ب $g(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$

د $k(x) = \cos x$

نموونە 2 لادانا پچاندنا نەخشەیێ ل خاڵەکێ

ئەرێ نەخشەیا $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$ یە بەردەوامە ل خاڵا $x = 1$ ؟ وێنەیێ ڕوونکرنا وێ بکێشە و بەرسڤا خۆ ڕۆنبکە. هەکە نەخشەیا پچاندی بیت ل ڤێ خاڵێ، دیار بکە ئەرێ لادانا وێ پچاندنێ یا دشیاندایە. ل ڤێ بارەی ڕۆنبکە چەوا ئەوێ لاددەی ب دوبارەکرنا پێناسەیا نەخشەیێ.



شیکار:

نەخشەیا پچاندییە ل خاڵا $x = 1$ چونکی ئەو نەیا پێناسەکرییە ل وێ خاڵێ، چەماوەیێ نەخشەیێ ئەڤێ ئێکێ دیاردکەت. بەلێ شیانا لادانا ڤێ پچاندنێ هەیە، چونکی $f(x)$ نێزیکی -1 دبیت دەمێ x نێزیکی 1 دبیت ژ هەردوو ڕەخێن ڕاست و چەپێ. وئەڤە ڕێکێ ددەت بۆ نڤیسینا.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -1$$

بۆ لادانا پچاندنا نەخشەیا f ل خاڵا $x = 1$، پێناسا وێ ل سەر شێوەیێ ل خوارێ دوبارە بکە:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & x \ne 1 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$

خاڵا چاڤدێرییێ

2. ئەرێ نەخشەیا $f(x) = \frac{x^2-x-3}{x+2}$ یا بەردەوامە ل خاڵا $x = -2$ ؟ وێنەیێ ڕوونکرنا وێ وێنەبکە و بەرسڤا خۆ ڕۆنبکە. هەکە نەخشەیا پچاندی بیت ل ڤێ خاڵێ، دیاربکە ئەرێ لادانا وێ پچاندنێ یا دشیاندایە و ل ڤێ بارەی ڕوونبکە چەوا ئەوێ لاددەی ب دوبارەکرنا پێناسەیا نەخشیێ.

سەلمێنراوا بەهایێن ناڤەڕاست Intermediate Value Theorem

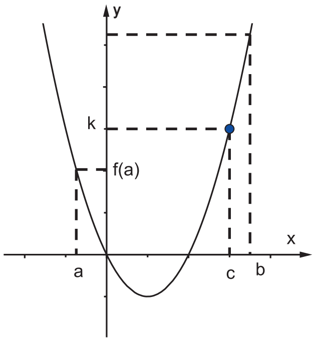
هەکە تو ب هووری بەرێ خۆ بدەیە گوهۆڕینا درێژیا مرۆڤی دگەل گوهۆڕینا ژیێ وی. دێ بینی کو درێژیا مرۆڤی ب ڕاستی دبیتە نەخشەیەك ل دووڤ ژیێ وی. تو دێ تێبینیا ڤی کاری کەی: هەکە درێژیا مرۆڤەکی 150 cm بوو دەمێ ژیێ وی 12 ساڵ، و 169 cm بوو دەمێ ئەو ل ژیێ 20 ساڵیێ. درێژیا وی هەموو ئەوان بەهایێن دکەڤنە ناڤبەرا 150 و 169 وەردگریت ل بۆرینا ڕۆژان.

و تو تێبینیێ دکەی کو درێژیا ڤی مرۆڤی زێدەدبیت ژ 150 cm بۆ 169 cm بشێوەیەکێ بەردەوام و چوناڤبر ناکەڤتێ. دەربرینا ڤان تێبینیان دهێتەکرن ب دەستەواژەیا: درێژیا ڤی مرۆڤی نەخشەیەکا بەردەوامە دەمێ ژێ وێ بەهایێن ل ناڤبەرا 12 و 20 وەردگریت، و ئەڤ نەخشە هەموو بەهایان وەردگریت ژ 150 هەتا 169. ونەخشەیا بەردەوام هەمان سیفەت هەنە، وسەلمێنراوا بەهایێن ناڤەڕاست ئەڤێ دویات دکەت.

سەلمێنراوا 2-2 **بەهایێن ناڤەڕاست**

هەکە f نەخشەیەکا بەردەوام بیت ل ناڤبەرا هەردوو خاڵان $x=a$ و $x=b$، ئەو دێ هەموو بەهایێن ل ناڤبەرا $f(a)$ و $f(b)$ وەرگریت.

ب دەستەواژەیەکا هوورتر، هەکە k ژمارەیەکا ڕاستی بیت ل ناڤبەرا $f(a)$ و $f(b)$، دێ ئەم شێین ژمارەیەکێ وەک c دیاربکەین ل ناڤبەرا a و b کو $f(c)=k$ ساخبکەت.



ڕەگێن هاوکێشەیا $f(x)=0$

ژ گرنگترین بجهئینانێن سەلمێنراوا بەهایێن ناڤەڕاست، سەلماندنا ئەوێ ئێکێیە کو هاوکێشەیا $f(x)=0$ ڕەگەک هەیە دکەڤیتە ناڤبەرا دوو ژماران. هەکە f نەخشەیەکا بەردەوام بیت ل ناڤبەرا $x=a$ و $x=b$ و هەکە $f(a)$ و $f(b)$ دوو نیشانێن جودا هەبن، دێ هاوکێشەیا $f(x)=0$ ب کێماتی ئێک ڕەگ هەبیت ل ناڤبەرا a و b.

چونکی $f(a)$ و $f(b)$ دوو نیشانێن جودا هەنە، 0 دێ بیتە بەهایەکێ ناڤەڕاست ل ناڤبەرا $f(a)$ و $f(b)$، پشتبەستن ب سەلمێنراوا بەهایێن ناڤەڕاست، ژمارەیەکا ڕاستی وەک c هەیە ل ناڤبەرا a و b کو $f(c)=0$ ساخبکەت.

نموونە 3 بجهئینان ل سەر سەلمێنراوا بەهایێن ناڤەڕاست.

سەلمێنراوا بەهایێن ناڤەڕاست بکاربینە دا بسەلمینی کو $f(x)=0$ ڕەگەک هەیە د ناڤبەرا 0 و 1 دا هەکە $f(x)=x^3+2x-1$

شیکار:

نەخشەیا f نەخشەیەکا ڕادەارە، هەروەسا ئەو نەخشەیەکە بەردەوامە ل ناڤبەرا $x=0$ و $x=1$.

ل ڕەخەکێ دی:

$$f(0)=0^3+2(0)-1=-1$$
$$f(1)=1^3+2(1)-1=2$$

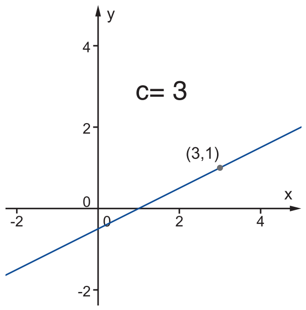
چونکی $f(0)<0$ و $f(1)>0$ و هەردووان دوو نیشانێن جودا هەنە، دێ هاوکێشەیا $f(x)=0$ ڕەگەک هەبیت بکەڤیتە ناڤبەرا 0 و 1 دا.

خالا چاڤدێریێ 3. سەلمێنراوا بەهایێن ناڤەڕاست بکاربینە دا بسەلمینی کو هاوکێشەیا $f(x)=0$ دەمێ دوو ڕەگ هەنە دکەڤنە دناڤبەرا 0 و 1 هەکە $f(x)=x^4+2x^2-1$

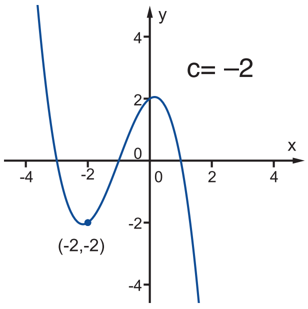
4–2 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا 1 هەتا 6 ، وێنەیێ ڕۆنکرنێ بکاربینە بۆ هەژمارکرنا ئارمانجێ نەخشەیێ دەمێ x نێزیکی c دبیت ژ ڕەخێ ڕاستێ و چەپێ.($\lim_{x\to c} f(x)$ هەژماربکە (هەکە هەبیت). پاشی دانوستاندنێ ل سەر بەردەوامیا نەخشەیێ ل $x=c$ بکە.

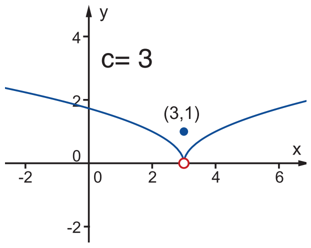
1



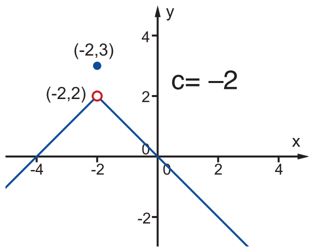
2



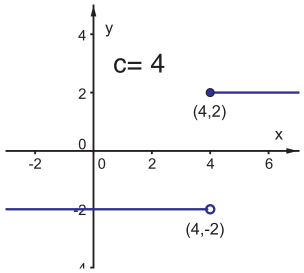
3



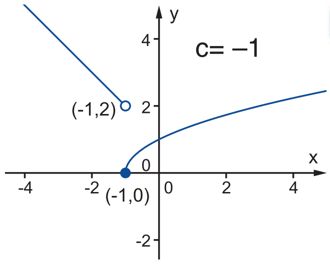
4



5

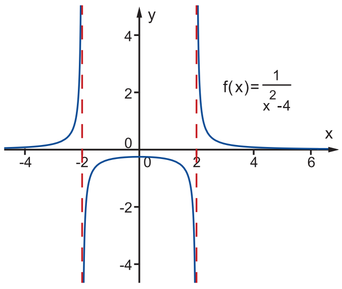


6

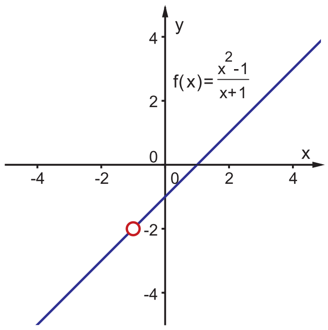


ژ ڕاهێنانا 7 هەتا 9 ، دانوستاندنێ ل سەر بەردەوامیا نەخشەیێ بکە.

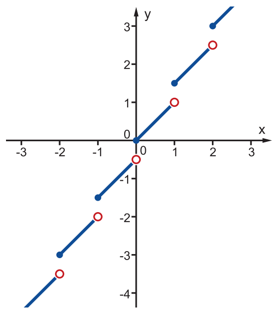
7 $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$



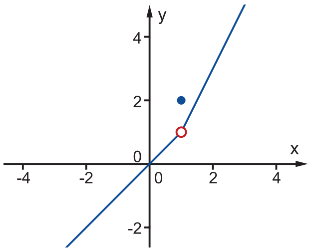
8 $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$



9 $f(x)=\frac{1}{2}[x]+x$ کە ژ $[x]$ مەزنترین ژمارا تەواو نە زێدەتر x دنوێنیت.



10 $f(x)=\begin{cases} x & x<1 \\ 2 & x=1 \\ 2x-1 & x>1 \end{cases}$



ژ ڕاهێنانا 11 هەتا 16 ، ئەوان بەهایێن x کو نەخشەیا ل دەڤ وان یا پچاندی بیت هەژمارېکە (هەکە هەبیت). و دیاربکە ئەرێ شیانا لادانا پچاندنێ هەیە.

11 $f(x)=x^2-2x+1$

12 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

13 $f(x)=\frac{x}{x^2-x}$

14 $f(x)=\frac{x}{x-1}$

15 $f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$

16 $f(x)=\begin{cases}-2x+3 & x<1\\ x & x\ge 1\end{cases}$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 17 و 18 ، بەهایی a یان هەردوو بەهایێن a و b دیاربکە دا نەخشەیێ خالێن پچاندنێ نەبیت.

17 $f(x)=\begin{cases}x^3 & x\le 2\\ ax^2 & x>2\end{cases}$

18 $f(x)=\begin{cases}2 & x\le -1\\ ax+b & -1<x<3\\ -2 & x\ge 3\end{cases}$

دەربارەی چەمکان

19 جوداهیا ل ناڤبەرا پچاندنا شیانا لادانا وێ هەبیت و پچاندنا شیانا لادانا وێ نەبیت ڕۆنبکە. دناڤ ڕۆنکرنێ دا نموونەیەکێ بینە ل سەر:

أ نەخشەیەکا پچاندی ل $x=2$ و شیانا لادانا پچاندنا وێ نەبیت.

ب نەخشەیەکا پچاندی ل $x=-2$ و شیانا لادانا پچاندنا وێ هەبیت.

ج نەخشەیەکێ هەردوو مەرجێن پێشتر پێکڤە ساخبکەت.

دروستە یان نەیا دروستە؟ ژ ڕاهێنانا 20 هەتا 23 ، هەکە دەستەواژەیا دروست بیت، هۆیێ وێ ڕۆنبکە، و هەکە نەیا دروست بیت ب دژە نموونەیەکێ بسەلمینە:

20 هەکە $\lim_{x\to c} f(x)=L$ و $f(c)=L$ ، دێ نەخشەیا f ژ $x=c$ یا بەردەوام بیت.

21 هەکە $f(x)=g(x)$ دەمێ $x\ne c$ و $f(c)\ne g(c)$ دێ ئێک ژ هەردوو نەخشەیان بکێماتی یاپچاندی بیت ل $x=c$

22 چێدبیت نەخشەیەکا ڕێژەی ژمارەکا بێسنوور یا خالێن پچاندی هەبیت.

23 نەخشەیا $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$ یا بەردەوامە و خالێن پچاندنێ نینە.

24 نەخشەیا نیشانێ ئەڤ نەخشەیە

$$s(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

25 وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا s وێنەبکە و ئارمانجێن ل خوارێ دیاربکە (هەکە هەبن)

أ $\lim_{x\to 0^-} s(x)$

ب $\lim_{x\to 0^+} s(x)$

ج $\lim_{x\to 0} s(x)$

5-2

ئارمانجێن بێدوماهی

Infinite limits

ئارمانج

- دیارکرنا ئارمانجان ژ ڕەخێ ڕاستێ و ژ ڕەخێ چەپێ.
- دیارکرنا دەرکنارێن ستوونی بۆ نەخشەیەکێ و وێنەکرنا ڤان دەرکناران.

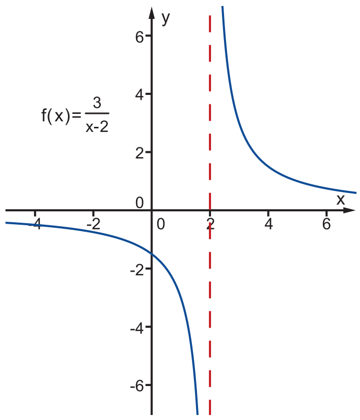
زاراڤ

Vocabulary

ئارمانجێ بێدوماهیێ
Infinite Limit

دەرکەنارێن ستوونی
Vertical Asymtote

ئارمانجێن بێدوماهی



وێنەیێن بەرامبەر چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\frac{3}{x-2}$ دیاردکەت. تو دشێی ڤی وێنەیێ ڕوونکرنێ و خشتەیێ ل خوارێ بکاربینی دا ببینی کو بەهایێن $f(x)$ بێسنوور کێم دبن دەمێ x پتر و پتر نێزیکی 2 دبن ژ ڕەخێ چەپێ. و دێ بێژین $f(x)$ نێزیکی $-\infty$ دبیت دەمێ x نێزیکی 2 دبیت ژ ڕەخێ چەپێ، و دێ نڤیسین: $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

و هەروەسا بەهایێن $f(x)$ بێسنوور زێدەدبن دەمێ x پتر و پتر نێزیکی 2 دبیت ژ ڕەخێ ڕاستێ. و دێ بێژین $f(x)$ نێزیکی $+\infty$ دبیت دەمێ x نێزیکی 2 دبیت ژ ڕەخێ ڕاستێ، و دێ نڤیسین: $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

x نێزیکی 2 دبیت ژ ڕەخێ ڕاستێ ←

→ x نێزیکی 2 دبیت ژ ڕەخێ چەپێ

x	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5
$f(x)$	−6	−30	−300	−3000	؟	3000	300	30	6

بەهایێ $f(x)$ بێسنوور زێدەدبیت ←

→ بەهایێ $f(x)$ بێسنوور کێم دبیت

دێ بێژین نەخشەیا f نێزیکی ئارمانجێ بێدوماهی دبیت، دەمێ x نێزیکی بەهایێ c دبیت، هەکە بەهایێ $f(x)$ بێسنوور زێدە بیت یان کێم بیت.

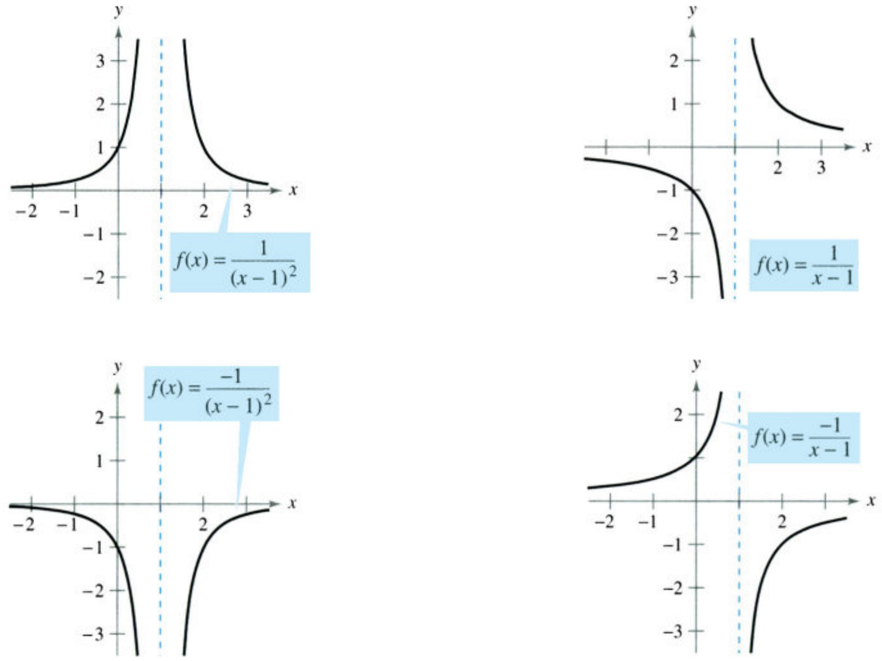
ڤەدیتن

وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ هەر نەخشەیەکێ بکێشە. ژمارەیەکا ڕاستی c بۆ هەر نەخشەیەکێ دیاربکە کو نەکەڤتە د بوارێ وێ دا. ب وێنەیێ ڕوونکرنێ، ئارمانجێ $f(x)$ دیاربکە دەمێ x نێزیکی c دبیت ژ ڕەخێ ڕاستێ و ژ ڕەخێ چەپێ:-

.1 $f(x)=\frac{3}{x-4}$ .2 $f(x)=\frac{1}{2-x}$ .3 $f(x)=\frac{2}{(x-3)^2}$

نموونـــــه 1 دیارکرنا ئارمانجێن بێدوماهی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ

وێنەیێن ڕوونکرنێ ئەوێن ل خوارێ بکاربینه بۆ دیارکرنا ئارمانجێ نەخشەیێ دەمێ x نێزیکی 1 دبیت ژ ڕەخێ ڕاستێ و ژ ڕەخێ چەپێ.



شیکار:

.1 $\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$ $\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$

.2 $\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$ ئارمانج دبیتە $+\infty$ ژ هەردوو ڕەخان

.3 $\lim_{x\to1^-}\frac{-1}{x-1}=+\infty$ $\lim_{x\to1^+}\frac{-1}{x-1}=-\infty$

.4 $\lim_{x\to1}\frac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$ ئارمانج دبیتە $-\infty$ ژ هەردوو ڕەخان

خالا چاڤدێریێ

1. ئارمانجێ هەر نەخشەیەکێ دیاربکە دەمێ x نێزیکی -1 دبیت ژ ڕەخێ ڕاستێ و ژ ڕەخێ چەپێ:

أ $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ ب $f(x)=\frac{1}{|x+1|}$

دەرکنارێن ستوونی

هەکە تو بشێی چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{x-1}$ ئەوێ پێشتر دیارکری بەرەڤ زۆر ژ ڕەخێ ڕاستێ ئەوی ڕاستەهێلی ب سۆری خالخالکری و ژ ڕەخێ چەپێ ژێریا ڕاستەهێلی ب سۆری خالخالکری درێژ بکەی، دێ بینی چەماوە پتر و پتر نێزیکی ڤێ ڕاستەهێلی دبیت و ناگەهتێ. و دەربڕینێ ژ ڤێ گۆتنێ دکەی. ب دەستەواژەیا: ئەڤ ڕاستەهێلە دبیتە دەرکنارێ ستوونێ بۆ چەماوەیێ نەخشەیێ یان بۆ نەخشەیێ (دێ ل ئایندە جۆرەکێ دی یێ دەرکناران خوینی).

پێناسا دەرکنارێن ستوونی

هەکە $f(x)$ نێزیکی $+\infty$ بوو یان نێزیکی $-\infty$ بوو دەمێ x نێزیکی c دبیت، دێ ڕاستەهێلی ستوونی $x=c$ ببیتە دەرکنارێ ستوونی بۆ چەماوەیی نەخشەیێ یان نەخشەیێ

هەکە تو ڤەگەرییە نموونە 1 دێ بینی کو هەرچار نەخشە نەخشەیێن ڕێژەینە، و ڕاستەهێلی $x=1$ دبیتە دەرکنارێ ستوونی بۆ هەرئێك ژ وان. بەرێ خۆ بدێ کو ژمارە 1 ژێرەیێ هەرئێکێ ژ وانە دکەتە 0 ب لجهدانانێ، و سەرییێ هەرئێك ژ وان نابیتە 0.

تو دشێی ڤێ تێبینیێ گشتگر بکەی پێ ڤێ سەلمێنراوێ:

سەلمێنراوا 2-3 **دەرکنارێ ستوونی**

هەکە f و g دوو نەخشەیێن بەردەوام بن، و هەکە $f(c)\neq 0$ و $g(c)=0$ بەلێ $g(x)\neq 0$ ل هەڤسوودێ (هاوشێوەیێ) $x=c$، دێ ڕاستەهێلێ $x=c$ ببیتە دەرکنارێ ستوونی بۆ نەخشەیا.

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

ئانکو $x=c$ بتنێ ژێرەی دکەتە سفر.

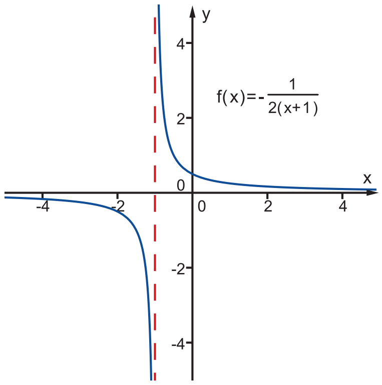
نموونە 2 **دیارکرنا دەرکنارێن ستوونی**

دەرکنارێن ستوونی بۆ هەر نەخشەیەکێ دیاربکە.

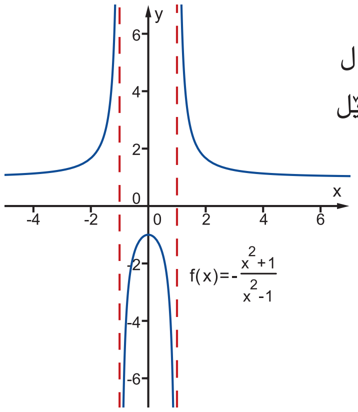
.1 $f(x)=\frac{1}{2(x+1)}$ **.2** $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ **.3** $f(x)=\frac{1}{\tan x}$

شیکار:

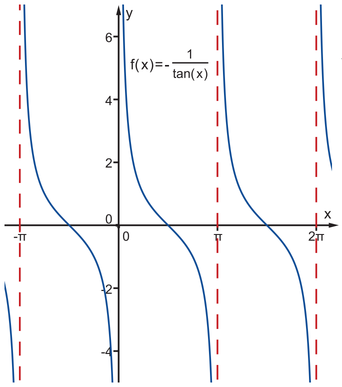
.1 ژێرەیێ نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{2(x+1)}$ دبیتە 0 ل $x=-1$، لێ سەرەیێ نەخشەی نابیتە سفر ل وێ خالێ.
ل دووڤ سەلمێنراوا دەرکنارێ ستوونی، ڕاستەهێلی $x=-1$ دبیتە دەرکنارێ ستوونی بۆ نەخشەیێ.



.2 تودشێی نەخشەیێ ب ڤی شێوەی بنڤیسی بکارئینانا شیتەلکرنێ: $f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$
ل ڤێرێ دیاردبیت کو 1 و -1 ژێرەی دکەنە سفر ب لجهدانانێ و ئەڤ هەردوو ژمارە سەری ناکەنە سفر، و ل دووڤ سەلمێنراوا دەرکنارێ ستوونی، هەردوو ڕاستەهێل $x=1$ و $x=-1$ دبنە دەرکنارێن ستوونی بۆ نەخشەیێ، وەك ل وێنەیێ بەرامبەر دیاردبیت.



3. تو دشێی نەخشەیێ ل سەر ڤی شێوەی بنڤیسی $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ ژێرە دبیتە سفر دەمێ x وان بەهایان وەربگرت: ئەوێن $\sin x$ دکەنە سفر، ئەو دبنە چەند جارانێن π . و ئەڤ بەهایە سەری ناکەنە 0.
پشتبەستن ب سەلمینراوا دەرکنارێ ستوونێ، هەموو راستەهێلێن $x=n\pi$ دبنە دەرکنارێن ستوونی بۆ ڤی نەخشەیێ دەمێ $n\in I$. وەك دیاردبن ل وێنەیێ بەرامبەر.



مەرجێ $f(c)\neq 0$ ل سەلمینراوا دەرکنارێ ستوونی مەرجەکێ بنەڕەت دا ڕاستەهێلی $x=c$ ببیتە دەرکنارێ ستوونی بۆ نەخشەیێ (بەرێ خۆ بدە نموونە 3).

خالا چاڤدێریێ

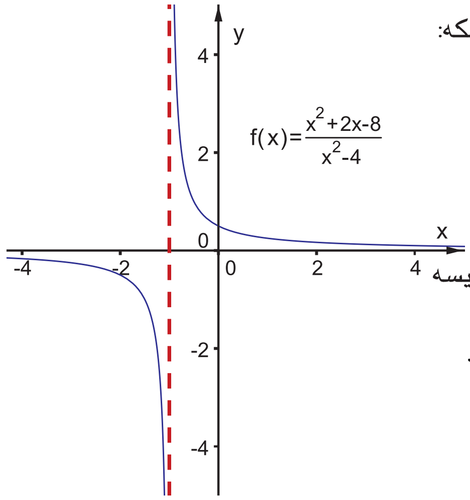
2. دەرکنارێن ستوونێ بۆ هەر نەخشەیەکێ دیاربکە.

أ $f(x)=\frac{2}{3x-2}$ ب $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$ ج $f(x)=\frac{1}{\cos x}$

نموونـــــە 3 نەخشەیەکا ڕێژەی، سەرە وژێرەیێ وێ کۆلکەیەکێ هاوبەش بخۆڤە بگریت.

هەموو دەرکنارێن ستوونی بۆ ڤێ نەخشەیێ دیاربکە:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$$



شیکار:

ل دەستپێکێ نەخشەیێ ل سەر سادەترین شێوە بنڤیسە

$$f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}=\frac{(x+4)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{x+4}{x+2};\quad x\neq -2$$

هەردوو ژمارە 2 و −2 ژێرەی دکەنە سفر ب لجهدانانێ $x=-2$ دبیتە دەرکنارێ ستوونی، چونکی ئەو ژێرەی دکەتە 0 و سەری ناکەتە 0 ب لجهدانانێ.

بەلێ $x=2$ سەرە و ژێرەی دکەتە 0 . چەماوەیێ نەخشەیا f جووت دبیت دگەل چەماوەیێ نەخشەیا $g(x)=\frac{x+4}{x+2}$ دەمێ $x\neq 2$. و ئەڤ تێبینیە بۆ تە دیاردکەت کو بەهایێ $f(x)$ نێزیکی $+\infty$ نابیت ونێزیکی $-\infty$ نابیت دەمێ x نێزیکی 2 دبیت، و ڕاستەهێلێ $x=2$ نابیتە. دەرکنارێ ستوونی بۆ نەخشەیێ.

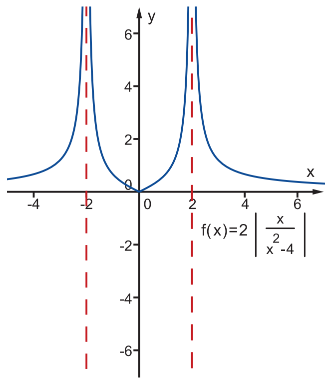
خالا چاڤدێریێ

3. هەموو دەرکنارێن ستوونێ بۆ نەخشەیا $f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$ دیاربکە.

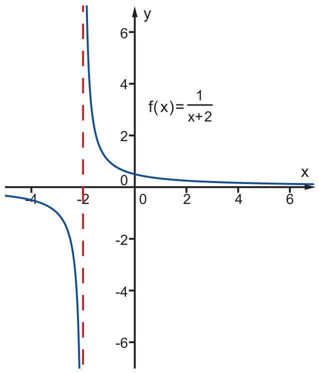
5-2 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا **1** هەتا **4** ، ئارمانجا $f(x)$ د یاربکە دەمێ x نێزیکی 2- دبیت ژ ڕەخێ ڕاستێ و چەپێ.

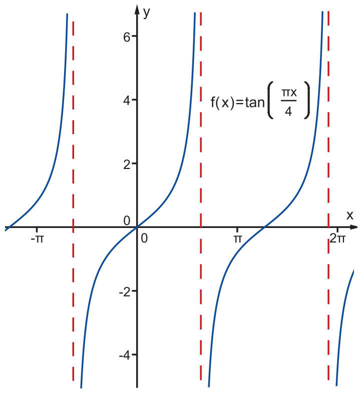
1 $f(x)=2\left|\frac{x}{x^2-4}\right|$



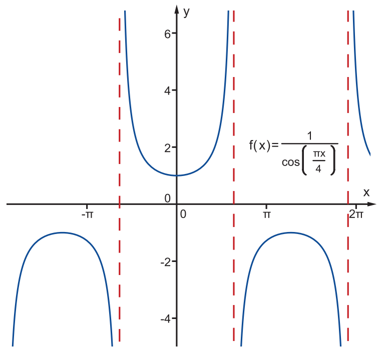
2 $f(x)=\frac{1}{x+2}$



3 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$



4 $f(x)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$



ژ ڕاهێنانا **5** هەتا **13**، دەرکنارێن ستوونی بۆ نەخشەیێ دیاربکە (هەکە هەبن):

5 $f(x)=\frac{1}{x^2}$

6 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$

7 $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2-x-2}$

8 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$

9 $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$

10 $f(x)=\frac{1}{\cos(\pi x)}$

11 $f(x)=1-\frac{1}{x^2}$

12 $f(x)=\frac{x^3+1}{x+1}$

13 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$

دەربارەی چەمکان

14 ب شێوازێ خۆ، راماناٸارمانجێ بێدوماهی رۆنبکە؟ ئەرێ $+\infty$ ژمارەکا راستیە؟

15 دەرکنارێ ستوونی ب شێوازێ خۆ رۆنبکە.

16 نەخشەیەکا رێژەی بنڤیسە دەرکنارێ ستوونی هەبیت ل $x = 6$ ، و ئێکێ دی هەبیت ل $x = -2$ ، و سفرەك هەبیت ل $x=3$.

17 ئەرێ هەر نەخشەیەکا رێژەی دەرکنارێ ستوونی هەیە؟ بەرسڤا خۆ رۆنبکە.

18 **تێکراییێ لەزێ:** دووری ل ناقبەرا دوو باژێران d km ، شوفێرەکی ئەو دووریە ب چۆن و هاتن بری، و تێکراییێ لەزا وی ل چۆن و هاتنێ 50 km/h . لەزا وی ل چۆنێ x km/h بوو، و ل هاتنێ y km/h .

[أ] ساخبکە کو پەیوەندی ل ناقبەرا x و y ب ڤی شێوەی دهێتە نڤیسین: $y = \frac{25x}{x-25}$، بوارێ نەخشەیا پێناسەکری ب $y = f(x)$ ، دیاربکە.

[ب] خشتەیی تەمامبکە.

x	30	40	50	60
y				

ئەرێ بەهایێن y دجودانە ژ وان بەهایێن تو پێشبین دکەی؟ بەرسڤا خۆ رۆنبکە؟

[ج] ئارمانجێ y هەژماربکە، دەمێ x نێزیکی 25 دبیت ژ رەخێ راستێ. ئەنجامی شلوڤەبکە.

دروستە یان نەیا دروستە؟ **ژ راهێنانا 19 هەتا 22 ، هەکە دەستەواژەیا دروست بیت، هۆیێ وێ رۆنبکە، و هەکە نەیا دروست بیت ب دژە نموونەکێ بسەلمینە.**

19 هەکە $p(x)$ نەخشەیەکا رادەداربیت، نەخشەیا $f(x) = \frac{p(x)}{x-1}$ دێ دەرکنارەکێ ستوونی هەبیت ل $x = 1$.

20 هەکە f نەخشەیەکا رێژەی بیت، ئەوێ بکێماتی دێ دەرکنارەکێ ستوونی هەبیت.

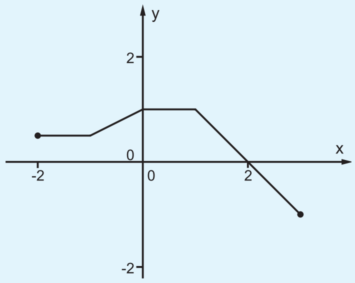
21 نەخشەیا رادەدار دەرکنارێن ستوونی نینە.

22 هەکە نەخشەیا f دەرکنارێ ستوونی هەبیت ل $x = 0$ ئەو دێ نەیا پێناسەکری بیت ل ڤێ خالێ.

23 دوو نەخشەیێن f و g دیاربکە دەمێ $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$ ، بەلێ $\lim_{x\to c}[f(x) - g(x)] \neq 0$

دەربارەی چەمکان

24 رونکرنا نەخشەیا بەرامبەر بکاربینە بۆ وێنەکرنا وێنەیێ رۆنکرنا $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ل ناقبەرا $x=-2$ ، $x=3$



بەشێ 2

پێداچوونا بەشی

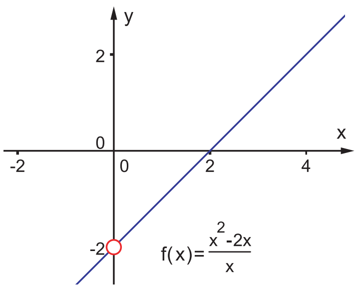
ل هەردوو ڕاهێنانێن 1 و 2 ، دیاربکە ئەرێ شیکارکرنا پرسیارێ پێدڤی بکارئینانا هەژمارکرنا جوداکاری و تەمامکاریێ هەیە، یان یا دشیاندایە شیکاربکەن بکارئینانا جەبری بتنێ. هەکە شیکارکرن یا دشیاندابیت بکارئینانا جەبری، شیکاربکە.

1 درێژیا وی پارچە ڕاستەهێلی ناقبەرا هەردوو خالێن $(1,1)$ و $(3,9)$ ل سەر چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=4x-3$ دگەهینیت هەژماربکە.

2 درێژیا وی کڤانێ سنووردای ب هەردوو خالێن $(1,1)$ و $(3,9)$ ل سەر چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=x^2$ بدۆزەوە.

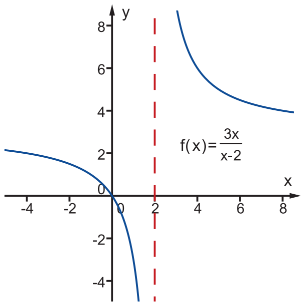
ل هەردوو ڕاهێنانێن 3 و 4 ، وێنەیێ ڕۆنکرنی بکاربینە بۆ هەژمارکرنا ئارمانجێن داخوازکری.

3 $f(x)=\frac{x^2-2x}{x}$



أ $\lim_{x\to 0} f(x)$ ب $\lim_{x\to 1} f(x)$

4 $f(x)=\frac{3x}{x-2}$



أ $\lim_{x\to 2} f(x)$ ب $\lim_{x\to 0} f(x)$

ژ ڕاهێنانا 5 هەتا 15 ، ئارمانجێ داخوازکری هەژماربکە، هەکە یا دشیاندابیت.

5 $\lim_{x\to 4}\sqrt{x+2}$

6 $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$

7 $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

8 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

9 $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{x}$

10 $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^3+8}$

11 $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{4x}{\tan x}$

12 $\lim_{x\to -5}\frac{x^3+125}{x+5}$

13 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

14 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\Delta x\right)-\frac{1}{2}}{\Delta x}$ ل بیرا تەبیت $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

15 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(\pi+\Delta x)+1}{\Delta x}$ ل بیرا تەبیت $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 16 و 17 ، ئارمانجێ داخوازکری هەژماربکە، بۆ زانین $\lim_{x\to c} f(x)=-\frac{3}{4}$ و $\lim_{x\to c} g(x)=\frac{2}{3}$

16 $\lim_{x\to c}\left(f(x)g(x)\right)$

17 $\lim_{x\to c}\left(f(x)+2g(x)\right)$

ژ ڕاهێنانا 18 هەتا 22 ، ئارمانجێ داخوازکری هەژماربکە، یان هۆیێ نەبوونا وێ ڕۆنبکە.

18 ئارمانجێ نەخشەیا $f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$ دەمێ x نێزیکی 3 دبیت ژ ڕەخێ ڕاستێ.

19 $\lim_{x\to 4}[x-1]$ دەمێ (x) مەزنترین ژمارا تەواوبیت یەکسانی x بیت یان کێمتربیت ژ وێ.

20 $\lim_{x\to 2} f(x)$ دەمێ $f(x)=\begin{cases}(x-2)^2 & x\le 2\\ 2-x & x>2\end{cases}$

21 ئارمانجێ نەخشەیا $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x\le 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$ دەمێ x نێزیکی 1 دبیت ژ ڕەخێ ڕاستێ.

22 $\lim_{x\to 1} f(x)$ دەمێ $f(x)=\begin{cases}x^3+1 & x<1\\ \frac{1}{2}(x+1) & x\ge 1\end{cases}$

23 $\lim_{x\to -2} f(x)$ دەمێ $f(x)=\begin{cases}-x^2-4x-2 & x\le -2\\ x^2+4x+6 & x>-2\end{cases}$

ژ ڕاهێنانا 24 هەتا 32 ، بێژە ئەرێ نەخشەیێ خالێن پچاندنێ هەنە. هەکە هەبن وان دیاربکە:

24 $f(x)=[x+3]$

25 $f(x)=\frac{3x^2-x-2}{x-1}$

26 $f(x)=\begin{cases}5-x & x\le 2\\ 2x-1 & x>2\end{cases}$

27 $f(x)=\begin{cases}\frac{3x^2-x-2}{x-1} & x\ne 1\\ 0 & x=1\end{cases}$

28 $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$

29 $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$

30 $f(x)=\frac{3}{x+1}$

31 $f(x)=\frac{x+1}{2x+2}$

32 $f(x)=\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}$

33 بەهایێ c هەژماربکە کو نەخشەیا $f(x)=\begin{cases}x+3 & x\le 2\\ cx+6 & x>2\end{cases}$ خالێن پچاندنێ نەبن.

34 بەهایێ c و بەهایێ b هەژماربکە کو نەخشەیا $f(x)=\begin{cases}x+1 & 1<x<3\\ x^2+bx+c & |x-2|\ge 1\end{cases}$ خالێن پچاندنێ نەبن.

35 سەلمێنراوا بەهایێن ناڤەڕاست بکاربینە دا بسەلمینی کو نەخشەیا $f(x)=2x^2-2x-1$ ڕەگەك ل ناڤبەرا 1 و 2 دا هەیە.

ژ ڕاهێنانا 36 هەتا 39 دەرکنارێن ستوونی دیاربکە هەکە هەبن.

36 $f(x)=1+\frac{2}{x}$

37 $f(x)=\frac{4x}{4-x^2}$

38 $f(x)=\frac{8}{(x-10)^2}$

39 $f(x)=\frac{1}{\sin\pi x}$

40 نەخشەیا $f(x)=\frac{\tan 2x}{x}$ بکاربینە $x\ne 0$.

أ $\lim_{x\to 0} f(x)$ هەژماربکە هەکە هەبیت.

ب ئەرێ تو دشێی پێناسا ڤێ نەخشەیێ $x=0$ دوبارە بنڤیسی، کو نەخشەیە بەردەوام بیت ل ڤێ خالێ؟ بەرسڤا خۆ ڕۆنبکە.

بەشێ 2

بەرهەڤکرن بۆ ئەزموونێ

نەخشەیا $f(x)=\begin{cases}2-x & x\le 1\\ \frac{x}{2}+1 & x>1\end{cases}$ بکاربینە بۆ شیکارکرنا راهێنانان ژ **1** هەتا **4**.

1 بەهایێ $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ چەندە؟

أ $\frac{5}{2}$ ب $\frac{3}{2}$ ج 1 د 0 هـ نینە

2 بەهایێ $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ چەندە؟

أ $\frac{5}{2}$ ب $\frac{3}{2}$ ج 1 د 0 هـ نینە

3 بەهایێ $\lim_{x\to 1} f(x)$ چەندە؟

أ $\frac{5}{2}$ ب $\frac{3}{2}$ ج 1 د 0 هـ نینە

4 بەهایێ $f(1)$ چەندە؟

أ $\frac{5}{2}$ ب $\frac{3}{2}$ ج 1 د 0 هـ نە چو ژ وانن

5 بەهایێ $\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2}$ چەندە؟

أ $-\infty$ ب $+\infty$ ج 1 د $-\frac{1}{2}$ هـ -1

6 بەهایێ $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x}{x}$ چەندە؟

أ $\frac{1}{2}$ ب 1 ج 2 د $\cos 2$ هـ نینە

7 بەهایێ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ چەندە؟

أ $\frac{1}{3}$ ب 1 ج 3 د $\sin 3$ هـ نینە

8 ل کیژ ماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ خالەك یان خالێن پچاندنێ هەنە؟

أ $]0, +\infty[$ ب $]-\infty, 0]$ ج $]1, 2[$ د $]0, 2[$ هـ $[1, +\infty[$

9 کیژ ڤان خالێن ل خوارێ نەخالا پچاندنییە بۆ نەخشەیا $f(x)=\sqrt{x-1}$ ؟

أ $x=-1$ ب $x=-\frac{1}{2}$ ج $x=0$ د $x=\frac{1}{2}$ هـ $x=1$

10 کیژ ڤانێن ل خوارێ نەیا دروستە بۆ وێ چەندێ کو نەخشەیا $f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 1 & x=1\\ -x+3 & 1<x<2\end{cases}$ نەیا پێناسەکرییە.

أ $f(1)$ نەیا پێناسەکرییە ب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ هەبوون هەیە ج $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ هەبوون هەیە

د $\lim_{x\to 1} f(x)$ هەبوون هەیە هـ $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

11 کیژ ڤان خالێن ل خوارێ دبیتە خالا پچاندنێ و شیانا لادانێ نەبیت بۆ نەخشەیا $f(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)^2(x+1)^2(x-3)^2}{x(x-1)(x-2)(x+1)^2(x-3)^3}$

أ $x=-1$ ب $x=0$ ج $x=1$ د $x=2$ هـ $x=3$

12 کیژ ڤانێن ل خوارێ نەیا دروستە بۆ وێ چەندێ کو نەخشەیا $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x & 0\le x<4\\ 2 & x=4\\ -x+7 & 4<x\le 6\\ 1 & 6<x<8\end{cases}$ نەیا پێناسەکرییە.

أ $\lim_{x\to 4} f(x)$ هەبوون هەیە ب $f(4)$ هەبوون هەیە ج $\lim_{x\to 6} f(x)$ هەبوون هەیە

د $\lim_{x\to 8^-} f(x)$ هەبوون هەیە هـ $f(x)$ یا بەردەوامە ل $x=4$

13 کیژ ڤان دبیتە هاوکێشە یا لێکەفتێ نەخشەیا $f(x)=9-x^2$ ل $x=2$ ؟

أ $y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$ ب $y=-4x+13$ ج $y=-4x-3$

د $y=4x-3$ هـ $y=4x+13$

14 نەخشەیێن ل خوارێ د پێناسەکرینە بەهایێ x هەر چەندبیت ژبلی $x=0$ کیژ ڤان نەخشەیێن ل خوارێ دهێتە پێناسەکرن ل $x=0$ دا ببیتە نەخشەیەکا بەردەوام $x=0$؟

أ $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ ب $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ ج $f(x)=\frac{x}{x^2}$

د $f(x)=\frac{\tan x}{x}$ هـ $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$

15 $f(x)=\begin{cases}x^2+4 & x<-1\\ x^3-8 & x\ge -1\end{cases}$

کیژ ڤان بەهایێن a ل خوارێ نەخشەیا f بەردەوام دکەت ل $[-\infty, +\infty]$؟

أ $a=-1$ ب $a=-8$ ج $a=9$

د $a=-10$ هـ a بەهایەك نینە وێ ساخبکەت.

بەشێ

3

Derivative داتاشراو

بەشێ سێیێ

وانە

1-3 داتاشراو و بابەتێ لێکەفتی

2-3 رێسایێن داتاشراوێ

ئەزموونا نیڤا بەشی

3-3 داتاشراوا خۆبەخۆ و داتاشراوێن بلند

4-3 تێکراییێن گوهۆرینێ

پێداچوون

بەرهەڤکرن بۆ ئەزموونێ

وێنەیێ بەرامبەر گەردێن ماددەیێ Paracetamol پاراسیتامۆل دیاردکەت کو ئەو بۆ کێمکرنا ئێشان دهێتە بکارئینان. ئەو ماددەیەکی سوود بەخشە دەمێ برەکێ رێپێدەدت دهێتە بکارئینان، بەلێ کارتێکرنەکا خراب دێ پەیدا کەت هەتا رادەیێ ژەهربوونێ هەکە برێ رێپێدەر بۆ بکارئینانێ بەرچاڤ نەهێتە وەرگرتن. ئێك ژ لێکۆلینان دیارکر کو بتنێ 30% ژ خەلکێ برێ رێپێدەر بکاردئینن. نەخشەیا $D(t)=\frac{750t}{t+12}$ نموونەیەکە بۆ هەژمارتنا وی برێ رێپێدەر (ملگم) بۆ زارۆکان ژ ژیێ 6 سالێ هەتا 12 سالێ، کو t هێمایە بۆ ژیێ زارۆکی ب سالان.

ئەرێ تو یێ ئامادەیی؟

زاراڤ

هەر دەستەواژەیەکا ل ستوونا ڕەخێ ڕاستێ دگەل شرۆڤەکرنا وێ یا گونجایی ل ستوونا ڕەخێ چەپێ گرێدە:

1

1. لارێ ڕاستەهێلی
2. نەخشەیا بەردەوام
3. پچاندنێ شیانا لادانێ هەیە
4. دەرکەنارێ ستوونی
5. $\lim_{x \to c} f(x) = L$

أ. ڕاستەهێلەکی ستوونیە، خالا $(x, f(x))$ ل سەر وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیا f نێزیکی وی دبیت دەمێ بەهایێ x نێزیکی c دبیت.

ب. ڕێژا بەرەڤ پێشڤەچوونا ستوونی بۆ بەرەڤ پێشڤەچوونا ئاسۆیی یا ڕاستەهێلی.

ج. نەخشەیا $f(x)$ نێزیکی ژمارە L دبیت دەمێ x نێزیکی c دبیت.

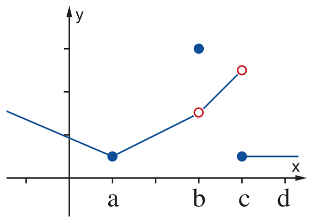
د. نەخشەیەکە دشێن وێنەیێ ڕوونکرنا وی پێ پێنڤیسەکی بکێشن ل سەر کاغەزەکێ بێی سەرێ پێنڤیسی ڕابکەن.

ه. نەخشەیەکە پچاندن د وێنەیێ ڕوونکرنا وێدا نینە.

و. خالەکا پچاندنێیە بۆ نەخشەیێ دشێن ئەوێ لابدەن ب دوبارەکرنا پێناسەیا نەخشەیێ.

هەبوونا ئارمانجان

ژ ڕاهێنانا 2 هەتا 7 ، نەخشەیا f یا وێنەیێ ڕوونکرنا بەرامبەر بکاربینە، دیاربکە ئەرێ ئارمانج هەیە یان نە.



2 $\lim_{x \to d} f(x)$ **3** $\lim_{x \to c^+} f(x)$ **4** $\lim_{x \to c^-} f(x)$

5 $\lim_{x \to c} f(x)$ **6** $\lim_{x \to b} f(x)$ **7** $\lim_{x \to a} f(x)$

نەخشەیا بەردەوام

ژ ڕاهێنانا 8 هەتا 11، نەخشەیا f یا وێنەیێ ڕوونکرنا ل سەری بکاربینە. دیاربکە ئەرێ نەخشەیە بەردەوامە ل خالا دیارکری یان نە.

8 $x = a$ **9** $x = b$ **9** $x = c$ **11** $x = d$

هەژمارکرنا ئارمانجان

ژ ڕاهێنانا 12 هەتا 14، ئارمانجێ هەژماربکە.

12 $\lim_{x \to -4} \sqrt{1-2x}$ **13** $\lim_{x \to -2} \frac{x^2+1}{3x^2-2x+5}$ **14** $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{4x}$

هاوکێشەیا ڕاستەهێلی

ژ ڕاهێنانا 15 و 16، لارێ ڕاستەهێلی د هەردوو خالانڕا دبوریت بینەدەر:

15 $(-2, 3)$ ؛ $(2, -1)$ **16** $(1, -3)$ ؛ $(-2, -1)$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 17 و 18، هاوکێشا وی ڕاستەهێلی لارێ وی پێدایی و د خالا دیارکری ڕاببوریت بنڤیسە:

17 $(1, 2)$ ؛ $-\frac{2}{3}$ **18** $(-2, -5)$؛ $\frac{5}{4}$

1–3

داتاشراو و بابەتێ لێکەفتی

Derivative and the Tangent Problem

ئیسحاق نیوتن 1642–1727

زێدەباری کارکرنا وی ل پێشڤەبرنا هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەماکاریێ، ئیسحاق نیوتن پشکداریا مەزن د فیزیایێ دا کر، ژ وانە یاسایا تاودانا ئەردی، و هەرسێ یاسایێن لڤینێ.

ئارمانج

- هەژمارکرنا لاری لێکەفتی وێنەیێ رووونکرنا نەخشەیێ ل خالەکێ ژ خالێن وێ.
- بکارئینانا پێناسەیا ئارمانجێ بۆ هەژمارکرنا داتاشراوێ نەخشەیێ
- زانینا پەیوەندیێ ل ناڤبەرا بەردەوامیا نەخشەیێ و شیانا داتاشینا (داتاشراوا) وێ.

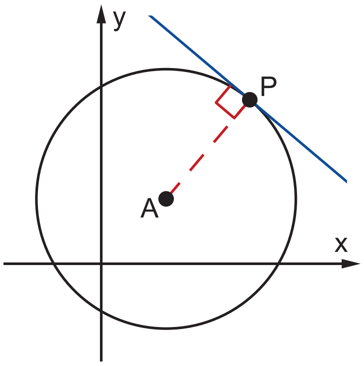
زاراوڤ Vocabulary

رێژەیا دوو جوداهیان	Difference quotient
برِەر	Secant
لێکەفت	Tangent
لاری	Slope
شیانا داتاشراوێ هەیە	Differentiable
داتاشراو	Derivative

بابەتێ لاری

هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەماکاریێ پێشکەفت ب هۆیێ لێکۆلینا چوار بابەتێن سەرەکی، کو زانایێن بیرکاریێ یێن ئەوروپی ل سەدێ هەڤدێ گرنگی پێدان:

1. بابەتێ لێکەفتی
2. بابەتێ لەزێ و تاودانێ
3. بابەتێ مەزنترین بەها و بچووکترین بەها.
4. بابەتێ رووبەری.

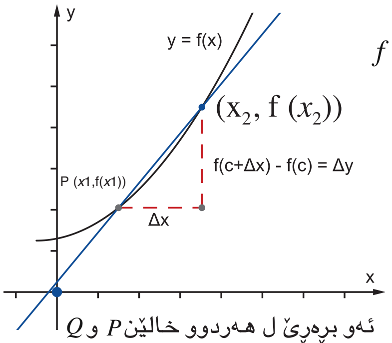


هەر بابەتەك ژ ئەڤان بابەتان چەمکێ ئارمانجێ بخۆڤەدگریت و پێ هەرئێکی ژ وان ئەم دشێین بچینە دناڤ هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەماکاریێ دا.

ڤەدیتن

دیارکرنا لێکەفتی: وێنەیێ رووونکرنێ بۆ نەخشەیا $f(x)=2x^3-4x^2+3x-5$ بکێشە. و ل سەر وی رووتەختێ ئەڤان راستەهێلان وێنەبکە $y=x-5$ و $y=2x-5$ و $y=3x-5$. کیژ ئەڤان راستەهێلان وەك لێکەفتێ وێنەیێ رووونکرنێ ل خالا $(0, -5)$ دیاردبیت، بۆچوونا خۆ روونبکە.

ل بەشێ پێشتر مە بەحسێ بابەتێ لێکەفتی کربوو، و ئەم گەهشتینە ئەوێ چەندێ کو ئەڤ بابەتە ڤەدگەرێت بۆ هەژمارکرنا لارێ لێکەفتی. ژ بۆ هەژمارکرنا لێکەفتێ نەخشەیا f ل خالا Pل سەر چەماوەیێ وێ نەخشەیێ، تو دشێی بەهایەکی نێزیککری بۆ لارێ ڤی لێکەفتێ هەژماربکەی بکارئینانا راستەهێلەکی کو د خالا لێکەفتنێ Pرا و خالەکا دی را ل سەر وێنەیێ رووونکرنێ ببوریت. هەروەك دیار ل وێنەیێ بەرامبەر.



ئەو برِەرِێ ل هەردوو خالێن P و Q رادبۆریت.

دبێژنە راستەهێلێ وەك ڤی برِەرێ وێنەیێ رووونکرنا نەخشەی هەکە $P((x_1), f(x_1))$ خالا لێکەفتنێ بیت $Q(x_2, f(x_2))$خالەکا دی بیت ل سەر وێنەیێ رووونکرنا نەخشەی، لارێ وێ راستەهێلی د ڤان هەردوو خالانرا دبۆریت دێ بیتە:

$$m_{sec}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\triangle y}{\triangle x} \quad \text{کو} \quad \triangle y=f(x_2)-f(x_1) \text{ و } \triangle x=x_2-x_1$$

دبێژنە ڕێژەیا $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ **ڕێژەیا هەردوو جوداهیان** Δx دبیتە گوهۆڕین ل بەهایێن x و Δy دبیتە گوهۆڕین ل بەهایێن ئەوێ پەیدادبیت ژ ئەنجامێ گوهۆڕینا بەهایێ . تو دشێی ڤێ ڕێژێ بکاربینی بۆ ب دەستکەفتنا بەهایەکێ نێزیککری بۆ لارێ لێکەفتی. و هووریا ڤێ بەهایێ زێدەدبیت هەر چەندە خالا Q نێزیک بیت بۆ خالا P .

پێناسەیا لارێ نەخشەیێ ل $x=c$

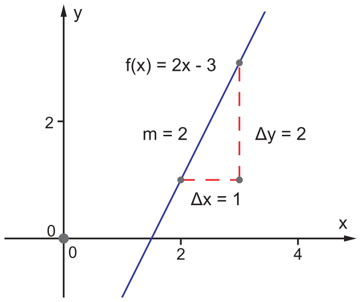
هەکە f نەخشەیەك بیت و ئارمانجێ ل خوارێ هەبیت

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=m$$

دێ لێکەفتێ وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیێ ل خالا $P(c,f(c))$ بیتە ئەو ڕاستەهێلێ لارێ وێ m و د خالا P ڕابووریت. دبێژنە لارێ لێکەفتێ چەماوەیێ نەخشەیێ ل خالا $P(c,f(c))$ لارێ نەخشەیێ ل $x=c$.

نموونــــە 1

لارێ نەخشەیا هێلی



لارێ نەخشەیا هێلا $f(x)=2x-3$ ل $x=2$ هەژماربکە.

ژ بۆ هەژمارکرنا لارێ نەخشەیێ ل $x=2$ ، تو دشێی پێناسا ڤێ لارێ بکاربینی.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[2(2+\Delta x)-3]-[2(2)-3]}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+2\Delta x-3-4+3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}$$
$$=2$$

ڤێجا، لارێ نەخشەیا $f(x)=2x-3$ ل $x=2$ دبیتە $m=2$.

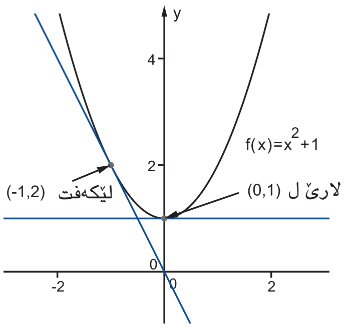
خالا چاڤدێریێ

1. لارێ نەخشەیا هێلیێ $f(x)=-3x-5$ ل $x=-3$ هەژماربکە.

چونکی وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیا هێلی دبیتە ڕاستەهێلەك، لەوا لارێ نەخشەیا هێلی ل هەر خالەکێ ژ خالێن چەماوەیێ هەمان بەها هەیە. بەلێ ئەڤ تشتە دێ جودابیت هەکە نەخشە نەیا هێلی بیت.

نموونــــە 2

لارێ نەخشەیە نەهێلی



لارێ f ل $x=c$ دبیتە
$m=2c$

لارێ نەخشەیا دووجایی $f(x)=x^2+1$ ل $x=c$ هەژماربکە پاشی ل $x=0$ و ل $x=-1$ هەژماربکە.

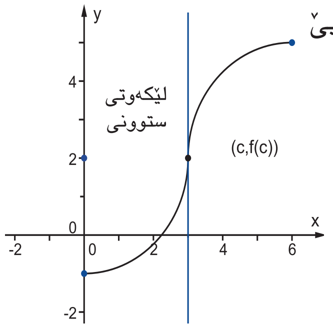
هەکە $(c,f(c))$ خالەك بیت ل سەر وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیا f، لارێ لێکەفتی ل ڤێ خالێ دێ بیتە:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[(c+\Delta x)^2+1\right]-\left[c^2+1\right]}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c^2+2c\Delta x+(\Delta x)^2+1-c^2-1}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2c\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2c+\Delta x)$$
$$=2c$$

ب ڤی شێوەی لارێ نەخشەیا f ل $x=c$ دبیتە $m=2c$ کو خالا $(c,\ f(c))$ل سەر وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیێ هەر چەند بیت، و ژ ڤێ دەرئەنجام دکەین کو لاری ل$x=0$ دبیتە$m=2(0)=0$ و ل$x=-1$ دبیتە $m=2(-1)=-2$

خالا چاڤدێریێ

2. لارێ نەخشەیا دووجای $f(x)=-2x^2-3$ ل $x=1$ و ل $x=-1$ هەژماربکە.



پێناسا پێشتر لارێ نەخشەیەکێ بخۆڤە ناگریت هەکە ل خالەکا وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیێ لێکەفتیێ ستوونیێ بیت. ل ڤی باری تو دشێی ڤێ پێناسێ بکاربینی، هەکە نەخشەیا بەردەوام بیت ل$x=c$ و :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=+\infty$$

یان

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=-\infty$$

دێ ڕاستەهێلی ستوونی $x=c$ **بیتە لێکەفتیێ ستوونی** بۆ نەخشەیێ ل خالا$(c,\ f(c))$ ، و لارێ نەخشەیێ ل وێ خالێ پێناسە نەکرییە. ل وێنەیێ بەرامبەر دیاردبیت نەخشەیێ لێکەفتیێ ستوونی هەیە ل $x=3$

پێناسا داتاشراوێ

دبێژنە نەخشەیا f ئەوێ **شیانا داتاشراوێ** هەیە ل $x=c$ هەکە لارێ وێ یێ پێناسەکری بیت ل ڤێ خالێ.

نوکە ئەم دشێین داتاشراوێ نەخشەیێ پێناسە بکەین:

هەکە f نەخشەیەك بیت شیانا داتاشراوێ هەبیت ل هەموو خالێن دبوارێ وێ دا، تو دشێی هەر بەهایەکی c د بوارێ نەخشێ دا دگەل لارێ وێ ل $x=c$ گرێدەی. ئەڤ نەخشە ب شێوەیێ f' دئێتە نڤیسین و دبێژنێ داتاشراوێ نەخشەیا f.

ئەوێن د بوارێ بیرکاریێ دا کاردکەن گەلەك هێمایان بکاردئینن بۆ دەربڕینا بەهایێ داتاشراوێ f' وەك: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ و $f'(x)$ ، $\frac{df}{dx}$، $\frac{dy}{dx}$، $\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$، $D_x(y)$

نموونە 3

هەژمارکرنا داتاشراوێ نەخشەیێ بکارئینانا پێناسێ:

داتاشراوێ نەخشەیا $f(x)=\frac{2}{x}$ هەژماربکە

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2}{x+\Delta x}-\frac{2}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2x-2(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(x)(x+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{x(x+\Delta x)}=\frac{-2}{x^2}$$

خالا چاڤدێریێ

3. داتاشراوێ نەخشەیا $f(x)=x^3$ هەژماربکە

بەردەوامی و شیانا داتاشراوێ

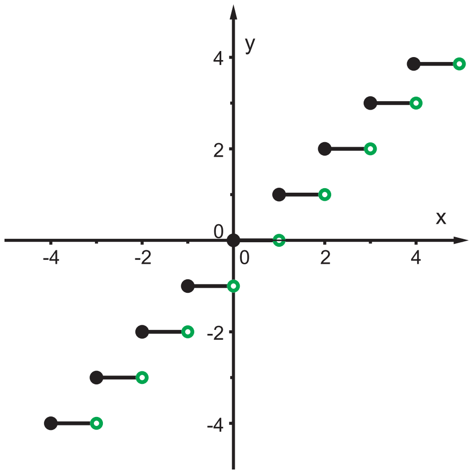
مە دیت کو لارێ نەخشەیێ ل$x=c$ دبیتە ئارمانجێ لارێ وی برِەرێ د خالا$P(c,f(c))$ و د خالەکا نێزیکی وێرا وەك $Q(x,f(x))$ دبوریت دەمێ Q نێزیکی P دبیت، ئەڤە رێکێ ددەتە مە ئەم بنڤیسین $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ب مەرجەکی ئەڤ ئارمانجە هەبیت.

هەکە نەخشەیا f نەیا بەردەوام بیت ل خالا $(c, f(c))$
ئەوێ شیانا داتاشراوێ ل وێ خالێ نابیت.
وێنەیێ بەرامبەر وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیا $f(x)=[x]$
دیاردکەت کو هەر ژمارەیەکا ڕاستی x دگەل
ژمارەیەکا تەواوە نە زێدتر ژ وێ دهێتە گرێدان. یا
دیارە کو ئەو نەخشە نەیا بەردەوامە ل $x=0$. و ئەوێ
شیانا داتاشراوێ نینە ل وێ خالێ چونکی:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x-0}=0$$

و $$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{-1-0}{x-0}=+\infty$$

ڤێجا $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ هەبوون نینە

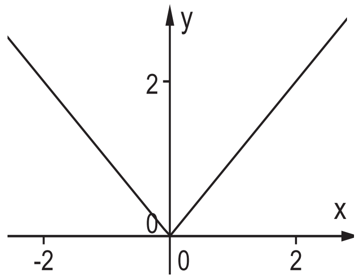


نەخشەیا $f(x)=[x]$ شیانا
داتاشراوێ نینە ل خالا $(0,f(0))$
چونکی ل وێ خالێ نەیا بەردەوامە

سەلمێنراوا 3–1 **شیانا داتاشراوێ بەردەوامیێ دسەپینیت**

هەکە نەخشەیا f شیانا داتاشراوێ هەبیت ل خالا $(c, f(c))$، ئەو دێیە بەردەوام بیت ل وێ خالێ.

ئەرێ بەروڤاژیا سەلمینراوا ل سەری یا دروستە؟ ڕامانا وێ ئەوە ئەرێ بەردەوامیا نەخشێ ل خالەکا ل سەر وێنەیێ ڕوونکرنا وێ شیانا داتاشراوێ وێ نەخشێ ل ئەوێ خالێ دسەپینیت؟
بەرسڤا وێ دبیتە نەخێر. وەك دیاردبیت ل نەخشەیا
ڕووتی: $f(x)=|x|$.



$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x-0}=-1$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x-0}=1$$

ئەڤە دسەلمینیت کو $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ نینە
و نەخشەیێ لاری نینە ل $x=0$.

1–3 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا 1 هەتا 3 ، لارێ نەخشەیێ ل خالا دیارکری بینەدەر:

1 $f(x)=3-2x$ ، $(-1,5)$ **2** $f(x)=x^2-4$ ، $(1,-3)$ **3** $f(t)=3t-t^2$ ، $(0,0)$

ژ ڕاهێنانا 4 هەتا 11 ، داتاشراوێ هەر نەخشەیەکێ بکارئینانا ئارمانجان هەژماربکە.

4 $f(x)=3$ **5** $f(x)=3x+2$ **6** $f(x)=2x^2+x-1$ **7** $f(x)=x^3+x^2$

8 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ **9** $f(x)=\sqrt{x+1}$ **10** $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}$ **11** $f(x)=9-\frac{1}{2}x$

ژ ڕاهێنانا 12 هەتا 15 ، هاوکێشەیا لێکەفتی نەخشەیێ ل خالا دیارکری هەژماربکە:

12 $f(x)=x^2+1$ ؛ $(2,5)$ **13** $f(x)=x^3$ ؛ $(2,8)$

14 $f(x)=\sqrt{x-1}$ ؛ $(5,2)$ **15** $f(x)=x+\frac{4}{x}$ ؛ $(4,5)$

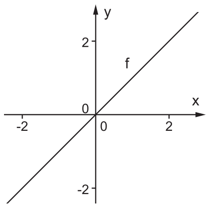
ل هەردوو ڕاهێنانێن 16 و 17 ، هاوکێشەیا لێکەفتیێ نەخشەیێ ئەوێ تەریب دگەل ئەوی ڕاستەهێلی هاوکێشەیا وی دیارکری هەژماربکە:

16 $f(x)=x^3+2$ ؛ $3x-y+1=0$

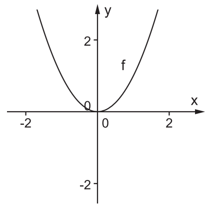
17 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ؛ $x+2y-6=0$

ژ ڕاهێنانا 18 هەتا 21 ، وێنەیێن ڕوونکرنا 4 نەخشەیان و وێنەیێن ڕوونکرنا داتاشراوێن وان یێن هاتینە وێنەکرن. وێنەیێ ڕوونکرنا داتاشراوێ هەر نەخشەیەکا بۆ وێ ڤەدگەرێت دیاربکە.

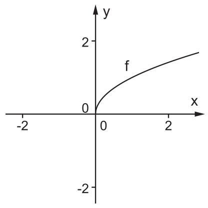
18



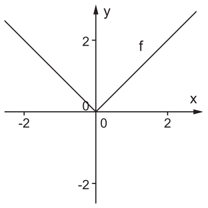
19



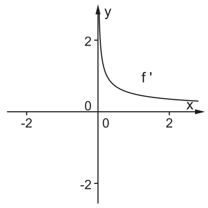
20



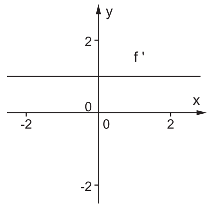
21



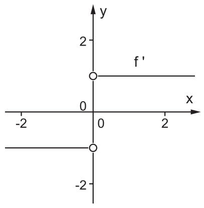
أ



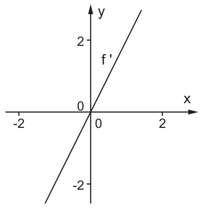
ب



ج



د



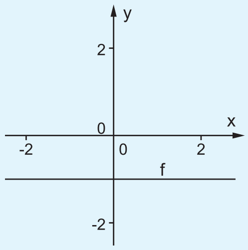
22 لێکەفتیێ نەخشەیا g ل خالا $(5,2)$ د خالا $(9,0)$ ڕادبۆریت $g(5)$ و $g'(5)$ هەژماربکە

23 لێکەفتیێ نەخشەیا h ل خالا $(-1,4)$ د خالا $(3,6)$ ڕادبۆریت $h(-1)$ و $h'(-1)$ هەژماربکە.

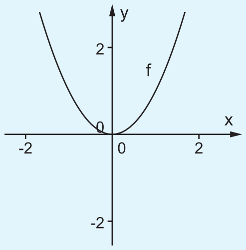
دەربارەی چەمکان

ل هەردوو ڕاهێنانێن 24 و 25 ، وێنەیێ ڕوونکرنا داتاشراوێ نەخشەیێ بکێشە، و ڕۆنبکە چەوا تە وێنە کێشا.

24



25



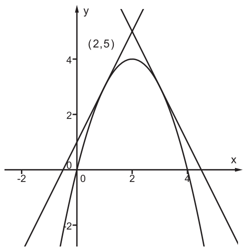
26 نەخشەیەکێ وێنەبکە هەموو بەهایێن داتاشراوێ وێ نە دمووجەب بن.

ل هەردوو ڕاهێنانێن 27 هەتا 28 ئارمانجا هاتیە نڤیسین $f'(c)$ دنوێنت، $f(x)$ و c دیاربکە:

27 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[5-3(1+\Delta x)]-2}{\Delta x}$

28 $\lim_{x\to 6}\frac{-(6+\Delta x)^2+36}{\Delta x}$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 29 و 30 ، نەخشەیا f ئەوا مەرجێن دیارکری ساخدکەت دیاربکە، پاشی وێنەیێ ڕوونکرنا وێ وێنەبکە:



29 $f(0)=2$ ؛ $f'(x)=-3$ کاتێك $-\infty<x<\infty$.

30 $f(0)=4$ ؛ $f'(0)=0$ ؛ $f'(x)<0$ دەمێ $x<0$ ؛ $f'(x)>0$ دەمێ $x>0$.

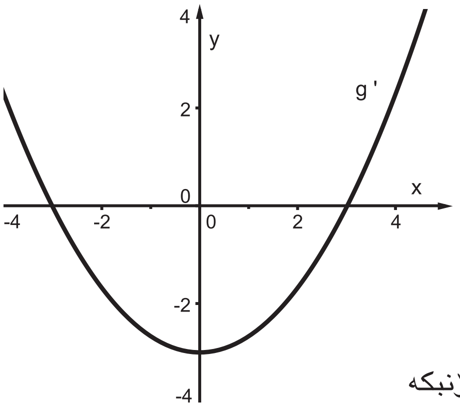
31 هاوکێشەیێن هەردوو لێکەفتێن نەخشیێ $f(x) = -x(x-4)$ ل وێنەیێ بەرامبەر هەژماربکە.

32 مگرتی $f'(c)=3$ ، $f'(-c)$ هەژماربکە:

أ هەکە f نەخشەیەکا کت بیت.

ب هەکە f نەخشەیەکا جووت بیت.

33 شێوەیێ بەرامبەر وێنەیێ ڕوونکرنا داتاشراویێ g' بۆ نەخشەیا g دیاردکەت.



أ $g'(0)$ هەژماربکە.

ب $g'(3)$ هەژماربکە.

ج چ دەرئەنجام دکەی دەربارەیی وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیا g هەکە بزانی کو $g'(1)=-\frac{8}{3}$

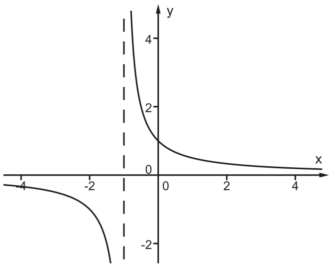
د چ دەرئەنجام دکەی دەربارەیی وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیا g هەکە بزانی کو $g'(-4)=\frac{7}{3}$ ؟

هـ ئەرێ $g(6)-g(4)$ یا مووجەبە یان سالبە؟ ئەوێ ڕۆنبکە

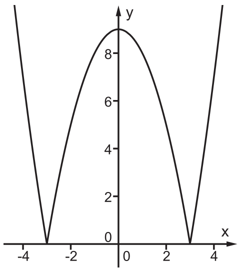
و ئەرێ تو دشێی $g(2)$ هەژماربکەی؟ ئەوێ ڕۆنبکە.

ژ ڕاهێنانا 34 هەتا 36 ، بەهایێن x دیاربکە دەمێ نەخشەیێ شیانا داتاشراویێ هەبیت.

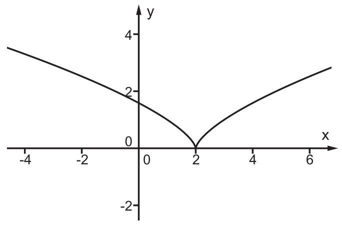
34 $f(x)=\frac{1}{x+1}$



35 $f(x)=\left|x^2-9\right|$



36 $f(x)=(x-2)^{\frac{2}{3}}$



ژ ڕاهێنانا 37 هەتا 39، دیاربکە هەکە دەستەواژەیا دروست بیت هۆیێ وێ ڕۆنبکە، و هەکە نەیا دروست بیت ب دژە نموونەیەکێ بسەلمینە.

37 لارێ نەخشەیا f ئەوا شیانا داتاشراویێ هەبیت ل خالا $(2,f(2))$ دبیتە $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

38 هەر نەخشەیەك یە بەردەوام بیت ل خالەکێ، دێ ئەوێ شیانا داتاشراویێ ل ئەوێ خالێ هەبیت.

39 هەکە نەخشەیەکێ شیانا داتاشراویێ ل خالەکێ هەبیت، دێ ئەو یە بەردەوام بیت ل وێ خالێ.

40 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ ڕۆنبکە کو f یە بەردەوامە

و شیانا داتاشراویێ نینە $x=0$، د دەمەکیدا g شیانا داتاشراویێ هەیە ل وێ خالێ. $g'(0)$ هەژماربکە.

2-3

ڕێسایێن داتاشراویێ
Differentiation Rules

ئارمانج
- هەژمارکرنا داتاشراوێن نەخشەیێن بنەڕەت و بکارئینانا وان.
- دیارکرنا ڕێسایێن داتاشراویێ و بکارئینانا وان.

داتاشراوێن نەخشەیێن بنەڕەت

ل وانەیا پێشتر تو فێری ڕامانا داتاشراویێ بوویی و تە ئارمانج بکارئینانێن بۆ هەژمارکرنا داتاشراوێن هندەك نەخشەیێن سادە. بەلێ ئەڤ ڕێکە نەیا ساناهییە بۆ زۆربەی نەخشەیان، لەوا بیرکاری ناسان پەنابرنا ڤەدیتنا ڕێسایان بۆ هەژمارکرنا داتاشراوان. ئەڤ ڕێکە پشتبەست دبیت ب وێ چەندێ کو پتریا نەخشەیان پەیدابن ژ ئەنجامێ کۆمکرن و لێدەرکرن و لێکدان و دابەشکرن و ئاوێتەکرنا نەخشەیێن بنەڕەت. و زانینا داتاشراوێن نەخشەیێن بنەڕەت و ڕێسایێن بکاردئینن بۆ داتاشراوکرنا وان هاریکاریێ دکەن بۆ هەژمارکرنا داتاشراوێن پتریا نەخشەیان.

ئەڤ خشتەیێ ل خوارێ پۆختەیێ ڕێسایێن داتاشراوێن نەخشەیێن بنەڕەت دیار دکەت:

خشتەیێ داتاشراوێن نەخشەیێن بنەڕەت

نەخشە	داتاشراو
$f(x)=c$ دەمێ c ژمارەکا ڕاستی بیت	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^n$ دەمێ $n\in\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\frac{1}{x}\ ;x\neq 0$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$

نموونە 1 بکارئینانا داتاشراوێن بنەڕەت

ڤی خشتەی تەمامبکە:

نەخشە	داتاشراوێ وێ
$f(x)=x^5$	
$f(x)=\sqrt[3]{x}$	
$f(x)=\frac{1}{x^3}$	

شیكار

نەخشە	داتاشراو
$f(x)=x^5$	$f'(x)=5x^4$
$f(x)=\sqrt[3]{x}$	$f'(x)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$f(x)=\frac{1}{x^3}$	$f'(x)=\left(x^{-3}\right)'=-3x^{-4}=\frac{-3}{x^4}$

خالا چاڤدێریێ

1 ڤی خشتەی تەمامبکە

نەخشە	داتاشراو
$f(x)=x^{16}$	
$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$	
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	

ڕێسایێن داتاشراوێ

سەلمینراوا 3–2 ڕێسایێن لێکدان دگەل نەگۆڕی

هەکە f شیانا داتاشراوێ هەبیت و c ژمارەکا ڕاستی بیت، دێ cf شیانا داتاشراوێ هەبیت و:

$$[cf(x)]'=cf'(x)$$

سەلمینراوا 3–3 ڕێسایێن سەرجەم و جوداهیێ

سەرجەم یان جوداهیا دوو نەخشەیێن شیانێن داتاشراوێ هەبن دبیتە نەخشەیەك ئەوێ شیانا داتاشراوێ هەیە و:

$$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x) \qquad [f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$$

نوکە ئەم دشێین شێوەیەکێ گشتی بۆ داتاشراوێ نەخشەیەکا ڕادەدار دیاربکەین. سەلماندنا سەلمینراوا ل خوارێ دبیتە نموونەیەك بۆ چاوانیا بکارئینانا داتاشراوێن بنەڕەت و ڕێسایێن داتاشراوێ بۆ هەژمارکرنا داتاشراوێ نەخشەیەکێ.

سەلمینراوا 3–4 داتاشراوێ نەخشەیا ڕادەدار

هەکە

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

دێ

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+2a_2x+a_1$$

سەلماندن

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x)=\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right)'$$

$$=\left(a_n x^n\right)' + \left(a_{n-1}x^{n-1}\right)' + \ldots + \left(a_1 x\right)' + \left(a_0\right)'$$ ڕێسایا سەرجەمی

$$= a_n\left(x^n\right)' + a_{n-1}\left(x^{n-1}\right)' + \ldots + a_1\left(x\right)' + \left(a_0\right)'$$ ڕێسایا لێکدان دگەل نەگۆڕی

$$= a_n(nx^{n-1}) + a_{n-1}\left((n-1)x^{n-2}\right) + \ldots + a_1(1) + 0$$ داتاشراوێن بنەڕەت

$$= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1$$ سادەکرن

نموونـــــە 2 بکارئینانا ڤانان د داتاشراوێ دا

ڤی خشتەیی تەمامبکە.

نەخشە	ڕێکخستنا نەخشەیێ	داتاشراو	داتاشراوێ سادەکری
$f(x)=\frac{5}{2x^3}$			
$f(x)=\frac{5}{(2x)^3}$			
$f(x)=\frac{7}{3x^{-2}}$			
$f(x)=\frac{7}{(3x)^{-2}}$			
$f(x)=\frac{4}{x\sqrt{x}}$			

شیکار

نەخشە	ڕێکخستنا نەخشەیێ	داتاشراو	داتاشراوێ سادەکری
$f(x)=\frac{5}{2x^3}$	$f(x)=\frac{5}{2}\left(x^{-3}\right)$	$f'(x)=\frac{5}{2}\left(-3x^{-4}\right)$	$f'(x)=\frac{-15}{2x^4}$
$f(x)=\frac{5}{(2x)^3}$	$f(x)=\frac{5}{8}\left(x^{-3}\right)$	$f'(x)=\frac{5}{8}\left(-3x^{-4}\right)$	$f'(x)=\frac{-15}{8x^4}$
$f(x)=\frac{7}{3x^{-2}}$	$f(x)=\frac{7}{3}\left(x^2\right)$	$f'(x)=\frac{7}{3}(2x)$	$f'(x)=\frac{14}{3}x$
$f(x)=\frac{7}{(3x)^{-2}}$	$f(x)=63\left(x^2\right)$	$f'(x)=63(2x)$	$f'(x)=126x$
$f(x)=\frac{4}{x\sqrt{x}}$	$f(x)=4\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$	$f'(x)=4\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^{-\frac{3}{2}-1}\right)$	$f'(x)=-6\left(x^{-\frac{5}{2}}\right)=\frac{-6}{x^2\sqrt{x}}$

خاڵا چاڤدێریی 2. ڤی خشتەیی تەمامبکە:

نەخشە	ڕێکخستنا نەخشەی	داتاشراو	داتاشراوێ سادەکری
$f(x)=\frac{-2}{3x^5}$			
$f(x)=\frac{-5}{(3x)^2}$			
$f(x)=\frac{9}{5x^{-3}}$			
$f(x)=\frac{7}{(2x)^{-5}}$			

نموونە 3

بکارئینانا ڕێسایێن داتاشراوێ و داتاشراوێن بنەڕەت.

ڤی خشتەیی تەمامبکە.

نەخشە	داتاشراو
$f(x)=x^3-4x+5$	
$f(x)=-\frac{x^4}{2}+3x^3-2x$	
$f(x)=\frac{\sin x}{2}$	
$f(x)=x+\cos x$	

شیکار

نەخشە	داتاشراو
$f(x)=x^3-4x+5$	$f'(x)=\left(x^3-4x+5\right)'=\left(x^3\right)'-(4x)'+(5)'=3x^2-4$
$f(x)=-\frac{x^4}{2}+3x^3-2x$	$f'(x)=\left(-\frac{x^4}{2}+3x^3-2x\right)'=\left(-\frac{x^4}{2}\right)'+\left(3x^3\right)'-(2x)'$ $=-2x^3+9x^2-2$
$f(x)=\frac{\sin x}{2}$	$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{2}\right)'=\left(\frac{1}{2}\sin x\right)'=\frac{1}{2}\cos x$
$f(x)=x+\cos x$	$f(x))'=(x+\cos x)'=(x)'+(\cos x)'=1-\sin x$

خاڵا چاڤدێریی 3. ڤی خشتەیی تەمامبکە:

نەخشە	داتاشراو
$f(x)=-2x^5+3x^3+5x^2$	
$f(x)=-\frac{x^5}{5}-7x^3+8$	
$f(x)=\frac{\tan x}{2}-\frac{1}{2}\sin x$	
$f(x)=\frac{1}{2}x-\cos x$	

سەلمینراوا 3–5 ڕێسایا ئەنجامێ لێکدانێ

ئەنجامێ لێکدانا دوو نەخشەیێن شیانێن داتاشراوی هەبن دبیتە نەخشەیەك ئەوی شیانا داتاشراوی هەیە و: $\left[f(x)g(x)\right]' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

سەلمینراوا 3–6 ڕێسایا ئەنجامێ دابەشکرنێ

هەکە f و g دوو نەخشەبن و شیانێن داتاشراوی هەبن، دێ نەخشەیێ $\frac{f}{g}$ شیانا داتاشراوی هەبیت کو $g(x) \neq 0$. و:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

نموونـــــه 4

بکارئینانا ڕێسایێن داتاشراوی و داتاشراوێن بنەڕەت.

داتاشراوی هەر نەخشەیەکی هەژماربکە:

1 $f(x) = 3x^2 \sin x$ 2 $f(x) = \frac{5x-2}{x^2+1}$

شیکار

1 $$f'(x) = \left[3x^2 \sin x\right]' = 3x^2\left[\sin x\right]' + \sin x\left[3x^2\right]'$$
$$= 3x^2 \cos x + (\sin x)(6x) = 3x^2 \cos x + 6x \sin x$$

2 $$f'(x) = \left(\frac{5x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1)(5x-2)' - (5x-2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{(x^2+1)(5) - (5x-2)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-5x^2+4x+5}{(x^2+1)^2}$$

خالا چاقدێریی

4. داتاشراوی هەر نەخشەیەکی هەژماربکە.

1 $f(x) = -2x^3 \cos x$ 2 $f(x) = \frac{3x-7}{x^2-1}$

نموونـــــه 5

بکارئینانا ڕێسایێن داتاشراوێن بنەڕەت.

ڕێسایا داتاشراوی نەخشەیا $f(x) = \tan x$ دیاربکە.

شیکار

$$f'(x) = \left[\tan x\right]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\cos)\left[\sin x\right]' - (\sin x)\left[\cos x\right]'}{(\cos x)^2}$$
$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

خالا چاقدێریی

5. داتاشراوی نەخشەیا $f(x) = \frac{1}{\tan x}$ هەژماربکە.

سەلمینراوا 3-7 ڕێسایا نەخشەیا ئاوێتە

هەکە f نەخشەیەك بیت پێ u و شیانا داتاشراوێ هەبیت، و $u=g(x)$ نەخشەیەك بیت پێ x وشیانا داتاشراوێ هەبیت، دێ نەخشەیا $y=f(g(x))$ شیانا داتاشراوێ هەبیت و :

$$\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))g'(x)$$

سەلماندن

$$\left(f(g(x))\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}=\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(g(x_2))-f(g(x_1))}{x_2-x_1}$$

دەمێ $x_1=x$ و $x_2=x_1+h$

$$=\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(g(x_2))-f(g(x_1))}{g(x_2)-g(x_1)}\cdot\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$=\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(g(x_2))-f(g(x_1))}{g(x_2)-g(x_1)}\lim_{x_2\to x_1}\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$$

دێ $g(x_2)$ نێزیکی $g(x_1)$ بیت دەمێ x_2 نێزیکی x_1 دبیت چونکی g نەخشەیەکا بەردەوامە.

$$=\lim_{g(x_2)\to g(x_1)}\frac{f(g(x_2))-f(g(x_1))}{g(x_2)-g(x_1)}\lim_{x_2\to x_1}\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$=f'(g(x))g'(x)$$

چێدبیت تو تووشی زەحمەتێ بی بۆ دیارکرنا وان نەخشەیان ئەوێن نەخشەیا ئاوێتە ژ وان پێکدئینی. ئەڤ نموونەیا ل خوارێ وێ چەندێ ڕۆندکەت.

نموونـــە 6

بکارئینانا ڕێسایێن داتاشراوێ و داتاشراوێن بنەڕەت.

ڤی خشتەیی تەمامبکە:

$y=f(g(x))$		
$y=\frac{1}{x+1}$		
$y=\sin 2x$		
$y=\sqrt{3x^2-x+1}$		
$y=\tan^2 x$		

شیکار

$y=f(g(x))$	$u=g(x)$	$y=f(u)$
$y=\frac{1}{x+1}$	$u=x+1$	$y=\frac{1}{u}$
$y=\sin 2x$	$u=2x$	$y=\sin u$
$y=\sqrt{3x^2-x+1}$	$u=3x^2-x+1$	$y=\sqrt{u}$
$y=\tan^2 x$	$u=\tan x$	$y=u^2$

خالا چاڤدێریێ

.6 ڤی خشتەیی تەمامبکە:

$y=f(u)$	$u=g(x)$	$y=f(g(x))$
		$y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$
		$y=\cos\pi x$
		$y=\sqrt{4x^5-5x^4}$
		$y=(1+\tan x)^2$

نموونـــــە 7

داتاشراویێ نەخشەیا ئاویتە

داتاشراویێ نەخشەیا $y=(x^2+1)^3$ هەژماربکە.

شیکار

ل دووڤ نموونەیا ل سەری تو دشێی ڤی نەخشەیێ ئاوێتە بکە وەک ل خواریێ دیاردبیت:

$y=u^3$ و $u=x^2+1$.

$$y'(x)=y'(u)u'(x)=(3u^2)(2x)=3(x^2+1)^2(2x)=6x(x^2+1)^2$$

خالا چاڤدێریێ

.7 داتاشراویێ نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ هەژماربکە.

2–3 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا 1 هەتا 11 ، داتاشراویێ هەر نەخشەیەکێ بینەدەر:

1. $y=8$
2. $f(x)=x^6$
3. $f(x)=\frac{1}{x^7}$
4. $f(x)=\sqrt[5]{x}$
5. $f(x)=3x-1$
6. $f(x)=-2x^2+3x-6$
7. $f(x)=2x^3-x^2+3x$
8. $f(\theta)=\frac{\pi}{2}\sin\theta-\cos\theta$
9. $f(x)=x^2-\frac{1}{2}\cos x$
10. $f(x)=\frac{1}{x}-3\sin x$
11. $f(x)=\frac{5}{(2x)^3}+2\cos x$

ژ ڕاهێنانا 12 هەتا 15 ، خشتەیی تەمامبکە

	نەخشە	ڕێکخستنا نەخشەیێ	داتاشراو	داتاشراوێ سادەکری
12	$f(x)=\frac{5}{2x^2}$			
13	$f(x)=\frac{\pi}{(3x)^2}$			
14	$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$			
15	$f(x)=\frac{4}{x^{-3}}$			

ژ ڕاهێنانا 16 هەتا 25 ، داتاشراوێ نەخشەیێ بینەدەر:

16 $f(x)=x^2-5-3x^{-2}$

17 $f(t)=t^2-\frac{4}{t^3}$

18 $f(x)=\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}$

19 $f(x)=x(x^2+1)$

20 $f(x)=\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}$

21 $f(t)=t^{\frac{4}{5}}-t^{\frac{2}{3}}$

22 $f(x)=(x^2+4)\sqrt{x}$

23 $f(x)=x^3\cos x$

24 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$

25 $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$

ژ ڕاهێنانا 26 هەتا 29 ، خشتەیی تەمامبکە:

	$y=f(g(x))$	$u=g(x)$	$y=f(u)$
26	$y=(6x-5)^4$		
27	$y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$		
28	$y=3\tan\left(\pi x^2\right)$		
29	$y=\cos\frac{3x}{2}$		

ژ ڕاهێنانا 30 هەتا 50 ، داتاشراوێ نەخشەیێ بینەدەر:

30 $f(x)=3(4-9x)^4$

31 $f(t)=\sqrt{1-t}$

32 $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

33 $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x+2}}$

34 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

35 $f(t)=\sqrt{\frac{1}{t^2-2}}$

36 $f(x)=\left(\frac{x+5}{x^2+2}\right)^2$

37 $f(x)=\left(\frac{3x^2-2}{2x+3}\right)$

38 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$

41 $f(x)=\ln\left(x\sqrt{x^2-1}\right)$ **40** $f(x)=x\ln x$ **39** $f(x)=\ln x^2$

44 $f(x)=\ln\sqrt{2+\cos^2 x}$ **43** $f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2}$ **42** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

47 $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right)$ **46** $f(x)=x^2e^{-x}$ **45** $f(x)=e^{-x^2}$

50 $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$ **49** $f(x)=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$ **48** $f(x)=\ln e^x$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 51 و 52 ، هاوکێشەیا لێکەفتێ نەخشەیێ ل خالا دیارکری بینەدەر:

51 $f(x)=x^4-3x^2+2$ ؛ $(1,0)$

52 $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$ ؛ $(1,\ 2)$

ژ ڕاهێنانا 53 هەتا 55 ، وان خالان دیاربکە (هەکە هەبن) ئەوێن لێکەفتێ وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیێ لنك وان یێ ئاسۆیی بیت.

53 $f(x)=x^4-8x^2+2$ **54** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

55 $f(x)=x+\sin x$ دەمێ $0\le x\le 2\pi$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 56 و 57 ، بەهایێ k هەژماربکە کو ڕاستەهێلێ دیارکری لێکەفت بیت بۆ وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیێ.

56 $f(x)=x^2-kx$ ؛ $y=4x-9$

57 $f(x)=\dfrac{k}{x}$ ؛ $y=-\frac{3}{4}x+3$

دەربارەی چەمکان

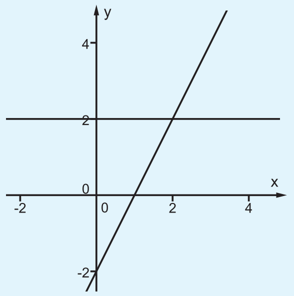
ل هەردوو ڕاهێنانێن 58 و 59 ، ئەوێ پەیوەندیا ناڤبەرا داتاشراوێ f و داتاشراوێ g گرێددەت دیاربکە.

58 $g(x)=f(x)+6$ **59** $g(x)=-5f(x)$

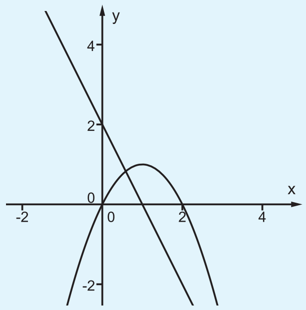
ل هەردوو ڕاهێنانێن 60 و 61 ، وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیا f و وێنەیێ ڕوونکرنا داتاشراوێ وێ ل سەرئێك ڕووتەختێ پۆتان دیاربوویە، وێنەیێ ڕوونکرنا f و وێنەیێ ڕوونکرنا f' جودابکە،

و ل بەرامبەر هەر وێنەیەکی ناڤێ وی بنڤیسە. ڕۆنبکە چەوا تو گەهشتیە دیارکرنا وان هەردووان.

60



61



ل هەردوو ڕاهێنانێن 62 و 63 ، پێداییان بکاربینە بۆ دیارکرنا بەهایێ $f'(2)$:

$g(2)=3$ $g'(2)=-2$ $h(2)=-1$ $h'(2)=4$

62 $f(x)=2g(x)+h(x)$ **63** $f(x)=g(x)h(x)$

دروستە یان نەیا دروستە:

ژ ڕاهێنانا 64 هەتا 69 دیاربکە: هەکە دەستەواژەیا دروست بیت هۆیێ وێ ڕۆنبکە، و هەکە نەیا دروست بیت ب دژە نموونەیەکێ بسەلمینە:

64 هەکە $f'(x) = g'(x)$ دێ $f(x) = g(x)$.

65 هەکە $f(x) = g(x) + c$ دێ $f'(x) = g'(x)$.

66 هەکە $y = \pi^2$ دێ $\frac{dy}{dx} = 2\pi$.

67 هەکە $y = \frac{x}{\pi}$ دێ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pi}$.

68 هەکە $g(x) = 3f(x)$ دێ $g'(x) = 3f'(x)$.

69 هەکە $f(x) = \frac{1}{x^n}$ دێ $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

70 هەکە تە نەخشەیا ڕادەدار $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ هەبیت، وان مەرجێن دڤێن ل سەر a ، b ، c ، d هەبن دیار بکە دا:

أ نەخشەیێ لێکەفتێ ئاسۆیی نەبیت.

ب نەخشەیێ بتنێ ئێك لێکەفتێ ئاسۆیی هەبیت.

ج نەخشەیێ بتنێ دوو لێکەفتێن ئاسۆیی هەبن.

نموونەیەکێ بۆ نەخشەیێ بینە ل هەر بارەکی.

بەشێ 3

ئەزموونا نیڤا بەشی

1-3 هەژمارکرنا داتاشراوێ بکارئینانا پێناسێ

1 ئارمانجێ بۆ هەژمارکرنا داتاشراوێ هەر نەخشەیەکێ بکاربینە:

أ $f(x)=2\sqrt{x}-1$

ب $f(x)=-x^2+x$

2-3 ڕێسایێن داتاشراوێ

2 داتاشراوێ هەر نەخشەیەکی هەژماربکە.

أ $f(x)=2x^2-\frac{1}{2x^3}+\frac{2\sqrt{x}}{3}-1$

ب $f(x)=\frac{\cos 2x}{x^2}$

ج $f(x)=ln(1+e^x)$

د $f(\theta)=\sin\left(\pi^2\theta\right)+\cos\left(\pi\theta^2\right)$

3 $f(x)=x^3-3x$

أ هاوکێشەیا لێکەفتێ وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیێ ل خالا بنەڕەت بینەدەر.

ب وان خالان ل سەر وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیێ دیاربکە کو لێکەفت ل وان خالان یێ ئاسۆیی بیت.

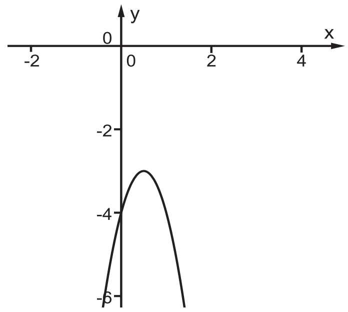
ج هەکە نەخشەیا $g(x)$ ئەڤان ساخبکەت $g(1)=0$ و $g'(1)=-1$ بەهایێ $h'(1)$ هەژماربکە هەکە $h=f\circ g$.

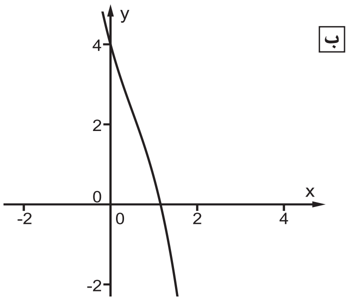
2-3 بەردەوامی

4 دیاربکە کو نەخشەیا $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\ge 1\\ 3x-1 & x<1\end{cases}$ یە بەردەوامە و شیانا داتاشراوێ نینە ل $x=1$.

2-3 نەخشە و داتاشراوێ وێ

5 هەردوو شێوەیێن ل خوارێ وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیا f و وێنەیێ ڕوونکرنا داتاشراوێ وێ نەخشەیێ f' دنوینن.

أ


ب


أ کیژ وێنەیێ ڕوونکرنێ f دنوینت؟ و کیژ وێنەیێ ڕوونکرنێ f' دنوینت؟ بەلگەیان بۆ بەرسڤا خۆ دیاربکە.

ب هاوکێشا لێکەفتێ وێنەیێ ڕوونکرنا f ل $x=0$ دیاربکە.

3–3 داتاشراویێ خۆ ب خۆ و داتاشراوێن بلند
Implicit Differentiation and Higher Derivative

ل پۆلا دەهێ تو فێری نەخشەی بووی، و تە دیت نەخشە زۆربەی جاران ل سەر **شێوەیێ ئاشکرا** دهاتە پێناسەکرن، ب ڕێکا نڤیسینا گۆڕاویێ پشبەست y پێ گۆڕاویێ **ئازاد** x بۆ نموونە: $y = 3x^2 - 5$.
بەلێ هندەك نەخشە **ب شێوەیەکی خۆب خۆ** ب پەیوەندیەکێ دیاردبن کو هەردوو گۆڕاو ساخدکەن وەك $xy = 1$ هەکە د ڤێ نموونەیێ دا داخوازی ژ تە هاتەکرن داتاشراویێ y وەك نەخشەیەك پێ x هەژماربکەی، ل دەستپێکێ y پێ x دێ نڤیسی، پاشی ڕێسایێن داتاشراویێ دێ بجهئینی.

$$xy = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

بەلێ نڤیسینا y پێ x هەموو جاران نەیا ساناهییە بۆ نموونە پەیوەندیا $x + y^3 = \sqrt{x+y}$.
ل ئەڤان بارەیان داتاشراویێ **خۆ ب خۆ** بکاربینە ژ بۆ هەژمارکرنا y' .
ژ بۆ تێگەهشتنا داتاشراویێ خۆ ب خۆ، ل بیرا تەبیت داتاشراویێ پێ گۆڕاویێ x وەردگرن.
بۆ هەژمارکرنا y' ، ڤان پێنگاڤان پەیرەو بکە:

- داتاشراویێ هەر ڕەخەکێ پێ گۆڕاویێ x هەژماربکە.
- ئەوان ڕادەیێن y' بخۆڤەدگرن ل ڕەخەکی خڕڤەکە و ڕادەیێن دی ل ڕەخێ دی خڕڤەکە.
- ئەوی ڕەخی y' بخۆڤەدگریت شیتەل بکە.
- بەهایێ y' پێ x و y بینەدەر.

ئارمانج

- جوداهیێ لناڤبەرا نڤیسینا نەخشەیێ ل سەر شێوەیێ خۆ ب خۆ و نڤیسینا وێ ل سەر شێوەیێ ئاشکرا دیاردکەن.
- داتاشراویێ خۆ ب خۆ بکاردئینن بۆ هەژمارکرنا داتاشراویێ نەخشەیێ.
- بارەیێن هەژمارکرنا ئارمانجێن نەدیار جودا دکەن.
- سەلمێنراوا لۆ بیتال بکاردئینن بۆ هەژمارکرنا ئارمانجێ ل بارەیێ نەدیار.

نموونە 1 داتاشراویێ خۆ ب خۆ

y' بینەدەر هەکە $y^2 = x$.

شیکار

بکارئینانا ڕێسایێن داتاشراویێ، داتاشراویێ هەر ڕەخەکی هاوکێشێ پێ گۆڕاویێ x هەژماربکە، پاشی بەهایێ y' بینەدەر.

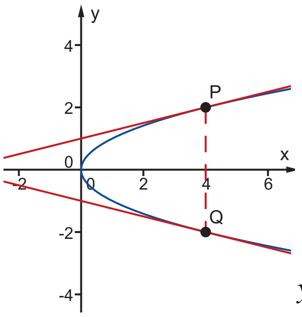
$$(y^2)' = (x)' \quad \Rightarrow \quad 2yy' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2y}$$

زاراڤ
Vocabulary

شێوەیێ خۆ ب خۆ
Implicit Form
شێوەیێ ئاشکرا
Explict form
داتاشراویێ خۆ ب خۆ
Implicit differentiation
داتاشراویێ دووێ
Second derivative
داتاشراوێن بلند
High -Order derivative
بارەیێ نەدیار
Indeterminate Form

خالا چاڤدێریێ

1. y' بینەدەر هەکە $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$.



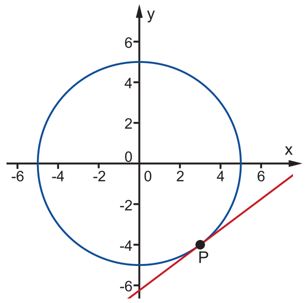
ل نموونەیا (1) ئەو برێ دبیتە y' هەردوو گۆڕاوێن y و x بخۆڤەدگریت. ئەڤ کارە یێ ڕەوایە و یێ بمفایە. بۆ نموونە بۆ مە دیاردبیت کو وێنەیێ ڕۆنکرنا پەیوەندیا $y^2 = x$ ، ئەوە برگەیێ هاوتایە، دوو لێکەفتێن جودا هەنە ل $x = 4$. یێ ئێکێ ل خالا $(4,-2)$ و لاریێ وێ دبیتە $y' = \frac{1}{2(-2)} = -\frac{1}{4}$ و یێ دووێ ل خالا $(4, 2)$ و لاریێ وێ دبیتە $y' = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$

زۆربەی جاران ل داتاشراویێ خۆ ب خۆ، بەهایێ y' وەك برەك بدەست مە دکەڤیت کو x و y بخۆڤەدگریت.

نموونـــــه 2

هەژمارکرنا لارێ لێکەفتێ بازنێ

لارێ لێکەفتێ بازنا $x^2+y^2=25$ لەخالێ $(3,-4)$ بینەدەر



شیکار

بکارئینانا داتاشراوێ خۆ ب خۆ y' بینەدەر

$$\left(x^2+y^2\right)'=\left(25\right)' \Rightarrow 2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=\frac{-2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

پاشی بەهایێ y' دەمێ $x=3$ و $y=-4$ هەژماربکە.

$$y'=-\frac{3}{(-4)}=\frac{3}{4}$$

لارێ لێکەفتێ بازنەیا $x^2+y^2=25$ ل خالا $(3,-4)$ دبیتە $\frac{3}{4}$.

خالا چاڤدێریێ

2. لارێ لێکەفتێ بازنەیا $x^2+y^2=16$ ل خالا $(0,4)$ هەژماربکە.

تێبینیێ بکە کو سەرەڕای داتاشراوێ خۆ ب خۆ بساناهی دهێتە هەژمارکرن، ئەو دبیتە هۆیێ نڤیسینا y' ل سەر شێوەیێ بڕەکی کو هەژمارکرنا بەهایێ وی یێ ژمارەی ل هەر خالەکا وێنەیێ ڕوونکرنا وی ساناهی دبیت.

نموونـــــه 3

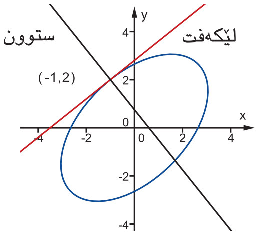
لێکەفتێ برگەیێ نەتەمام و ستوون ل سەر وی

لارێ لێکەفتێ برگەیێ نەتەمام $x^2-xy+y^2=7$ و لارێ ڕاستەهێلێ ستوون ل سەر وی، ل خالا $(-1,2)$ هەژماربکە.

شیکار

ل دەستپێکێ y' بینەدەر بکارئینانا داتاشراوێ خۆ ب خۆ

$$\left(x^2-xy+y^2\right)'=\left(7\right)' \Rightarrow 2x-y-xy'+2yy'=0 \Rightarrow (2y-x)y'=y-2x \Rightarrow y'=\frac{y-2x}{2y-x}$$



پاشی بەهایێ y' هەژمار بکە دەمێ $x=-1$ و $y=2$

$$y'=\frac{(2)-2(-1)}{2(2)-(-1)}=\frac{4}{5}$$

لارێ لێکەفتێ دبیتە $\frac{4}{5}$ و لارێ ستوونی دبیتە $-\frac{5}{4}$.

خالا چاڤدێریێ

3. لارێ لێکەفتێ برگەیێ نە تەمام $4x^2-8xy+9y^2=16$ و لارێ ڕاستەهێلێ ستوون ل سەر وی ل خالا $(-2,0)$ هەژمار بکە.

داتاشراوێن بلند

هەکە f نەخشەیەك بیت شیانا داتاشراوێ هەبیت، داتاشراوێ وێ دێ بیتە نەخشەیەك، و چێدبیت ئەوێ شیانا داناشراوێ هەبیت. هەکە داتاشراوێ نەخشەیێ f' نەخشەیەك بیت شیانا داتاشراوێ هەبیت، دبێژنە داتاتشراوێ وێ داتاشراوێ **دووێ بۆ نەخشەیا** f و هێمایێ f'' بۆ داتاشراوێ دووێ بکاردئینن، و ل ڤی باری دبێژنە f' **داتاشراوێ ئێکێ**.

داتاشراوێ دووێ دبیتە نموونەیەك بۆ **داتاشراوێن بلند**. تو دشێی داتاشراوێ نەخشەیێ ل هەر پلەیەکێ هەژماربکەی (هەکە هەبیت). لەوا داتاشراوێ داتاشراوێ دووێ دبیتە داتاشراوێ سێیێ.

داتاشراوێن بلند بۆ نەخشەیا $y = f(x)$ ئەڤە نە:

داتاشراوێ ئێکێ	y'	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d}{dx}[f(x)]$
داتاشراوێ دووێ	y''	$f''(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$
داتاشراوێ سێیێ	y'''	$f'''(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$
داتاشراوێ چوارێ	$y^{(4)}$	$f^{(4)}(x)$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	$\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
داتاشراوێ (n) ێ	$y^{(n)}$	$f^{(n)}(x)$	$\frac{d^ny}{dx^n}$	$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$

نموونە 4

هەژمارکرنا داتاشراوێ ل پلەیێن بلند

داتاشراوێ سێیێ بۆ نەخشەیا $f(x) = x\sin x$ هەژمکاربکە.

شیکار

داتاشراوێ ئێکێ
$$f'(x) = (x\sin x)' = \sin x + x\cos x$$

داتاشراوێ دووێ
$$f''(x) = (\sin x + x\cos x)' = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x$$

داتاشراوێ سێیێ
$$f'''(x) = (2\cos x - x\sin x)' = -2\sin x - \sin x - x\cos x = -3\sin x - x\cos x$$

خالا چاڤدێریێ

4. داتاشراوێ سێیێ بۆ نەخشەیا $f(x) = x\cos x$ هەژماربکە.

بارەیێ نەدیار ل ئارمانجێ نەخشەیێ

ل هەژمارکرنا ئارمانجان هندەك ئارمانج ل سەر شێوەیێ $\frac{0}{0}$ یان $\frac{\infty}{\infty}$ دیاردبن. دبێژنە ڤان بارەیێن نەدیار. پێشتر تە هەولدا بارەیێ نەدیار ب جەبرێ لابدەی ب دووبارە نڤیسینا نەخشەیێ کو بارەیی نەدیار نەمینیت.

نموونە 5

لادانا بارەیێ نەدیار ل هەژمارکرنا ئارمانجێ:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x-\sqrt{x}}$ هەژماربکە.

شیکار

یا ئاشکرایە کو بجهئینانا رێسایا ئارمانجێ دابەشکرنێ بۆ هەژمارکرنا ڤێ ئارمانجێ بارەیەکێ نەدیار وەك $\frac{0}{0}$ دیاردبیت. بەلێ تو دشێی نەخشەیێ دووبارە بنڤیسی و ئارمانجێ ب شێوەیێ ل خوارێ هەژماربکەی:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(x+\sqrt{x}\right)}{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(x+\sqrt{x}\right)}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} = 0$$

خالا چاڤدێریێ

5. $\lim_{x\to -1} = \frac{2x^2-2}{x+1}$ هژماربکە.

بکارئینانا جەبرێ بۆ لادانا بارەیێ نەدیار، زۆربەیی جاران نەکارەکی ساناهیە، وەک $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ ل ئەڤی بارەیی دێ سەلمێنراوا لۆبیتال بکارئینین.

سەلمێنراوا 3-8 **سەلمێنراوا لۆبیتال**

f و g دوو نەخشەنە شیانێن داتاشراویێ هەنە ل ئەڤسووریێ (هاوسێوەیێ) $x=c$ و $g'(x)\neq 0$.

هەکە $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ ل بارەیێ نەدیار بیت $\frac{0}{0}$ یان $\frac{\infty}{\infty}$ دێ:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

نموونە 6 بکارئینانا سەلمێنراوا لۆبیتال

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ هەژماربکە

شیکار

بجهئینانا رێسایا ئەنجامێ دابەشکرنێ دێ ئەنجام بیتە بارەیێ نەدیار $\frac{0}{0}$.

سەلمێنراوا لۆبیتال بکاربینە:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

خالا چاڤدێریێ

6. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ بدۆزەوە.

بارەکێ دی هەیە ژ بارەیێن نەدیار، ئەو شێوەیی $\frac{\infty}{\infty}$.

ل ئەڤی بارەیی هەروەسا دێ سەلمێنراوا لۆبیتال بکارئینین.

نموونە 7 بارەیێ $\frac{\infty}{\infty}$.

$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}$ هەژماربکە.

شیکار

بجهئینانا رێسایا ئەنجامێ دابەشکرنێ، دێ ئەنجام بیتە بارەیێ نەدیار $\frac{\infty}{\infty}$ چونکی $\lim_{x\to +\infty}\ln x = +\infty$

سەلمێنراوا لۆبیتال بکاربینە:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0$$

خالا چاڤدێریێ

7. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x}$ هەژماربکە.

چێدبیت تو سەلمێنراوا لۆبیتال زێدەتر ژ جارەکێ بکاربینی.

نموونە 8 بجهئینانا سەلمێنراوا لۆبیتال زێدەتر ژ جارەکێ

$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}$ هەژماربکە.

شیکار

بجهئینانا ڕێسایا ئەنجامێ دابەشکرنێ، ئەنجام دبیتە بارەیێ نەدیار $\frac{\infty}{\infty}$ چونکی $\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}\right)=+\infty$. سەلمینراوا لۆبیتال بکاربینە

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}\to\frac{\infty}{\infty}$$

سەلمینراوا لۆبیتال جارەکا دی بکاربینە.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x)'}{\left(-e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0$$

خالا چاڤدێریێ

8. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$ هەژماربکە

3-3 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا 1 هەتا 4، y' پێ x و y هەژماربکە.

1 $x^2y+xy^2=6$ **2** $y^2=\frac{x-1}{x+1}$ **3** $x=\tan y$ **4** $x+\tan(xy)=0$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 5 و 6 ، y' و لارێ چەماوەیێ ل خالا دیارکری هەژماربکە.

5 $(-2,3)$ ؛ $x^2+y^2=13$ **6** $(1,-7)$ ؛ $(x+2)^2+(y+3)^2=25$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 7 و 8 ، دیاربکە کەنگی لارێ چەماوەیی دێ پێناسەکری بیت؟

7 $x^2y-xy^2=4$ **8** $x^3-y^3=xy$

ژ ڕاهێنانا 9 هەتا 12 ، لارێ لێکەفتێ و لارێ ستوونی ل سەر وی ل خالا دیارکری

9 $(2,3)$ $x^2+xy-y^2=1$ **10** $(-1,3)$ $x^2y^2=9$

11 $(-1,0)$ $6x^2+3xy^2+2y^2+17y-6=0$ **12** $(1,0)$ $y=2\sin(\pi x-y)$

ژ ڕاهێنانا 13 هەتا 18 ، داتاشراوێ دووێ بۆ نەخشەیێ بینەدەر:

13 $f(x)=4x^{\frac{3}{2}}$ **14** $f(x)=x+32x^{-1}$ **15** $f(x)=\frac{x}{x-1}$

16 $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x}$ **17** $f(x)=3\sin x$ **18** $f(x)=\frac{1}{\cos x}$

ژ ڕاهێنانا 19 هەتا 22 ، داتاشراوێ داخوازکری بۆ نەخشەیا داتاشراوەکێ وێ دیارکری بینەدەر:

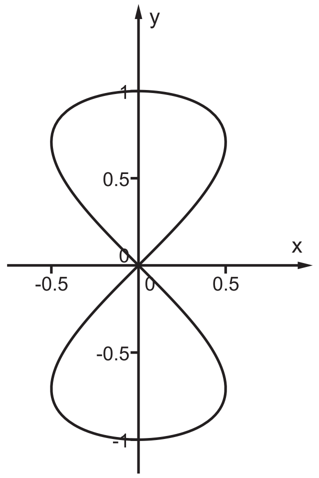
19 $f'(x)=x^2$: $f''(x)$ بینەدەر. **20** $f''(x)=2-\frac{2}{x}$: $f'''(x)$ بینەدەر.

21 $f'''(x)=2\sqrt{x}$: $f^{(4)}(x)$ بینەدەر.

22 $f^{(4)}(x)=2x+1$: $f^{(6)}(x)$ بینەدەر.

23 **وێنەیێ رووونکرنێ وەك هەشتێ:**

چەماوەیێ بەرامبەر هاوکێشەیا $y^4 = y^2 - x^2$ دنوێنیت. لارێن ڤی چەماوەیی ل هەردوو خالێن $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ هەژماربکە.



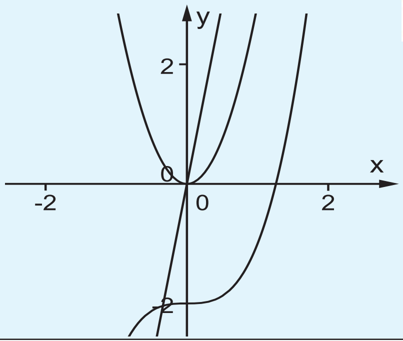
دەربارەی چەمکان (تێگەهان)

24 جوداهییێ لناڤبەرا شێوەیێ خۆ ب خۆ و شێوەیێ ئاشکرا ل پێناسا پەیوەندیا ل ناڤبەرا x و y رۆنبکە. نموونەیەکێ ل سەر هەرئێکێ بینە.

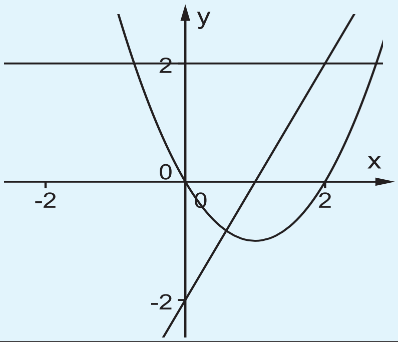
25 ب شێوازێ خۆ، بەحسەکێ ل سەر پێنگاڤێن داتاشراوێ خۆ ب خۆ بنڤیسە.

ل هەردوو راهێنانێن 26 و 27 ، شێوە وێنەیێ رووونکرنا نەخشەیا f و هەردوو وێنەیێن رووونکرنێ بۆ داتاشراوێ ئێکێ f' و داتاشراوێ دووێ f'' دیاردکەت. وێنەیێ رووونکرنێ بۆ نەخشەیێ و داتاشراوێ ئێکێ و داتاشراوێ دووێ دیاربکە. شرۆڤەکە چەوا تە هەر وێنەیەکی رووونکرنێ دیارکر.

26



27



دروستە یان نەیا دروستە؟ **ژ راهێنانا 28 هەتا 30 ، دیاربکە هەکە دەستەواژەیا دروست بیت هۆیێ وێ رۆنبکە، و هەکە نەیا دروست بیت ب دژە نموونەیەکێ بسەلمینە:**

28 هەکە $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ دێ $\frac{d^5y}{dx^5}=0$.

29 هەکە f نەخشەیەکا رادەداربیت ژ پلەیا n دێ $f^{(n+1)}(x)=0$.

30 داتاشراوێ دووێ بۆ نەخشەیێ، تێکرایێ گوهۆڕینێ بۆ داتاشراوێ ئێکێ دنوێنت.

31 داتاشراوێ ئێکێ بۆ نەخشەیا $f(x)=x|x|$ بینەدەر، ئەرێ $f''(0)$ یا پێناسەکریە؟

32 **هزربکە:** f و g دوو نەخشەنە شیانێن داتاشراوێ ئێکێ و دووێ هەنە ل هەر بەهایەکی x . دا کیژ ڤانێن ل خوارێ یا دروستە؟

أ $fg''-f''g=(fg'-f'g)'$

ب $fg''+f''g=(fg)''$

ژ ڕاهێنانا 33 هەتا 35 ، ئارمانجێ نەخشەیێ هەژماربکە ل جارا ئێکێ ب دووبارە نڤیسینا نەخشەیێ، پاشی بکارئینانا سەلمیناوا لۆبیتال:

33 $\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)}{x^2-9}$ **34** $\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-x-3}{x+1}$ **35** $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

ژ ڕاهێنانا 36 هەتا 44 ، ئارمانجێ هەژماربکە:

36 $\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$ **37** $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}$ **38** $\lim_{x\to0}\frac{e^x-(1-x)}{x}$

39 $\lim_{x\to1}\frac{\ln x^2}{x^2-1}$ **40** $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$ **41** $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+1}{2x^2+3}$

42 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **43** $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$ **44** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^4}{x^3}$

دەربارەی چەمکان (تێگەهان)

45 هەکە L لێکەفتێ چەماوەیێ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c}$ بیت، دیاربکە کو سەرجەمێ هەردوو ئێکودوو بڕینێن ڤی ڕاستەهیلی دگەل هەردوو تەوەرێن پۆتان یەکسانە c .

46 داتاشراوێ خۆ ب خۆ بکاربینە دا بسەلمینی کو داتاشراوێ $f(x)=x^{\frac{p}{q}}$ دبیتە $f'(x)=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$ ژمارەیێن ڕاستینە $\frac{p}{q}$.

47 نەخشەیێ لەزا تەنەکێ لڤوک دبیتە $v(t)=36-t^2$ مێتەر/ د چرکەکێدا کو $0\le t\le6$. لەز و تاودانێ هەژماربکە ل $t=3$. چ دبێژنە لەزا ڤی تەنی دەمێ نیشانێن لەزێ وتاودانێ هەڤدژی ئێکو دووبن.

48 تو دزانی کو ئەو ڕاستەهێلی ستوون دگەل لێکەفتی بازنێ ل خالا لێکەفتنێ د چەقێ بازنێ ڕادبۆریت، ئەڤێ بکارئینانا بازنا $x^2+y^2=r^2$ و خالا دکەفیتە سەربازنێ $P(a,b)$ بسەلمینە.

أ هاوکێشەیا لێکەفتێ بازنێ ل خالا P بنڤیسە.

ب هاوکێشەیا وی ڕاستەهێلێ ستوون دگەل لێکەفتی ل خالا P بنڤیسە، وبسەلمینە ئەو دچەقێ بازنێ ڕادبۆریت.

4–3

تێكرایێن گوهۆڕینێ
Rates of Change

ئارمانج
- داتاشراوێ بكاردئینن بۆ هەژمارکرنا تێكرایێن گوهۆڕینێ.
- تێكرایێن گوهۆڕینێ بكاردئینن بۆ شیكاركرنا پرسیارێن ژیانا ڕۆژانە.

زاراڤ
Vocabulary

نەخشەیا لادانێ (جهی)
Position function

لەزا ئاراستەكری
Velocity

برێ لەزێ
Speed

ناڤەندە لەز
Average velocity

لەزا ساتی
Instantaneous velocity

تێكرایێ گوهۆڕینێ
Rate of change

تێكرایێن گوهۆڕینێ

تو فێربوویی چەوا داتاشراوێ بكاردئینی بۆ هەژماركرنا لارێ نەخشەیێ ل خالەكێ ژ خالێن وێنەیێ ڕوونكرناوێ. دێ ل ڤێ وانێ فێربی چەوا داتاشراوێ بكاربینی بۆ هەژماركرنا تێكرایێ گوهۆڕینا گۆڕاوەكی دیاركری پێ گۆڕاوەكی دی. تێكرایێن گوهۆڕینێ ل گەلەك بواران دهێنە بكارئینان وەك لێكولینا زێدەبوونا ئاكنجیان وتێكرایێن بەرهەمئینانێ وتێكرایێن دەركەفتنا ئاڤێ ولەز وتاوادانێ. لێكۆلینا لڤینا لەشەكی (تەنەكی) ل سەر ڕاستەهێلەكی (ئاسۆیی یان ستوونی) دیارترین بكارئینانێن تێكرایێ گوهۆڕینێیە. زۆربەی جاران تەوەرێ ئاسۆیی دگەل خالا بنەڕەت ل سەر وی وەك نموونەیەك بكاردئێت بو وی ڕاستەهێلی تەن ل سەر دلڤیت ب شێوەیێ ئاسۆیی.

ل ڤی باری لڤین ب ئاراستەیێ مووجەبە هەكە ژ ڕەخێ چەپێ بۆ ڕەخێ ڕاستێ بیت، و ب ئاراستەیێ سالبە هەكە ژ ڕەخێ ڕاستێ بۆ ڕەخێ چەپێ بیت.

نەخشەیا لادانێ ئەو نەخشەیە s ئەوا جهێ تەنێ ژ خالا بنەڕەت پێ دەمێ t دیاردكەت.

هەكە تەنی ل ماوەیێ Δt دووریا $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$ برێ، دێ ڕێژە بیتە

$$\frac{\text{گوهۆڕینا لادانێ}}{\text{گوهۆڕینا دەمی}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$ ، دبێژنە ئەوێ

ناڤەندە لەزا Average velocity تەنێ لڤۆك یان ناڤەندە لەزا وی ل ماوەیێ [t, t+ Δt]

لڤینا ئاسۆیی:

داتاشراوێ ڕۆلەكی گرنگ هەیە ل لێكۆلینا لڤینا لەشان. دەمێ تشتەك دلڤت دێ جهێ وی ل دووڤ گوهۆڕینا دەمی هێتە گوهۆڕین. هەكە تو ب ترۆمبێلا خو ژ هەڤلێرێ بۆ دهوك دەركەڤی، دێ جهێ تە ل هەردەمەكی پێ نەخشیا لادانێ $s(t)$ دیاربیت.

وەسا دانەكو تەنەك ل سەر ڕاستە هێلەكی ئاراستەكری دلڤیت وەك تەوەرێ ئاسۆیی x . ئەو تەنە ل ماوەیێ t بۆ $t_1 = t + \Delta t$ ژ جهێ $s(t)$ بۆ جهێ $s(t_1) = s(t+\Delta t)$ دلڤیت.

ناڤەندە لەزا ڤی تەنی ل ماوەیێ $[t, t_1]$ دبیتە

$$v_{av} = \frac{\text{گوهۆڕینا لادانێ}}{\text{گوهۆڕینا دەمی}} = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

كو $\Delta(s) = s(t+\Delta t) - s(t)$.

هەكە تە بڤێت لەزا تەنی ل دەمێ t بزانێ، $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ هەژماربكە، ئانكو ل بەهایێ داتاشراوێ نەخشەیا لادانێ ل دەمێ t بگەڕە.

لەزا ساتی Instantaneous Velocity

لەزا ساتیا تەنەکی لڤۆك دبیتە داتاشراوێ نەخشەیا لادانا لڤینا وی تەنی ل دەمێ t

$$v(t)=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=s'(t)$$

نموونـــــە 1

هەژمارکرنا لەزا ساتیا تەنەکی ل سەر تەوەرەکی دلڤیت

خالەك ل سەر تەوەرێ x دلڤت. نەخشەیا $s(t)=t^2-5t+4$ نەخشەیا لادانا وێ خالێ دنوینت، t ب چرکەیان و s لادانە ب مێتەران دپیڤن. ناڤەندە لەزا ڤێ خالێ ل دەمێ هەردوو چرکەیێن ئێکێ هەژماربکە، پاشی لەزا ساتی ل $t=2$ هەژماربکە.

شیکار

بۆ هەژمارکرنا ناڤەندە لەزا خالێ ددەمێ دوو چرکەیێن ئێکێ دا. وێ دووریا ئەڤ خالە ل دەمێ هەردوو چرکەیان دبڕت هەژماربکە.

ئەڤ دووریە دبیتە: $s(2)-s(0)=(2)^2-5(2)+4-\left[(0)^2-5(0)+4\right]=4-10=-6$

ئەوێ خالێ ل دەمێ دوو چرکەیان دووریا 6 میتەران ب ئاراستەیی سالب ل سەر تەوەری بری، وناڤەندە لەزا خالێ دبیتە 3 مێتەر دچرکەکێ دا ب ئاراستەیێ سالب ئانکو دبیتە $-3\text{m}/\text{s}$، بۆ هەژمارکرنا لەزا ساتیا خالێ ل $t=2$، داتاشراوێ $s'(t)$ ل $t=2$ هەژماربکە.

$s'(t)=2t-5$ و $s'(2)=2(2)-5=-1$.

تێبینیێ بکە کو ئەو لەزا تەهەژمارکری نەبتنێ لەزاخالێ دنوینێت، بەلکو ئاراستەیێ وێ دنوێنیت لەوا دبێژنێ لەزا ئاراستەکری. وبڕێ لەزێ دبیتە بەهایێ رووتێ لەزا ئاراستەکری. **لەزا ئاراستەکری** یا خالێ ل $t=2$ دبیتە $-1\text{m}/\text{s}$ ئانکو ئێك مێتەر د چرکەکێ دا ب ئاراستەیێ سالبێ تەوەری. وبڕێ ڤێ لەزێ یەکسانە ئێك مێتەر د چرکەکێ دا .

خالا چاڤدێریێ

1. ناڤەندە لەزا ئاراستەکری بۆ خالێ ل ماوەیێ $t_1=3$ بۆ $t_2=7$ چەندە؟ لەزا ئاراستەکری بۆ خالێ ل $t=5$ چەندە هەکە بزانن $s(t)=t^2-5t+4$ ؟

لەز بخۆ نەخشەیەکە پێ دەمێ وئەو دهێتە گوهۆڕین دگەل بۆرینا دەمێ. داتاشراوێ لەزێ چاوانیا گوهۆڕینا لەزێ دنوینت، ولەز گوهۆڕینا جهی دنوینت. تاودان دبیتە داتاشراوێ لەزێ، بۆ هەژمارکرنا تاودانێ نەخشەیا لادانێ دووجاران ل دووڤ ئێك داتاشراوبکە. ئانکو داتاشراوێ دووێ بۆ نەخشەیا لادانێ هەژماربکە.

نەخشەیا لادانێ	$s(t)$
نەخشەیا لەزێ	$v(t)=s'(t)$
نەخشەیا تاودانێ	$a(t)=v'(t)=s''(t)$

نموونــــه 2

هەژمارکرنا تاودانا تەنەکی ل سەر تەوەرەکی دلڤت:

ڤەگەڕیان بۆ پێدایێن نموونە 1 ، تاودانا خالیێ ل $t = 5$ بینەدەر.

شیکار

بۆ هەژمارکرنا تاودانا خالیێ، داتاشراویێ دوویێ بۆ نەخشەیا لادانیێ بینەدەر.

$$v(t) = s'(t) = 2t - 5$$

$$a(t) = s''(t) = 2$$

تاودانا خالیێ یە چێگرە وناهێتە گوهۆڕین و دبیتە $2\text{m}/\text{s}^2$.

خالا چاڤدێریێ

2. ڤەگەڕیان بۆ پێدایێن نموونە(١) تاودانا خالیێ ل $t=6$، چەندە؟ $s(t)=t^2-5t+4$

لڤینا ستوونی

نەخشەیا لادانیێ د لڤینا ستوونی دا دەربرینا بلنداهیا تەنی ژ سەر ڕوویێ ئەردی دکەت، هەکە ئەو تەنە ل سەر ڕاستەهێلەکی ستوونی و ئاراستەکری بەرەڤ سەری بلڤت کو دانێن وەك تەوەریێ y.

لێکۆلینێن پراکتیکی وتیوری ئەڤ ئەنجامە دیارکرن، کونەخشەیا $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$

نموونەیەکی دنوینت بۆ هەژمارکرنا بلنداهیا تەنەکی ژ سەر ڕوویێ ئەردی دگەل بۆرینا دەمی t ژ دەستپێکا هاڤێتنا وی ژ بلنداهیا بنەڕەت s_0 و ب لەزەکا دەستپێکی v_0 g تاودانا ڕاکێشانا ئەردی دنوێنت وبەهایێ وێ یی جودایە دگەل جوداهیا یەکەیێن دووریێ ئەوێن دهێنە بکارئینان.

نەخشەیا لڤینا ستوونی

یەکەیا پیڤانا دووریێ	یەکەیا پیڤانا لەزیێ	بەهایێ g	نەخشە
مێتر m	m/s	$g = 9.8\text{m}/\text{s}^2$	$s(t) = -4.9t^2 + v_0t + s_0$
پێ ft	ft/s	$g = 32\text{ft}/\text{s}^2$	$s(t) = -16t^2 + v_0t + s_0$

نموونــــه 3

بکارئینانا داتاشراویێ بۆ هەژمارکرنا لەزیێ

ل ئاهەنگەکا یارییێن ئاگری، تیرەك ژ سەر پایەکێ بلنداهیا وێ 4 پێ بوو ژ سەر ڕوویێ ئەردی بەرەڤ سەری هلدا ب لەزەکا دەستپێکی بڕێ وێ 160 پێ د چرکەکێ دا بوو:

أ نەخشەیا لادانیێ بۆ لڤینا تیرێ بنڤیسە.

ب پەرە (بلندترین) بلنداهیا ئەو تیرە دگەهتێ چەندە؟

ج لەزا ئاراستەکری بۆ تیریێ دەمێ دگەهیتە بلنداهیا 260 پێیان ل بلندبوونێ وهاتنە خواریێ چەندە؟

د تاودانا تیرێ ل هەر دەمەکی (ساتەکی) چەندە؟

هـ کەنگی ئەو تیرە دگەهیتە سەر ئەردی؟

شیکار

أ پشتبەستن ب زانیاریێن پێشتر، نەخشەیا لادانێ بۆ ڤینا تیرێ دبیتە $s(t)=-16t^2+160t+4$

ب تیرە دگەهتە بلندترین بلنداهی دەمێ لەزا وێ دبیتە لەزا ئاراستەکری بۆ تیرێ پێ دەمی دبیتە $v(t)=s'(t)=-32t+160$. ئەڤ لەزە دبیتە 0 دەمی t بەهایێ ڕەگێ هاوکێشەیا $-32t+160=0$ وردەگریت ئانکو $t=5$، و ژ ڤێ دەرئەنجام دکەین کو بلندترین بلنداهیا ئەو تیرە دگەهیتێ دبیتە: $s(5)=-16(5)^2+160(5)+4=404\text{ft}$.

ج بۆ دیارکرنا لەزا ئاراستەکری بۆ تیرێ دەمێ دگەهیتە بلنداهیا 260 پیان، دڤێت بەهایێ v ل وێ بلنداهیێ هەژماربکەی. ڤێ هاوکێشەیێ شیکاربکە. هاوکێشەیا $-16t^2+160t+4=260$ شیکاربکە.

$$-16t^2+160t+4=260$$

$$16t^2-160t+256=0$$

$$16(t-2)(t-8)=0$$

ڤێ هاوکێشەیێ دوو ڕەگ هەنە $t=2$ و $t=8$، ئەو تیرە دگەهیتە بلنداهیا 260 پیان دەمێ بلند دبیت ل $t=2$ ولەزاوێ یا ئاراستەکری دبیتە بەهایێ داتاشراوێ نەخشەیێ ل $v(2)=-32(2)+160=96\text{ft/s}$
ئەو تیرە دگەهتە بلنداهیا 260 پیان دەمێ دئێتە خوارێ ل $t=8$، و لەزا وێ یا ئاراستەکری دبیتە بەهایێ داتاشراوێ نەخشەیێ ل $v(8)=-32(8)+160=-96\text{ft/s}$
تێبینیێ بکە کو هەردوو لەزێن تیرێ ل بلندبوونێ و ل هاتنە خوارێ ل بلنداهیا پیان بەهایێن وان دیەکسانن، ولەزا تیرێ ل بلندبوونێ یە مووجەبە و ل هاتنە خوارێ یە سالبە.

د بۆ هەژمارکرنا تاودانا تیرێ، داتاشراوێ دووێ بۆ نەخشەیا لادانێ بینە دەر ئانکو $a(t)=s''(t)=-32$. تێبینیێ بکە کوتاودانا تیرێ یە نەگۆرە ل هەردەمەکی ویە سالبە.

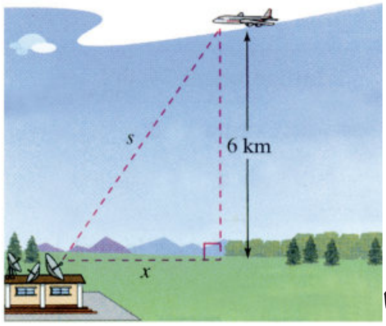
هـ تیرە دگەهتە ئەردی دەمێ بلنداهیا وێ دبیتە 0 ، ئانکو دەمێ هاوکێشەیا $-16t^2+160t+4=0$ دوو ڕەگێ هەنە، ئێك ژ وان یێ سالبە و ئەڤە نابیت و ئەوێ دی یێ موجەبە و دبیتە 10 بنێزیکی. ئەو تیرە دگەهتە ئەردی پشتی 10 چرکان ژ هەلدانا وێ ب نێزیکی.

خالا چاقدێریێ

3. پرسیارێن نموونە 3 بەرسڤ بدە، وەسا دانە کو تیرە ژ بلنداهیا 2.4m هاتە هەلدان ب لەزەکا دەستپێکی بڕێ وێ 49m/s بوو. ل پرسیارا (ج)، لەزا ئاراستەکری بۆ تیرێ بینەدەر، دەمێ ئەو ل بلنداهیا 120 m بیت؟

هەژمارکرنا تێکراییێ گوهۆرینێ بۆ گۆڕاوەکی پێی گۆڕاوەکێ دی دەمێ هەردوو نەخشەبن پێ دەمی دهێتە دانان وەك بجهێنانەکا گرنگ ل سەر داتاشراویێ خۆ ب خۆ.

نموونـــــــه 4 هەژمارکرنا لەزا فڕۆکێ ب هۆیێ ڕاداریێ



فڕۆکەیەك ب هێلەکی ئاسۆیی ل سەر ڕێرەویێ ڕادارەکێ بۆری، وەك دیار ل وێنەیێ بەرامبەر. لەزا ئاراستەکری بۆ ڤێ فڕۆکێ چەندە دەمێ ئەو ل دووریا $s = 10\text{km}$ ژ ویستگەهێ ڕاداریێ بیت، بۆ زانین دووری کێم دبیت ب تێکراییێ 400 km/h؟

شیکار

لەزا ئاراستەکری بۆ فڕۆکێ دهێتە پیڤان ب تێکراییێ گوهۆرینا دووریا ئاسۆیی یا لناڤبەرا فڕۆکێ و جهێ ڕاداریێ.

نەخشەیا $x(t)$ دبیتە نەخشەیا لادانێ بۆ فڕۆکێ. داتاشراویێ $x(t)$ هەژماربکە

هەردوو گۆڕاو x ، t ئەوا دگەل ئێکودوو دهێنە گرێدان ب پەیوەندیا $x^2 + 6^2 = s^2$.

داتاشراویێ خۆ ب خۆ بکاربینە بۆ هەژمارکرنا $x'(t)$

$$x^2 + 6^2 = s^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}(x^2 + 6^2) = \frac{d}{dt}(s^2) \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} = 2s\frac{ds}{dt} \Rightarrow x\frac{dx}{dt} = s\frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{s}{x}\frac{ds}{dt}$$

دەمێ فڕۆکە ل دووریا $s = 10\text{km}$ بیت، دێ $x = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ و $\frac{ds}{dt} = -400$ ژ ڤێ دەرئەنجام

دکەی کو: $\frac{dx}{dt} = \frac{s}{x}\frac{ds}{dt} = \frac{10}{8}(-400) = -500$

لەزا ئاراستەکریا فڕۆکێ ل دووریا 10 KM ژ ویستگەهێ ڕاداریێ دبیتە -500km/h ، و بڕێ وێ لەزێ ل وی دەمی دبیتە 500 km/h

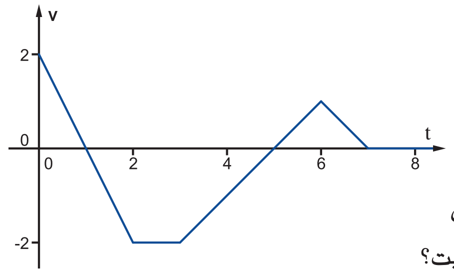
خالا چاڤدێریێ

4. فڕۆکەیەك ب هێلەکی ئاسویی ل سەر ڕێرەویێ ڕادارەکێ بوری، وەك دیار ل وێنەیێ نموونە 4، تێکراییێ کێمکرنا دووریێ s چەندە؟ بۆ زانین لەزا ئاراستەکری بۆ فڕۆکێ ل دووریا $s = 9\text{km}$ ژ ویستگەها ڕاداریێ دبیتە -450km/h .

4-3 ڕاهێنان

1 **ڕووبەر:** لاكێشەیەك درێژیا وێ $2t+1$ و پانیا وێ $\sqrt{t}$ بیت، تێكڕایێ گوهۆڕینا ڕووبەرێ ڤی لاكێشەیێ پێ گوهۆڕینا دەمی بینەدەر.

2 **قەبارە:** لوولەكەكا وەستاو نیڤتیرێ بنكەیێ وێ $\sqrt{t+2}$ و بلنداهیا وێ $\frac{1}{2}\sqrt{t}$ بیت. تێكڕایێ گوهۆڕینا قەبارێ لوولەكێ پێ t بینەدەر.



3 **لڤینا ئاسۆیی:** وێنەیێ بەرامبەر وێنەیێ ڕوونكرنا نەخشەیا $v=f(t)$ دیار دكەت. ئەو لەزا ئاراستەكری بۆ خالەكێ ل سەر تەوەرێ x دنوێنیت.

أ كەنگی خال بەرەف پاش دلڤیت؟ كەنگی بەرەف پێش دلڤیت؟ كەنگی لەزا وێ زێدە دبیت؟ و كەنگی كێم دبیت؟

ب كەنگی تاودانا خالێ یە مووجەبە؟ و كەنگی یە سالبە؟ و كەنگی سفرە؟

ج كەنگی خال ب مەزنترین لەز دلڤیت؟

د ل كیژ دەمی ئەو خالە پتر ژ جارەكێ ڕاودوەستیت؟

وەسا دانە كو x ، y دوو نەخشەنە پێ t و شیانێن داتاشراوێ هەنە. بكارئینانا پێداییان داخوازیێ هەژماربكە.

	پەیوەندی لناڤبەرا x و y	داخوازی	پێدایی
4	$y=\sqrt{x}$	$\frac{dy}{dt}$ ل $x=4$.	$\frac{dx}{dt}=3$
5	$x^2+y^2=25$	$\frac{dy}{dt}$ ل $x=3$ و $y=4$. $\frac{dx}{dt}$ ل $x=4$ و $y=3$.	$\frac{dx}{dt}=8$ $\frac{dy}{dt}=-2$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 6 و 7 ، خالەك ل سەر وێنەیێ ڕوونكرنا نەخشەیا پێدای y دلڤیت، هەژماربكە لنك هەر بەهایەكێ دیاركری x، $\frac{dy}{dt}$ بۆ زانین $\frac{dx}{dt}=2cm/s$.

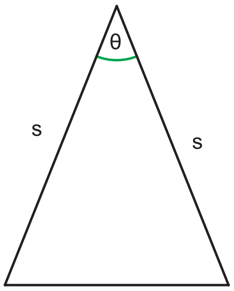
6 $y=x^2+1$ ، $x=-1$ ، $x=0$ ، $x=1$

7 $y=\sin x$ ، $x=\frac{\pi}{6}$ ، $x=\frac{\pi}{4}$ ، $x=\frac{\pi}{3}$

8 تێكڕایێ گوهۆڕینا دووریا ل ناڤبەرا خالەكا دلڤیت ل سەر برگەیێ هاوتا $y=x^2+1$ و خالا بنەڕەت بینەدەر، بۆ زانین $\frac{dx}{dt}=2cm/s$.

9 تێكڕایێ گوهۆڕینا دووریا ل ناڤبەرا خالەكا ل سەر وێنەیێ ڕوونكرنا نەخشەیا $y=\sin x$ و خالا بنەڕەت بینەدەر، بۆ زانین $\frac{dx}{dt}=2cm/s$.

10 سێگۆشەیەکا دوولا یەکسانە، درێژیا هەر لایەکێ ژ وان هەردووان s و گۆشا دناڤبەرا واندا θ .



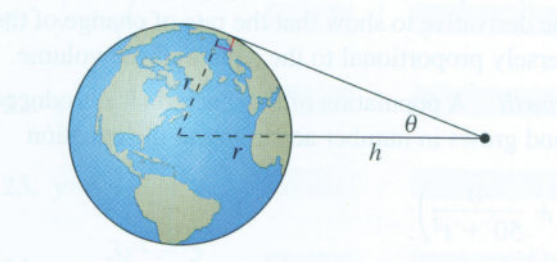
أ بسەلمینە کو ڕووبەرێ سێگۆشەیێ دبیتە $A=\frac{1}{2}s^2\sin\theta$.

ب هەکە گۆشەیا θ ب تێکڕایێ $\frac{1}{2}$ ڕادیان د چرکەکێ دا زێدەبیت، تێکڕایێ گوهۆڕینا ڕووبەرێ سێگۆشێ هەژماربکە ل $\theta=\frac{\pi}{6}$ ، $\theta=\frac{\pi}{3}$.

ج ڕوونبکە بۆچی تێکڕایێ گوهۆڕینا ڕووبەرێ سێگۆشەیێ نەیا جێگرە دەمێ تێکڕایێ گوهۆڕینا θ یا جێگر بیت؟

11 **تێکڕایێ گوهۆڕینێ**: بەهایەکی بۆ x ل ماوەیێ $[0,2\pi]$ دیاربکە هەکە هەبوو، دەمێ تێکڕایێ گوهۆڕینا هەردوو نەخشەیێن $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ و $g(x)=\frac{1}{\sin x}$ یەکسان بن.

12 دەمێ هەیڤەکا دەستکرد زێرەڤانیا ئەردی دکەت، ئەو زێرەڤانیا بەشەکی ژ لایێ ئەردی دکەت. هندەك ژ ئەڤان هەیڤێن دەستکرد شیانا پیڤا گۆشا θ هەنە ئەوا ل وێنەیێ بەرامبەر h دووریا لناڤبەرا هەیڤا دەستکردیا زێرەڤانیێ و ڕوویێ ئەردی دنوێنیت، و r نیڤتیرێ گۆیا ئەردی دنوێنێت.



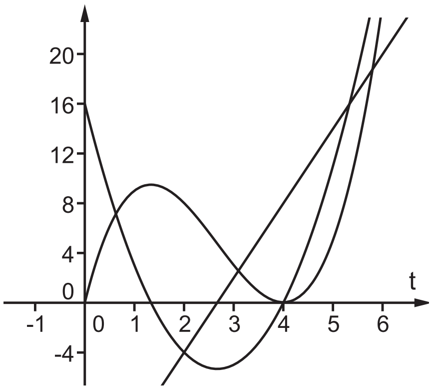
أ بسەلمینە کو $h=r\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)$

ب تێکڕایێ گوهۆڕینا h پێ θێ هەژماربکە ل $\theta=30^\circ$ (دانە $r=6373\text{km}$)

دەربارەی چەمکان (تێگەهان)

13 هەردوو گۆڕاو x و y ب پەیوەندیا $y=ax+b$ ئێکودوو گرێددەن، a و b دوو ژمارەیێن ڕاستینە، وەسا دانە کو هەر گۆڕاوەك ژ وان هەردووان دبیتە نەخشەیەك پێ t و تێکڕایێ گوهۆڕینا x یا نەگۆڕە، ئەرێ تێکڕایێ گوهۆڕینا y یا نەگۆڕە؟ هەکە یا وەسابیت، ئەرێ تێکڕایێ گوهۆڕینا y دێ یەکسانی تێکڕایێ گوهۆڕینا x بیت؟ ئەوێ ڕۆنبکە.

14 **لڤینا گەردی** ل وێنەیێ بەرامبەر وێنەیێ ڕۆنکرنێ بۆ هەر نەخشەیەکێ ژ نەخشەیێن لەزێ و تاودانێ و لڤینا گەردەکی ل سەر تەوەرەکی دیارکرییە:

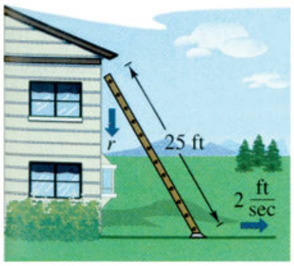


أ وێنەیێ بکێشە و چەماوەیێ هەر نەخشەیەکێ جودا بکە. ڕۆنبکە تو چەوا گەهشتیە وێ ئەنجامێ.

ب ل سەر ئەوی تەوەری تە کێشای، دیاربکە کەنگی لەزا وی گەردی زێدە دبیت و کەنگی کێم دبیت.

15 **بەرزە گۆشە:** باڵۆنەك ب لەزا $3\ m/s$ بلند دبیت ژ خالەکێ ل سەر ئەردی کو ب $30\ m$ ژ زێرەڤانەکی یا دوورە. تێکڕایێ گوهۆڕینا بەرزە گۆشەیی هەژماربکە دەمێ باڵۆن $30\ m$ یا بلند بیت ژ سەر ڕوویێ ئەردی.

16 پەیزکەك درێژیا وێ 25 پێیە، ڕەخێ سەری ل سەر دیوارەکییە، و ڕەخێ خوارێ عەرەبانەك ب لەزا دوو پێیان د چرکەکێ دا ڕادکێشیت.



أ لەزا هاتنە خوارا (نزمبوونا) سەرێ پەیزکێ ل سەر دیواری چەندە دەمێ سەرێ خوارێ یێ پەیزکێ ب 7 پییان ژ دیواری یێ دووربیت؟ 15 پێیان؟ 42 پێیان؟

ب تێکڕایێ گوهۆڕینا ڕووبەرێ وێ سێگۆشەیا پەیزك دگەل دیواری و ڕوویێ ئەردی پێکدهێت هەژماربکە دەمێ سەرێ خوارێ یێ پەیزکێ ب 7 پێیان ژ دیواری یێ دوور بیت.

بەشێ 3

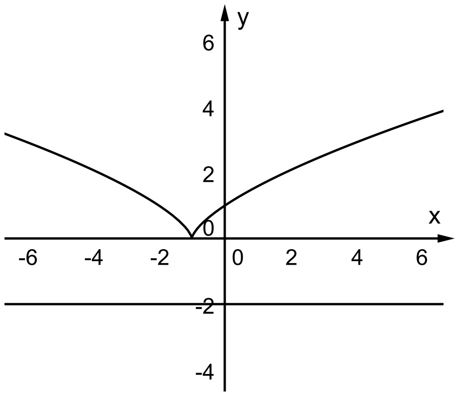
پێداچوونا بەشی

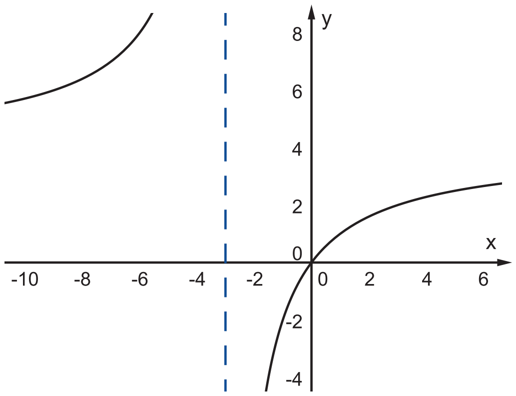
ژ ڕاهێنانا 1 هەتا 4 ، داتاشراوێ هەر نەخشەیەکێ بکارئینانا پێناسەیا داتاشراوێ بینەدەر.

1 $f(x)=x^2-2x+3$ **2** $f(x)=\sqrt{x}+1$ **3** $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ **4** $f(x)=\frac{2}{x}$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 5 و 6 ، بەهایێن x ئەوێن وەسا دکەن کو نەخشەیێ شیانا داتاشراوێ هەبیت دیاربکە.

5 $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}$ **6** $f(x)=\frac{4x}{x+3}$





7 وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیا $f(x)=4-|x-2|$ بکێشە.

أ ئەرێ نەخشەیە بەردەوامە ل $x=2$ ؟

ب ئەرێ نەخشەیێ شیانا داتاشراوێ هەیە ل $x=2$ بەرسڤا خۆ ڕۆنبکە.

8 وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیا $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+2 & x<-2 \\ 1-4x-x^2 & x\geq -2 \end{cases}$ بکێشە.

أ ئەرێ نەخشەیە بەردەوامە ل $x=-2$ ؟

ب ئەرێ نەخشەیێ شیانا داتاشراوێ هەیە ل $x=-2$؟ بەرسڤا خۆ ڕۆنبکە

ل هەردوو ڕاهێنانێن 9 و 10 ، لارێ نەخشەیێ ل خالا دیارکری هەژماربکە.

9 $g(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{x}{6}$ ؛ $\left(-1,\frac{5}{6}\right)$ **10** $h(x)=\frac{2}{8}x-2x^2$ ؛ $\left(-2,-\frac{34}{4}\right)$

ل هەردوو داهێنانێن 11 و 12 :

أ هاوکێشەیا لێکەفتێ وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیێ ل خالا دیارکری هەژماربکە.

ب وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیێ و لێکەفتی ل ڤێ خالێ وێنەبکە.

11 $f(x)=x^3-1$ ؛ $(-1,-2)$ **12** $f(x)=\frac{2}{x+1}$ ؛ $(0,2)$

ژ ڕاهێنانا 13 هەتا 33 ، داتاشراوێ نەخشەیێ بینەدەر.

13 $f(x)=-12$

14 $f(x)=x^{12}$

15 $f(x)=-8x^5$

16 $f(x)=x^3-3x^2$

17 $f(x)=6\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}$

18 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$

19 $f(x)=\frac{2}{(3x)^2}$

20 $f(x)=4\cos x+6$

21 $f(x)=3\cos x-\frac{\sin x}{4}$

22 $f(x)=(3x^2+7)(x^2-2x+3)$

23 $f(x)=\sqrt{x}\sin x$

24 $f(x)=x^3\cos x$

25 $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x^2-1}$

26 $f(x)=\frac{9}{3x^2-2x}$

27 $f(x)=\frac{x^2}{\cos x}$

28 $f(x)=2x-x^2\tan x$

29 $f(x)=x\cos x-\sin x$

30 $f(x)=\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)^2$

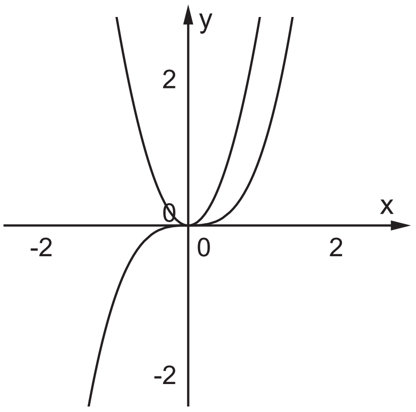
31 $f(x)=\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x-\frac{2}{7}\sin^{\frac{7}{2}}x$

32 $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$

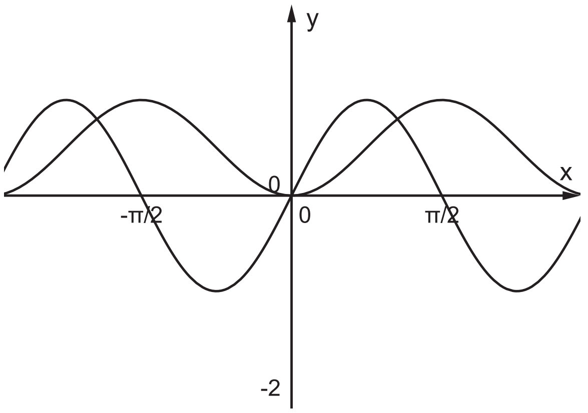
33 $f(x)=\frac{\cos(x-1)}{x-1}$

نڤیسین: شێوەیێ ل خوارێ وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیێ و وێنەیێ ڕوونکرنا داتاشراوێ نەخشەیێ دیاردکەت، وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیێ و وێنەیێ ڕوونکرنا داتاشراوێ وێ دیاربکە، ڕۆنبکە تو چەوا گەهشتیە ئەنجامی.

34



35



ژ ڕاهێنانا 36 هەتا 41 ، داتاشراوێ دووێ بینەدەر.

36 $f(x)=2x^2+\sin 2x$

37 $f(x)=\frac{1}{x}+\tan x$

38 $f(x)=\frac{1}{\tan x}$

39 $f(x)=\sin^2 x$

40 $f(x)=\frac{6x-5}{x^2+1}$

41 $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$

ژ ڕاهێنانا 42 هەتا 44 ، سەلمێنراوا لوبیتال بکاربینە بۆ هەژمارکرنا ئارمانجێ داخوازکری.

42 $\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)^2}{x-1}$

43 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin \pi x}{\sin 2\pi x}$

44 $\lim_{x\to +\infty} xe^{-x^2}$

بەشێ 3

بەرهەڤكرن بۆ ئەزموونێ

1 $f(x)=4-3x$ كیژ ڤانێن ل خوارێ یەكسانە $f'(-1)$ ؟

أ -7 ب 7 ج -3 د 3 هـ نە چو ژ وانن

2 $f(x)=1-3x^2$ كیژ ڤانێن ل خوارێ یەكسانە $f'(1)$ ؟

أ -6 ب -5 ج 5 د 6 هـ نە چو ژ وانن

3 كیژ ڤانێن ل خوارێ یا دروستە بۆ نەخشەیا $f(x)=x^{\frac{4}{5}}$ ل $x=0$ ؟

أ وێنەیێ ڕوونكرنا نەخشەیێ گۆشەیەك هەیە ل ڤێ خالێ.

ب وێنەیێ ڕوونكرنا نەخشەیێ لێكەفتێ ستوونی هەیە ل ڤێ خالێ.

ج نەخشەیە پچاندییە ل ڤێ خالێ.

د $f(0)$ نەیا پێناسەكرییە.

هـ نەخشەیێ شیانا داتاشراوێ ل ڤێ خالێ هەیە.

4 $f(x)=u(x)v(x)$ و $f'(1)$ هەژماربكە بۆ زانین $u(1)=2$ ، $u'(1)=3$ ، $v(1)=-1$ ، $v'(1)=1$.

أ -4 ب -1 ج 1 د 4 هـ 7

5 داتاشراوێ دووێ بۆ نەخشەیا $f(x)=x-\frac{1}{x}$ دبیتە:

أ $1+\frac{1}{x^2}$ ب $1-\frac{1}{x^2}$ ج $\frac{2}{x^3}$ د $-\frac{2}{x^3}$ هـ نە چ ژ وانن

6 كیژ ڤانێن ل خوارێ یەكسانە $\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

أ $\frac{2}{(x-1)^2}$ ب 0 ج $\frac{x^2+1}{x^2}$ د $2x-\frac{1}{x^2}-1$ هـ $-\frac{2}{(x-1)^2}$

7 كیژ ڤانێن ل خوارێ یەكسانە ژمارا لێكەفتێن ئاسۆیێ بۆ چەماوەیێ نەخشەیێ $f(x)=(x^2-1)(x^2+1)$.

أ 0 ب 1 ج 2 د 3 هـ 4

8 تێكڕایێ گوهۆڕینا ساتی بۆ نەخشەیا $f(x)=\frac{x^2+2}{x+4}$ ل $x=-1$ هەژماربكە.

أ -1 ب -4 ج 0 د 4 هـ 7

9 تێكڕایێ گوهۆڕینا ساتی بۆ قەبارێ شەشپالۆیەكێ درێژیا لایێ وێ x بیت، هەژماربكە:

أ x ب $3x$ ج $6x$ د $3x^2$ هـ x^3

ل هەردوو ڕاهێنانێن 10 و 11 ، خالەك ل سەر تەوەرێ x دلڤیت، و نەخشەیا لادانا وێ دبیتە $s(t)=2+7t-t^2$ كو $t\geq 0$.

10 ل كیژ دەمێن ل خوارێ خال بۆ ڕەخێ چەپێ دلڤیت؟

أ $t=0$ ب $t=1$ ج $t=2$ د $t=\frac{7}{2}$ هـ $t=4$

11 ل كیژ دەمێن ل خوارێ خال د سەكنیت (ڕادوەستیت)؟

أ $t=1$ ب $t=2$ ج $t=\frac{7}{2}$ د $t=4$ هـ $t=5$

12 کیژ ڤانێن ل خوارێ دبیتە هاوکێشەیا لێکەفتێ وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیا $y=\sin x+\cos x$ ل $x=\pi$؟

أ $y=-x+\pi-1$ ب $y=-x+\pi+1$ ج $y=-x-\pi+1$

د $y=-x-\pi-1$ هـ $y=x-\pi+1$

13 y'' هەکە $y=x\sin x$ بینەدەر.

أ $-x\sin x$ ب $x\cos x+\sin x$ ج $-x\sin x+2\cos x$

د $x\sin x$ هـ $-\sin x+\cos x$

14 تەنەك پێ نەخشەیا لادانێ $s(t)=3+\sin t$ دلقیت. ل کیژ دەمێن ل خوارێ لەزا تەنی یەکسانە 0 ؟

أ $t=0$ ب $t=\frac{\pi}{4}$ ج $t=\frac{\pi}{2}$ د $t=\pi$ هـ $\frac{3\pi}{4}$

15 $y=\tan(4x)$ کیژ ڤانێن ل خوارێ دبیتە $\frac{dy}{dx}$.

أ $\frac{4\tan(4x)}{\cos x}$ ب $\frac{\tan(4x)}{\cos(4x)}$ ج $\frac{4}{\tan x}$ د $\frac{1}{\cos^2(4x)}$ هـ $\frac{4}{\cos^2(4x)}$

16 $y=\cos^2(x^3+x^2)$ کیژ ڤانێن ل خوارێ دبیتە $\frac{dy}{dx}$ ؟

أ $-2(3x^2+2x)$

ب $-(3x^2+2x)\cos(x^3+x^2)\sin(x^3+x^2)$

ج $-2(3x^2+2x)\cos(x^3+x^2)\sin(x^3+x^2)$

د $2(3x^2+2x)\cos(x^3+x^2)\sin(x^3+x^2)$

هـ $2(3x^2+2x)$

17 $x^2-xy+y^2=1$ کیژ ڤانێن ل خوارێ یەکسانە $\frac{dy}{dx}$.

أ $\frac{y-2x}{2y-x}$ ب $\frac{y+2x}{2y-x}$ ج $\frac{2x}{x-2y}$ د $\frac{2x+y}{x-2y}$ هـ $\frac{2x+y}{x}$

18 $y=x^{\frac{3}{4}}$ کیژ ڤانێن ل خوارێ یەکسانە $\frac{dy}{dx}$.

أ $\frac{3x^{\frac{1}{3}}}{4}$ ب $\frac{4x^{\frac{1}{4}}}{3}$ ج $\frac{3x^{\frac{1}{4}}}{4}$ د $\frac{4}{3x^{\frac{1}{4}}}$ هـ $\frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}}$

19 کیژ ڤانێن ل خوارێ دبیتە لارێ لێکەفتێ چەماوەیێ $y^2-x^2=1$ ل خالا $(1,\sqrt{2})$.

أ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ب $-\sqrt{2}$ ج $\frac{1}{\sqrt{2}}$ د $\sqrt{2}$ هـ 0

20 کیژ ڤانێن ل خوارێ دبیتە لارێ لێکەفتێ چەماوەیێ $y=2^{1-x}$ ل خالا $x=2$؟

أ $-\frac{1}{2}$ ب $\frac{1}{2}$ ج -2 د 2 هـ $-\frac{\ln 2}{2}$

بەشێ
4

بجهئینانێن داتاشراوێ
Applications of Differentiation

بەشێ چوارێ

وانە

4–1 تاقیکرنا داتاشراوێ ئێکێ.

4–2 تاقیکرنا داتاشراوێ دووێ.

4–3 ئارمانج ل بێدوماهییێ.

ئەزموونا نیڤا بەشی

4–4 وێنەکرنا چەماوەیێ [وێنەیێ رۆنکرنێ] نەخشەیان

4–5 گەڕیان ل دووڤ باشترین شیکار.

پێداچوون

بەرهەڤکرن بۆ ئەزموونێ

هندەك هۆكار هەنە كارتێكرنێ دكەن ل سەر مەزاختنا سۆتەمەنیا ترومبێلێ، وەك جۆرێ ئەوێ قیرێ بۆ دروستكرنا رێكێ بكاردئینیت و جۆرێ تایران و لەزا ترومبێلێ، و جۆرێ بەنزینێ. كۆمپانییێن ترومبێلان نەخشەیا

$m(v) = 0.00015v^3 - 0.032v^2 + 1.8v + 1.7$

بكاردئینن وەك نموونەیەك بۆ هەژمارتنا وێ دووراتیا ترومبێل ب (میلان) دبڕت ب ئێك گالۆنا بەنزینێ، ل دووڤ لەزێ v «میل ل ئێك دەمژمێرێ». ب چ لەزێ دڤێت تو وێ ترومبێلێ بهاژۆیی دا پترترین دووراتیێ ب ئێك گالۆنا بەنزینێ ببڕی؟

ئەریٚ تویی ئامادەیی

زاراڤ

1 هەر دەستەواژەیەکا ل ستوونا رەخیٚ رەخیٚ راستیٚ دگەل رۆنکرنا ویٚ ل ستوونا رەخیٚ چەپیٚ گریٚدە.

1. تیٚکراییٚ گۆهۆڕینیٚ

2. لەزا ساتی

3. نەخشەیا لادانیٚ

4. نەخشەیەکا شیانا داتاشراویٚ هەبیت.

أ نەخشەیەکە جهیٚ تەنەکی لڤۆك ل دووڤ دەمی دیاردکەت.

ب ئەنجامیٚ دابەشکرنا دووریێ ل سەر دەمی.

ج ریٚژەیەکە گۆڕاویٚ ئازاد ل ژێرەییٚ ویٚ دهیٚتە گۆهۆڕین و گراویٚ پشتبەست ل سەرەیی دهیٚتە گۆهۆڕین.

د لەزا تەنەکیٚ لڤۆکیٚ ل ساتەکی دیارکری

هـ نەخشەیەکە لاریٚ ویٚ لنكیٚ هەر خالەکیٚ ژ خالیٚن ویٚ یا پیٚناسەکرییە.

هەژمارکرنا داتاشراویٚ

ژ راهیٚنانا 2 هەتا 7 ، داتاشراویٚ نەخشیٚ بهەژمیٚرە

2 $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ **3** $f(x) = 2\sin x\cos x$ **4** $f(x) = x\sqrt{2x+1}$

5 $f(x) = \ln\sqrt{x}$ **6** $f(x) = e^{(1+\ln x)}$ **7** $f(x) = xe^{-x}$

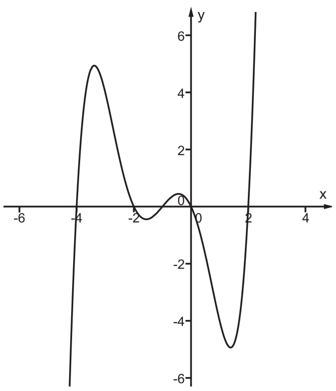
دەستنیشانکرنا نیشانا نەخشەیٚ ب جەبریٚ و ب ویٚنەییٚ رونکرنیٚ

ژ راهیٚنانا 8 هەتا 10 . ئەوان بەهاییٚن x دیاربکە دەمیٚ نیشانا نەخشەی دهیٚتە گۆهۆڕین، و ویٚ گۆهۆڕینا ل نیشانیٚ دهیٚتە ئەنجامدان ل نك هەر خالەکیٚ.

8 $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$ **9** $f(x)=x^2-9$ **10** $f(x)=\ln x$

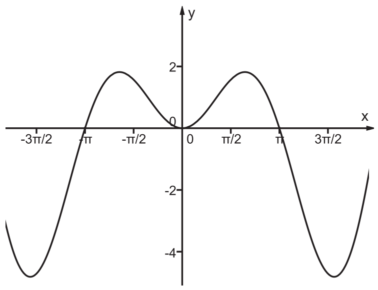
ل هەردوو ڕاهیٚنانان 11 و 12، ڤەکۆلینا نیشانا نەخشەیٚ ل ماوەیەکیٚ دیارکری بکە.

11



ل ماوەییٚ $[-5, 5]$

12

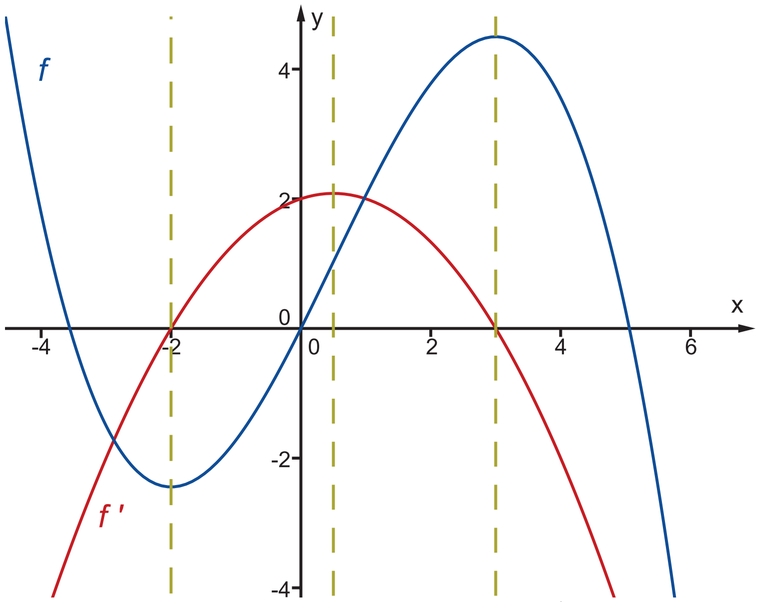


ل ماوەییٚ $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

1-4 تاقیکرنا داتاشراویێ ئێکێ

First Derivative Test

پەیوەندییەکا بهێز هەیە ل ناڤبەرا نەخشەیێ و داتاشراوێن وێ، کو تو دشێی گەلەك هۆکاران ل سەر وێ نەخشەیێ پۆختە بکەی پشتبەستن ب وان زانیاریێن ب دەست تە دکەڤن ژ داتاشراویێ ئێکێ یان داتاشراویێ دوویێ یێ وێ نەخشەیێ. دڤی بەشی دا دێ فێری ڤان پەیوەندییان و چاوانیا بکارئینانا وان بی.



ئارمانج

- چەمکێ بەهایێ دوماهیا خوجهی فێردبن و جودا دکەن.
- بەهاییێن دوماهیا خوجهی نەخشێ دیاردکەن.
- ماوەییێن بەرەڤ زێدەبوون و بەرەڤ کێمبوونا نەخشەیێ دیاردکەن.
- تاقیکرنا داتاشراویێ ئێکێ بۆ هەژمارتنا بەهاییێن دوماهیا خوجهی نەخشەیێ بکاردئینن.

زاراڤ
Vocabulary

بەرەڤ کێمبوون
Decreasing

بەرەڤ زێدەبوون
Increasing

بەهایێ بچوکترین دوماهییا خۆجی
Local Minimum value

بەهایێ مەزنترین دوماهییا خۆجی
local maximum value

خالا وەرگێڕانێ
point of Inffiction

بەهایێ شلۆقە
Critical Value

خشتەیێ گۆهۆڕینان
Table of variations

بەرەڤ زێدەبوون و بەرەڤ کێمبوونا نەخشەیان

وێنەیێ ل سەری، چەماوەیێ نەخشەیێ f [ب شینی] و چەماوەیێ داتاشراویێ ئێکێ یێ نەخشێ (ب سۆری) دیاردکەت. هەکە تو باش بەرێ خو بدەیە ڤان چەماوەیان، دێ ڤانێن ل خوارێ دەرئەنجام کەی:

1. دەمێ x ژ رەخێ چەپێ بۆ رەخێ راستێ ل سەر تەوەری خو بلڤیت، دێ خالا $M(x, f(x))$ ل سەر چەماوەیێ نەخشەیێ بەرەڤ خوارێ لڤیت، و ئەڤە دەربڕینە بۆ بەرەڤ کێمبوونا بەهاییێن $f(x)$، هەتا x دگەهتە -2. و دەربڕینا وێ دکەن دبێژن نەخشە بەرەڤ کێمبوونە ل ماوەیێ $]-\infty, -2[$.

2. پشتی x ژ بەهایێ -2 دەربازدبیت، خالا $M(x, f(x))$ ل سەر چەماوەیێ نەخشەیێ بەرەڤ سەری دلڤیت، و ئەڤە دەربڕینە بۆ بەرەڤ زێدەبوونا بەهاییێن $f(x)$ ، هەتا x دگەهتە 3. و دەربڕینا وێ دکەن دبێژن نەخشە بەرەڤ زێدەبوونە ل ماوەیێ $]-2, 3[$.

3. خالا $M(x, f(x))$ دەست ب لڤاندنێ دکەت ل سەر چەماوەیێ نەخشەێ بەرەڤ خوارێ پشتی x ژ بەهایێ 3 دەربازدبیت، و ئەڤە دەربڕینە بۆ بەرەڤ کێمبوونا بەهاییێن $f(x)$ جارەکا دی. و دەربڕینا وێ دکەن دبێژن نەخشە بەرەڤ کێمبوونە ل ماوەیێ $]3, +\infty[$.

4. بەهاییێن داتاشراویێ ئێکێ دسالبن ل ماوەیێ $]-\infty, -2[$ و ل ماوەیێ $]3, +\infty[$ و ئەو دمووجەبن ل ماوەیێ $]-2, 3[$.

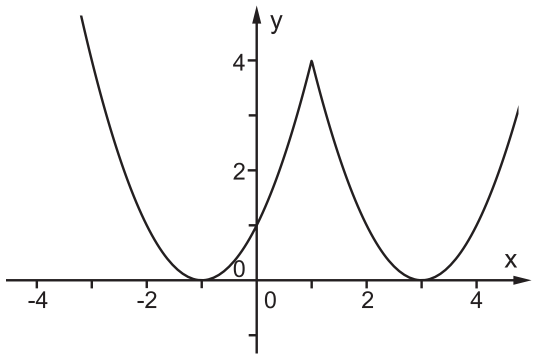
5. نەخشە بەرەڤ کێمبوونە ل ماوەیەکی، دەمێ بەهاییێن داتاشراویێ ئێکێ ل وی ماوەیی دسالب بن. و نەخشە بەرەڤ زێدەبوونە ل ماوەیەکی، دەمێ بەهاییێن داتاشراویێ ئێکێ ل وی ماوەیی دمووجەب بن. دبێژنە بەهاییێن x ئەوێن وەسا دکەن کو $f'(x)=0$ بەهاییێن **شلۆقە** بۆ نەخشەێ.

تو دشێی ئەوا بۆری د ڤی خشتەیدا پۆختەبکەی.

x	$-\infty$	-2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	↘ بەرەڤ کێمبوون		↗ بەرەڤ زێدەبوون		↘ بەرەڤ کێمبوون	

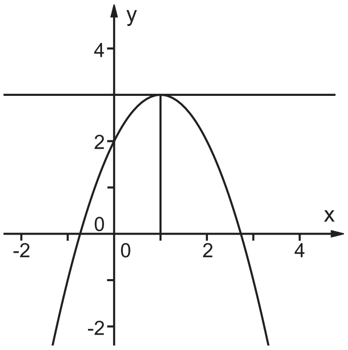
پێناسەیا بەهایێن شلۆقە

f نەخشەیەکا پێناسەکرییە ل $x=c$ ، دبێژن بەهایێ c بۆ گۆڕاوێ ئازاد x بەهایەکی شلۆقەیە بۆ نەخشەیا f هەکە داتاشراوێ وێ نەیا پێناسەکری بیت ل $x=c$ یان هەکە $f'(c)=0$



$f'(x)$ نەیا پێناسەکرییە ل $x=1$

1 بەهایێ شلۆقەیە بۆ نەخشێ



$f'(x)=0$

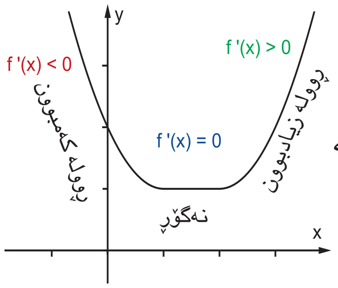
1 بەهایێ شلوقەیە بۆ نەخشێ

پێناسەیا نەخشەیێن بەرەڤ زێدەبوون و نەخشەیێن بەرەڤ کێمبوون

دبێژن f نەخشەیەکە بەرەڤ زێدەبوونە ل ماوەیێ $I=[a,b]$ هەکە لاسەنگیا $x_1<x_2$ لاسەنگیا $f(x_1)<f(x_2)$ پەیدا بکەت کو x_1 و x_2 هەر چەند بن دماوەیێ I دا.

هەروەسا دبێژن f نەخشەیەکە بەرەڤ کێمبوونە ل ماوەیێ $I=[a,b]$ ، هەکە لاسەنگیا $x_1<x_2$ لاسەنگیا $f(x_1)>f(x_2)$ پەیدا بکەت x_1 و x_2 هەر چەند بن دماوەیێ I دا.

ب رامانەکا دی، نەخشە دێ یا بەرەڤ زێدەبوون بیت، دەمێ خالا $(x, f(x))$ بەرەڤ سەری بلڤیت هەر چەند x بەرەڤ رەخێ راستێ بلڤیت. و دێ بەرەڤ کێمبوون بیت، دەمێ خالا $(x, f(x))$ بەرەڤ خوارێ بلڤیت هەر چەند x بەرەڤ رەخێ راستێ بلڤیت. بۆ نموونە:



ل وێنەیێ بەرامبەر نەخشە یە بەرەڤ کێمبونە ل ماوەیێ $]-\infty, a[$ و یە نەگۆڕە ل ماوەیێ $]a, b[$ ، و یە بەرەڤ زێدەبوونە ل ماوەیێ $]b, +\infty[$.

ژ وێنەیێ بەرامبەر دیاردبیت، کو داتاشراوێ مووجەب بەرەڤ زێدەبوونا نەخشەیێ دیاردکەت، و داتاشراوێ سالب بەرەڤ کێمبوونە نەخشەیێ دیاردکەت. لێ نەبوونا داتاشراوێ $(f'(x)=0)$ ل ماوەیەکی، نەگۆڕیا بەهایێ نەخشەیێ ل ڤی ماوەیی دیاردکەت.

سەلمێنراوا 4-1 بەرەڤ زێدەبوون و بەرەڤ کێمبوونا نەخشەیێ

نەخشەیا f شیانا داتاشراوێ هەبیت.

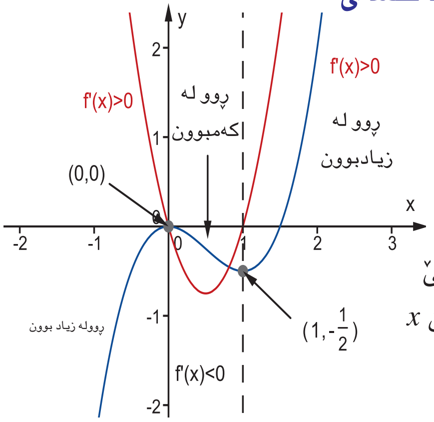
.1 هەکە $f'(x)>0$ دماوەیێ I دا، دێ f بەرەڤ زێدەبوون بیت دڤێ ماوەیدا.

.2 هەکە $f'(x)<0$ دماوەیێ I دا، دێ f بەرەڤ کێمبوون بیت دڤێ ماوەییدا.

.3 هەکە $f'(x)=0$ دماوەیێ I دا، دێ f نەخشەیا نەگۆربیت دڤێ ماوەیدا.

نموونـــە 1

ماوەیێن بەرەڤ زێدەبوون و بەرەڤ کێمبوونا نەخشەیێ



ماوەیێن بەرەڤ زێدەبوون و بەرەڤ کێمبوونا نەخشەیا $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$ دیاربکە.

شیکار

نەخشەیا f شیانا داتاشراوێ هەیە د R دا، چونکی ئەو نەخشەیەکا رادەدارە. بۆ دیارکرنا بەهایێن شلۆقە بۆ ڤێ نەخشەیێ. داتاشراوێ نەخشەیێ دیاربکە، و وان بەهایێن x کو داتاشراوێ دکەنە سفر دیاربکە.

$$f'(x)=3x^2-2\left(\frac{3}{2}\right)x=3x^2-3x=3x(x-1)$$

بەهایێن x ئەوێن داتاشراوێ دکەنە سفر دبنە $x=0$، $x=1$ ئەوێ نەخشەیێ دوو بەهایێن شلۆقە هەنە و ئەڤەنە: $x=0$، $x=1$ تو دشێی ئەوێ بۆری دڤێ خشتەیی دا پۆختە بکەی، کو دبێژنێ خشتەیێ گۆهۆرینان.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$3x$	$-\infty$	$-$	0	$+$	3	$+$	$+\infty$
$(x-1)$	$-\infty$	$-$	-1	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)=0$	$\searrow$	$f(x)=-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

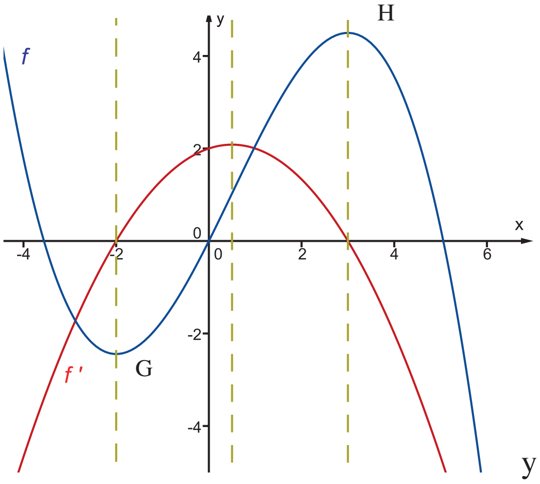
نەخشە بەرەڤ زێدەبوونە ل هەردوو ماوەیان $]-\infty,0[$ و $]1,+\infty[$ و نەخشە بەرەڤ کێمبوونە ل ماوەیێ $]0,1[$

خالا چاڤدێریێ

.1 ماوەیێن بەرەڤ زێدەبوون و بەرەڤ کێمبوون بۆ نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}$ دیاربکە.

بۆ تێگەهشتنا پەیوەندییا ل ناڤبەرا نیشانا داتاشراوێ نەخشەیێ ل ماوەیەکی و بەرەڤ زێدەبوون و بەرەڤ کێمبوون وێ نەخشەیێ، تێبینیا ئەڤا ل خوارێ بکە: هەکە نەخشەیە بەرەڤ زێدەبوون بیت، دێ $f(x+h)>f(x)$ دەمێ $h>0$ و $f(x+h)<f(x)$ دەمێ $h<0$. ژ ڤێ دەرئەنجام دکەین کو: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0$ پاشی دێ $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0$ ل هەموو بارەیێن نەخشە تیدا بەرەڤ زێدەبوون بیت. تو دشێی ب ڤێ رێکێ رۆنبکەی بۆچی داتاشراو دێ یە سالب بیت ل ماوەیەکی هەکە نەخشەیە بەرەڤ کێمبوون بیت.

مەزنترین و بچووکترین بەهایێن خۆجهی



دێ نۆکە فێربی چەوا داتاشراوێ بکاربینی بۆ دیارکرنا مەزنترین بەهایێن خۆجهی و بچووکترین بەهایێن خۆ جهی بۆ نەخشەیەکێ.

بەرێ خو بدە وێنەیێ رونکرنا (چەماوە) بەرامبەر، دێ ڤێ دەرئەنجام کەی:

1. چەماوەیێ نەخشەیێ دخالا Gرا دبۆریت، دەمێ x بەهایێ -2 وەردگرت. هەروەسا دخالا H را دبۆریت دەمێ بەهایێ x دبیتە 3.

2. تانژێن y بۆ هەموو خالێن چەماوەیێ نەخشەیێ ل هاوسیێن (هەڤسودەیێن) خالا G مەزنترن ژ تانژێ y بۆ ڤێ خالێ (G) و ئەو دبیتە $f(-2)$. دبێژین خالا G بچووکترین بەهایێن خوجهیە بۆ نەخشەیا f ، و تانژێ ڤێ خالێ y دبیتە بچوکترین بەهایێ خوجهی بۆ نەخشەیێ.

3. تانژێن y بۆ هەمووا خالێن چەماوەیێ نەخشەیێ ل هاوسیێن خالا H بچووکترن ژ تانژێ ڤێ خالێ کو ئەو دبیتە$f(3)$. دبێژین H مەزنترین خالا خوجهییە بۆ نەخشەیا f، و تانژێ ڤێ خالێ y دبیتە مەزنترین بەهایێ خوجهیێ بۆ نەخشەیێ.

4. داتاشراوێ ئێکێ بۆ نەخشەیێ دبیتە سفر، دەمێ نەخشە بچووکترین بەهایێ خۆجهی یان مەزنترین بەهایێ خۆجهی وەردگریت. بەهایێن دوماهیێن خۆجهی بۆ نەخشەیێ (پەرە بەها)دبنە مەزنترین بەهایێن خۆجهی و بچووکترین بەهایێن خۆجهی.

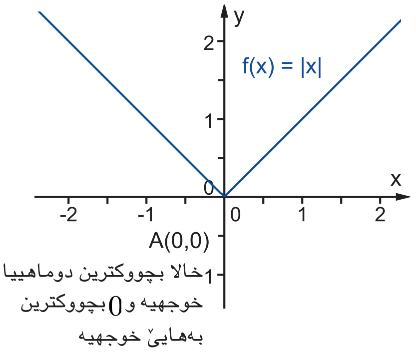
خشتەیێ ل خوارێ تێبینیێن پێشتر پوختە دکەت:

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$

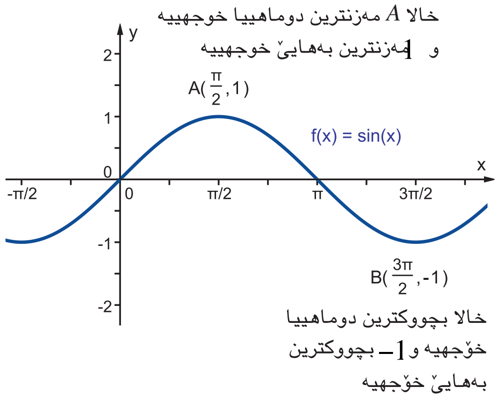
نموونـــــه 2 بەهایێن داتاشراوێ لنك بەهایێ دوماهیا خوجهی

بەهایێ داتاشراوێ بهەژمێرە لنك هەر بەهایەکی دوماهیا خۆجهی بۆ نەخشەیێ:

أ $f(x)=|x|$ ل ماوەیێ $[-1,1]$



ب $f(x)=\sin x$ ل ماوەیێ $[0,2\pi]$



شیکار

أ نەخشەیا $f(x)=|x|$ بچووکترین بەهایێ خۆجهی هەیە ل $x=0$، داتاشراویێ نەخشەێ دڤێ خالێدا نەیا پێناسەکرییە.

ب نەخشەیا $f(x)=\sin x$ مەزنترین بەهایێ خۆجهی هەیە ل $x=\frac{\pi}{2}$ و بچووکترین بەهایێ خوجهی هەیە ل $x=\frac{3\pi}{2}$ داتاشراویێ ڤێ نەخشەێ دبیتە $f'(x)=\cos x$ و ڤان بەهایان وەرگریت لنك بەهایێن دوماهیێ:

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ و $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$

مەزنترین بەهایێ خوجهیە — بچووکترین بەهایێ خوجهیە

خالا چاڤدێریێ

2. بەهایێ داتاشراویێ لنك هەر بەهایەکێ دوماهیێ بهەژمێرە:

$f(x)=-|x|$ و $f(x)=\frac{9\left(x^2-3\right)}{x^3}$

سەلمێنراوا 4-2 تاقیکرنا داتاشراویێ ئێکێ

$x=c$ بەهایەکێ شلۆقەیە بۆ نەخشەیا f، و ڤێ نەخشەێ شیانا داتاشراویێ هەیە ل هاوسێێن ڤێ بەهایێ:

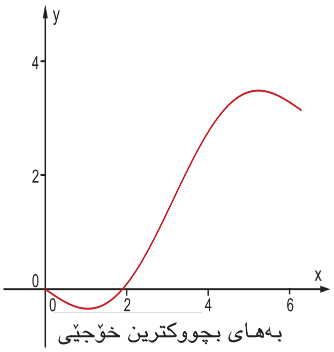
1. هەکە نیشانا $f'(x)$ ژ مووجەب بۆ سالب هاتە گۆهارتن دەمێ نەخشە دx = c را دبۆریت، دێ خالا $(c, f(c))$ مەزنترین بەهایێ خوجهی نوێنت.

2. هەکە نیشانا $f'(x)$ ژ سالب بۆ مووجەب هاتە گۆهارتن دەمێ نەخشە د $x=c$ رادبۆریت، دێ خالا $(c, f(c))$ بچووکترین بەهایێ خوجهی نوێنت.

نموونـــە 3

بکارئینانا تاقیکرنا داتاشراویێ ئێکێ

بەهایێن دوماهییا خۆجهی بۆ نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$ ل ماوەیێ $]0, 2\pi[$ بینەدەر.



بەهای بچووکترین خۆجێی

شیکار

نەخشەیێ شیانا داتاشراویێ هەیە ل ماوەیێ $]0, 2\pi[$.

ب هەژمارکرنا خالێن شلۆقە دەستپێبکە:

$f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x$

داتاشراویە پێناسەکرییە ل هەموو بەهایێن x . بەهایێن شلۆقە بۆ نەخشەیێ دبنە شیکار بۆ هاوکێشەیا $\frac{1}{2}-\cos x=0$ و دناڤ ماوەیێ $]0, 2\pi[$ هەنە. ل شیکارا هاوکێشێ: دوو بەها هەنە

$x=\frac{\pi}{3}$ ، $x=\frac{5\pi}{3}$

خشتەیێ گۆهۆڕینان ئەڤێ ل خوارێیە:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{2}$
$f(x)$	0	↘	$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}$	↗	$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}$	↘	π

پشتی دروستکرنا گۆهۆڕینان، دیارکرنا خالێن دوماهییێن خۆجهی و جۆرێ هەر ئێکێ ژ وان و بەهایێن وان سانەهی دبیت. نەخشەیا f بچووکترین بەهایێ خوجهی هەیە ل $x = \frac{\pi}{3}$ و دبیتە ئەو بەهایە. و نەخشەیا f مەزنترین بەهایێ خوجهی هەیە ل $x = \frac{5\pi}{3}$ ، و $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{6}$ ئەو یەکسانە $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi + 3\sqrt{3}}{6}$

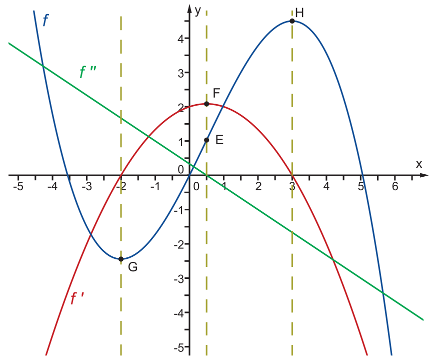
خالا چاڤدێریێ

3. بەهایێن دوماهییێن خوجهی بۆ نەخشەیا $f(x)=\cos x - \frac{1}{2}x$ ل ماوەیێ $[\,0 ، 2\pi\,]$ هەژماربکە.

خالێن وەرگێڕانێ:

وێنەیێ بەرامبەر جەماوەیێ نەخشەیا f (ب شینی) و چەماوەیێ داتاشراوێ ئێکێ (ب سۆری) و جەماوەیی داتاشراوێ دووێ (ب کەسکی) دنوێنیت، تو دشێی تێبینیێ بکەی کو چەماوەیێ نەخشەیێ ناڤچالە دەمێ داتاشراوێ دووێ یێ مووجەب بیت، و یی کومدە دەمێ داتاشراوێ دووێ یێ سالب بیت. و ئەو دهێتە گۆهۆڕین ژ ناڤچال بۆ کۆمد ل خالا E .

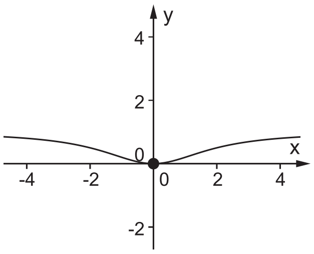
بەرێ خو بدێ کو پۆیێ ڤێ خالێ دبنە ئەو بەهایێن x ئەوێن داتاشراوێ دووی دکەتە سفر. دبێژنە E **خالا وەرگێڕانێ بۆ نەخشەێ.**



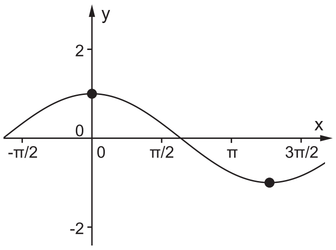
1-4 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا **1** هەتا **3**، بەهایێ داتاشراویێ (هەکە هەبوو) هەژماربکە ل دەڤ هەر بەهایەکی دوماهیێ:

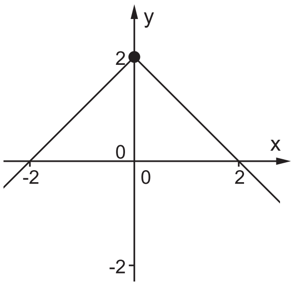
1 $f(x)=\frac{x^2}{x^2+4}$



2 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$

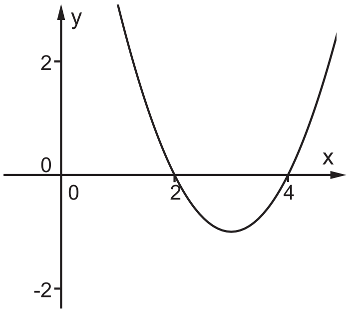


3 $f(x)=2-|x|$

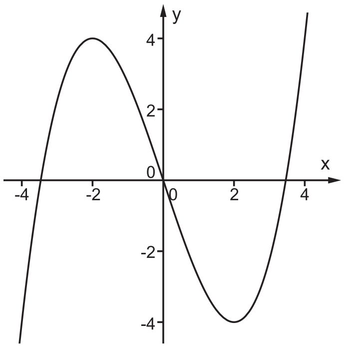


ژ ڕاهێنانا **4** هەتا **10**، ماوەیێن بەرەڤ زێدەبوونا نەخشەیێ و ماوەیێ بەرەڤ کێمبوونێ دیاربکە

4 $f(x)=x^2-6x+8$

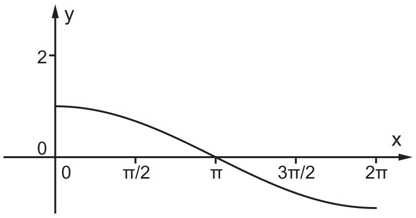


5 $f(x)=\frac{x^3}{4}-3x$



6 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$

$0<x<2\pi$



7 $f(x)=\frac{1}{x^2}$

8 $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

9 $f(x)=27x-x^3$

10 $f(x)=x-2\cos x \quad 0<x<2\pi$

ژ ڕاهێنانا **11** هەتا **13**، بەهایێن شلۆقە بۆ نەخشەیێ هەژماربکە:

11 $f(x)=x^2(x-3)$

12 $f(x)=x^2(x^2-4)$

13 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

ژ راهێنانا 14 هەتا 22، (أ) بەهایێن شلۆقە بهەژمێرە. (ب) ماوەیێن بەرەڤ زێدەبوون و بەرەڤ کێمبونا نەخشەیێ دیاربکە. (ج) تاقیکرنا داتاشراویێ ئێکێ بۆ دیارکرنا بەهایێن دوماهیێن خوجهی بکاربینە:

14 $f(x)=x^2-6x$

15 $f(x)=2x^3+3x^2-12x$

16 $f(x)=x^2(3-x)$

17 $f(x)=\frac{x^5-5x}{5}$

18 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-4$

19 $f(x)=5-|x-5|$

20 $f(x)=x+\frac{1}{x}$

21 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$

22 $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x+1}$

ژ راهێنانا 23 و 24، (أ) بهایێن شلوقە بهەژمێرە. (ب) ماوەیێن بەرەڤ زێدەبوونا نەخشەیێ و بەرەڤ کێمبوونێ دیاربکە. (ج) تاقیکرنا داتاشراویێ ئێکێ بۆ دیارکرنا بەهایێن دوماهیێن خوجهی بکاربینە:

(بتنێ کارێ خو ئەنجام بدە ل ماوەیێ $]0, 2\pi[$ ( ).

23 $f(x)=\frac{x}{2}+\cos x$

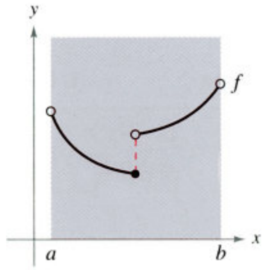
24 $f(x)=(\sin x)(\cos x)$

25 $f(x)=\cos^2(x)$

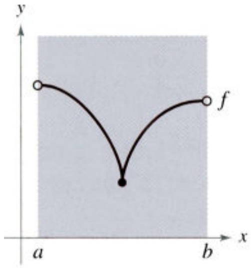
26 $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$

ژ راهێنانا 25 هەتا 38، دیاربکە ئەرێ نەخشەیێ بچووکترین بەهایێ خوجهی ل ماوەیێ $]a, b[$ هەیە، یان نە، پێ چەماوەیێ وی دڤی ماوەیی دا.

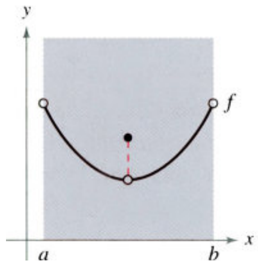
27



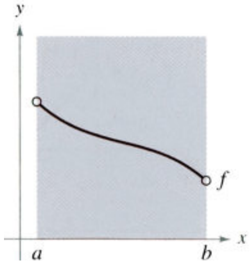
28



29



30



2-4

تاقیکرنا داتاشراویٚ دوویٚ

Second Derivative Test

ئارمانج:

- دیارکرنا وان ماوەیێن چەماوەیێ نەخشەیێ دناڤ دا یێ ناڤچال بیت یان کومدبیت.
- دیارکرنا خالێن وەرگێرانێ بوٚ چەماوەیێ نەخشەیەکێ.
- تاقیکرنا داتاشراویٚ دوویٚ بوٚ پوٚلینکرنا بەهایێن دوماهیێن خوٚ جهی نەخشەیێ بکاردئینن.

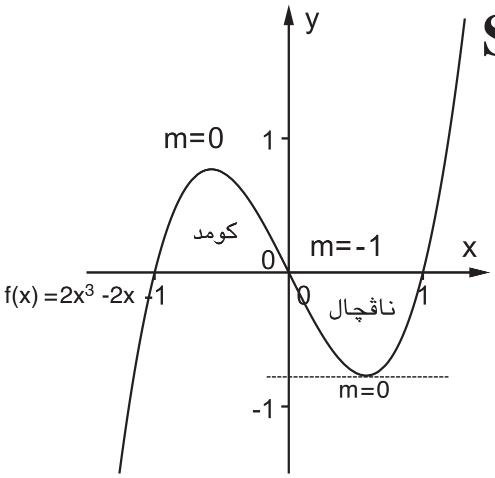
زاراڤ

Vocabulary

ناڤچال	Concave
کومد	Convex

ناڤچال و کومد

هەکەر f نەخشەیەك بیت شیانا داتاشراویٚ هەبیت دماوەیەکێ ڤەکری دا، و داتاشراویٚ وێ یێ ئێکێ بەرەڤ زێدەبوون بیت دڤێ ماوەی دا. دێ چەماوەیێ وێ نەخشەیێ یێ **ناڤچال** بیت دڤێ ماوەی دا، لێ هەکە داتاشراویٚ بەرەڤ کێمبوون بیت دڤێ ماوەی دا، چەماوەیێ وێ دێ یێ **کومد** بیت دڤێ ماوەی دا



بەریٚ خو بدە چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=2x^3-2x$ ل وێنەیێ بەرامبەر. ئەڤ چەماوە یێ کومدە ل ماوەیێ $]-1, 0[$ و یێ ناڤچالە ل ماوەیێ $]0, 1[$.

چەماوەیێ نەخشەیێ لێکەفتەك هەیە ل خالا $(0, 0)$ ، کو ل وێ خالێ چەماوە ژ کومد بوٚ ناڤچال دهێتە گوٚهوٚرین.

تاقیکرنا کومد و ناڤچال

f نەخشەیەکە شیانا داتاشراویٚ دوو جاران هەیە ل ماوەیێ ڤەکری I.

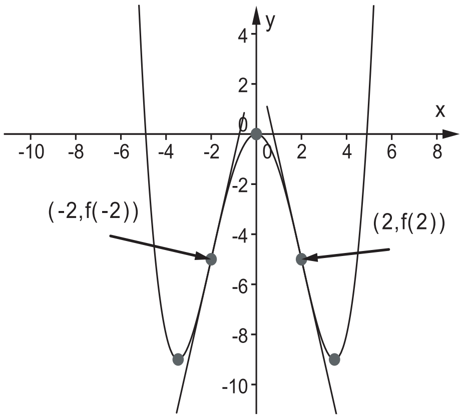
1. هەکە $f''(x)>0$ دماوەیێ I دا، دێ چەماوەیێ نەخشێ یێ ناڤچال بیت ل ماوەیێ I.

2. هەکە $f''(x)<0$ دماوەیێ I دا. چەماوەیێ نەخشەیێ دێ یێ کومد بیت دڤی ماوەیدا.

نموونـــــه 1

دیارکرنا کومد و ناڤچال

ماوەیێن کومد و ناڤچال بوٚ نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{2}x^2$ دیاربکە



شیکار

داتاشراویٚ ئێکێ یێ نەخشەیێ دبیتە $f'(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$ و داتاشراویٚ دوویٚ دبیتە $f''(x)=\frac{3}{4}x^2-3$.

یا دیارە $f''(x)=0$ دەمێ $x=\pm 2$.

ل رەخەکێ دی $f''(x)>0$ دهەردوو ماوەیان دا $]-\infty, -2[$ و $]2, +\infty[$ و $f''(x)<0$ د ماوەیێ $]-2, 2[$ دا. و ئەڤە دیاردکەت کو چەماوەیێ نەخشەیێ یێ ناڤچالە ل ماوەیێ $]-2, 2[$ و یێ کومدە ل هەردوو ماوەیان $]-\infty, -2[$ و $]2, +\infty[$.

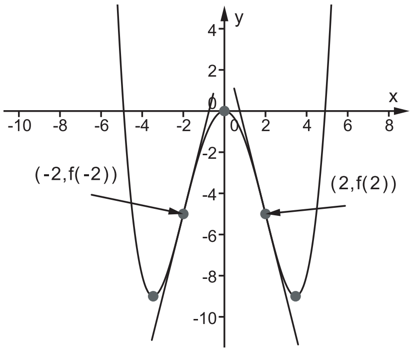
تو دشێی ئەڤێ بوری د ڤێ خشتەیێ دا پوٚختە بکەی:

x	$-\infty \quad\quad -2$	$-2 \quad\quad 2$	$2 \quad\quad +\infty$
$f''(x)$	+	−	+
چەماوەیێ $f(x)$	∪	∩	∪

خالا چاڤدێرییێ

1. ماوەیێن ناڤچال و کومد بۆ نەخشەیا $f(x)=x^4-4x^2+1$ دیاربکە.

خالێن وەرگێڕانێ



هەکە تو ڤەگەرییە چەماوەیێ نەخشەیا ل نموونە (1) دێ بینی کو ئەو چەماوە ل خالا $(-2, f(-2))$ ژ ناڤچال بۆ کومد دهێتە گۆهۆڕین، و ل خالا $(2, f(2))$ ژ کومد بۆ ناڤچال دهێتە گۆهۆڕین. دبێژنە هەر ئێکێ ژ هەروو خالان خالا وەرگێڕانێ.

پێناسەیا خالا وەرگێڕانێ

هەکە f نوخشەیەکا بەردەوام بیت، و هەکە چەماوەیێ وێ لێکەفتەك هەبیت ل خالا $(c, f(c))$ ، ئەو خالە دێ بیتە خالا وەرگێڕانێ بۆ نەخشەیێ و بۆ چەماوەیێ وێ، هەکە چەماوە ل ڤێ خالێ ژ ناڤچال بۆ کومد، یان ژ کومد بۆ ناڤچال هاتە گۆهۆڕین.

ژبیرنەکە

ل پێناسەیا خالا وەرگێڕانێ دڤێت چەماوەیێ نەخشەی لێکەفتەك هەبیت لنك ڤێ خالێ.

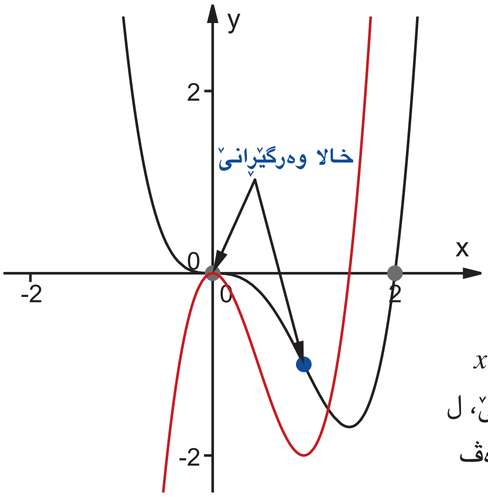
بۆ دیارکرنا خالێن هەلبژارتین کو ببنە خالێن وەرگێڕانێ، ئەوان بەهایێن x دیاربکە کو $f''(x)=0$ یان $f''(x)$ نەبیت.

سەلمێنراوا 4-3 خالا وەرگێڕانێ

هەکە $(c, f(c))$ خالا وەرگێڕانا نەخشەیەکێ بیت، دێ $f''(c)=0$ یان $f''(c)$ نینە.

نموونـــە 2

دیارکرنا خالێن وەرگێڕانێ



خالێن وەرگێڕانێ بۆ نەخشەیا $f(x)=x^4-2x^3$ دیاربکە، پاشی ماوەیێن ناڤچال و کومد بۆ چەماوەیێ نەخشەیێ دیاربکە.

شیکار

داتاشراوێ ئێکێ بۆ نەخشەی دبیتە $f'(x)=4x^3-6x^2$ و داتاشراوێ دووێ دبیتە $f''(x)=12x^2-12x$ ، $f''(x)=0$ ل $x=0$ و $x=1$

چەماوەیێ سۆر دبیتە چەماوەیێ داتاشراوێ ئێکێ، ل ڤێ چەماوەی دیاردبیت کو داتاشراوێ ئێکێ بەرەڤ زێدەبوونە ل ماوەیێ $]-\infty, 0[$ ، ئەڤە وێ ئێکێ دگەهینت کو:

چەماوەییێ نەخشەیێ یێ ناڤچالە دڤی ماوەی دا. ل رەخەکی دی داتاشراویێ ئێکێ یێ نەخشێ بەرەڤ کێمبوونە ل ماوەیێ $]0, 1[$، و ئەڤە وێ ئێکێ دگەهینیت کو چەماوەییێ نەخشێ یی کومدە دڤی ماوەی دا. چەماوەییێ نەخشەیێ ژ ناڤچال بۆ کومد دهێتە گۆهۆڕین ل خالا $(0, 0)$ و ئەڤە وێ ئێکێ دیاردکەت کو ئەڤ خالە دبیتە خالا وەرگێڕانێ. ل رەخەکێ دی، داتاشراویێ ئێکێ بەرەڤ زێدەبوونە د ماوەیێ $]2, +\infty[$دا و ئەڤە دیاردکەت کو چەماوەییێ نەخشەیێ یێ ناڤچالە دڤی ماوەی دا. چەماوەییێ نەخشەی ژ کومد بۆ ناڤچال دهێتە گۆهۆڕین ل خالا $(1, -1)$ و ئەڤە وێ ئێکێ دیاردکەت کو ئەڤ خالە دبیتە خالا وەرگێڕانێ.

تێبینی بکە

نەخشەکە لە $x = 0$ و $x = 2$ لێکەوتی هەیە.

خالا چاڤدێریێ

2. خالێن وەرگێڕانێ بۆ نەخشەیا $f(x) = -x^4 + 2x^3$ دیاربکە، پاشی ڤەکولینێ ل سەر کومد و ناڤچالیا چەماوەییێ نەخشەیێ بکە.

سەرباری تاقیکرنا کومد و ناڤچالیا چەماوەییێ نەخشەی، داتاشراویێ دوویێ هاریکارییێ دکەت بۆ پۆلینکرنا بەهایێن دوماهیین خۆجهی ل ناڤ مەزنترین بەهایان و بچووکترین بەهایان.

ئەڤ تاقیکرنە پشتبەست دبیت ل سەر وێ راستییێ کو کومدبوونا چەماوەییێ نەخشەیێ ل هاوسیێن خالا $(c, f(c))$ دەمێ $f'(c) = 0$، دڤێت $f(c)$ ببیتە مەزنترین بەهایی خۆجهی و هەروەسا ناڤچال بوونا چەماوەییێ نەخشەی ل هاوسیێن خالا $(c, f(c))$ دەمێ $f'(c) = 0$، دڤێت $f(c)$ ببیتە بچووکترین بەهایێ خۆجهی

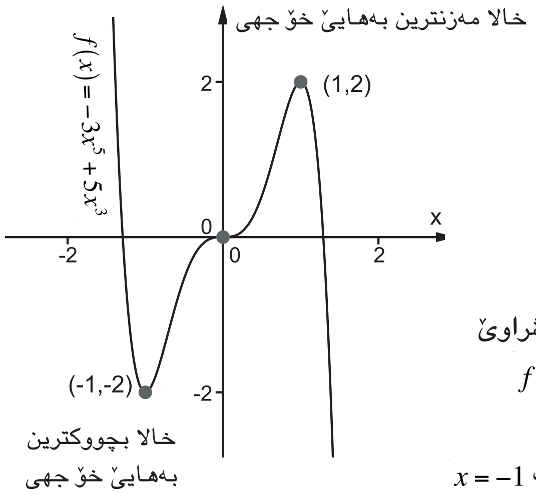
تاقیکرنا داتاشراویێ دوویێ

$f(x)$ نەخشەیەکە $f'(c) = 0$ ساخدکەت و $f''(x)$ یە پێناسەکرییە ل هاوسیێن $(c, f(c))$.

1. هەکە $f''(c) > 0$، دێ خالا $(c, f(c))$ بچووکترین بەهایی خۆجهی بۆ نەخشەیێ نوێنیت، چونکی ئەو خالە دکەڤیتە دناڤ ناڤچالیێدا.

2. هەکە $f''(c) < 0$، دێ خالا $(c, f(c))$ مەزنترین بەهایێ خۆجهی بۆ نەخشەییێ نوێنیت چونکی ئەو خالە دکەڤیتە دناڤ کومدێدا.

هەکە $f''(c) = 0$، تاقیکرنا داتاشراویێ دوویێ بکێر ناهێت، دڤێت تاقیکرنا داتاشراویێ ئێکێ بکاربینن.



نموونە 3

بکارئینانا تاقیکرنا داتاشراویێ دوویێ

بەهایێن دوماهیێن خۆجهی بۆ نەخشەیا $f(x) = -3x^5 + 5x^3$ بهەژمێرە.

شیکار

داتاشراویێ ئێکێ بۆ نەخشەیێ دبیتە:

$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2)$ و داتاشراویێ

دوویێ بۆ نەخشەی دبیتە $f''(x) = 30(-2x^3 + x)$

$f'(x) = 0$ دەمێ $x = -1$ و $x = 0$ و $x = 1$

نەخشە بچووکترین بەهایێ خۆجهی وەردگریت $x = -1$

دەمێ $f''(-1) = 30(-2(-1)^3 + (-1)) = 30 > 0$ ·

و نەخشە مەزنترین بەهایێ خوجهی وەردگریت دەمێ $x = 1$ دێ $f''(1) = 30\ (-2 \times 1^3 + 1) = 30 < 0$

و چونکی $f''(0) = 0$ ، لەوا تاقیکرن سەرکەفتی نابیت ژبۆ دیارکرنا دوماهیا خوجهی ل $x = 0$.

داتاشراویێ ئێکێ بکاربینە دا دیاربیت کو نەخش بەری $x = 0$ وپشتی وێ بەرەڤ زێدەبوونە و ئەڤە دیاردکەت کو ل وێ خالێ بەهایێ دوماهیا خۆجهی نینە.

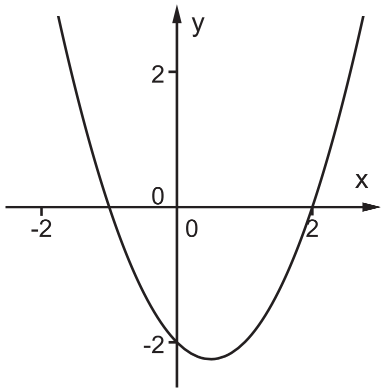
خالا چاڤدێریێ

3. خالێن دوماهیێن خۆجهی بۆ نەخشەیا $f(x) = x^5 - 0.15x^3$ بهەژمێرە.

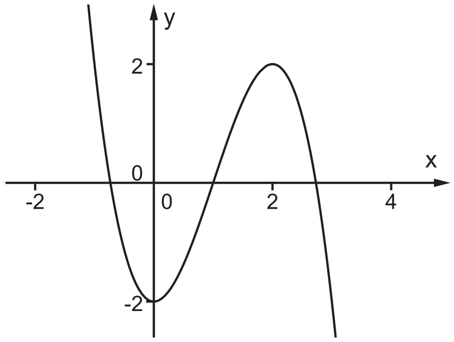
2–4 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا **1** هەتا **4** ، وان ماوەیێن ڤەکری دیاربکە کو چەماوەیێ نەخشەیێ تێدا یی ناڤچال بیت یا کومدبیت.

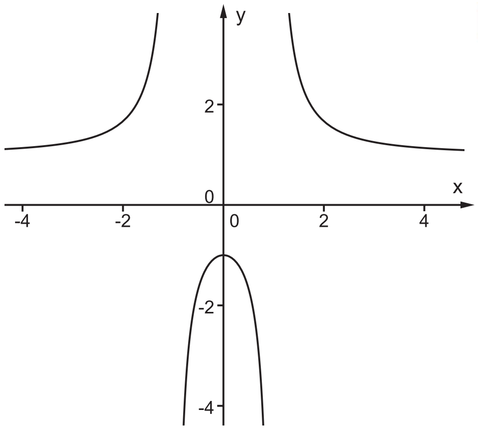
1



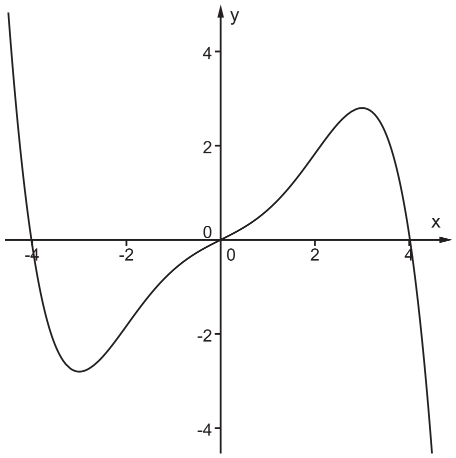
2



3



4



ژ ڕاهێنانا **5** هەتاتا **11** ، خالێن وەرگێڕانێ هەژماربکە، و ماوەیێن ناڤچال و کومد بۆ چەماوەیێ نەخشەیێ دیاربکە.

5 $f(x)=x^3-6x^2+12x$

6 $f(x)=x\sqrt{x+3}$

7 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

8 $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ ل ماوەیێ $[0, 4\pi]$

9 $f(x)=\frac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$ ل ماوەیێ $]0, 4\pi[$

10 $f(x)=\sin x+\cos x$ ل ماوەیێ $[0, 2\pi]$

11 $f(x)=x+2\cos x$ ل ماوەیێ $[0, 2\pi]$

ژ ڕاهێنانا **12** هەتا **17**، بەهاییێن دوماهییێن خوجهی [مەزنترین و بچووکترین بەها] بهەژمێرە، بکارئینانا داتاشراویێ دوویێ هەکە یە دشیاندا بوو.

12 $f(x)=x^4-4x^3+2$

13 $f(x)=-(x-5)^2$

14 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-3$

15 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

16 $f(x)=x+\frac{4}{x}$

17 $f(x)=\cos x-x$

دەربارەی چەمکان

18 f نەخشەیەکە و داتاشراویێ وێ نەخشەیەکا بەرەڤ زێدەبوونە. چەماوەیەکی (وێنەیەکی رۆنکری) بۆ f بکێشە دەمێ:–

أ $f'<0$ ب $f'>0$

19 f نەخشەیەکە و داتاشراویێ وێ نەخشەیەکا بەرەڤ کێمبوونە. چەماوەیەکی بۆ f بکێشە دەمێ:–

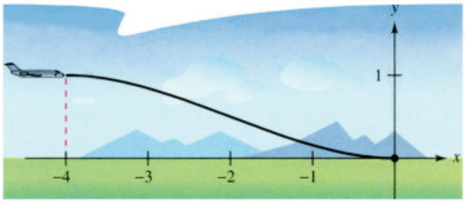
أ $f'<0$ ب $f'>0$

20 چەماوەیێ نەخشەیا f بکێشە خالا $(c, f(c))$ بخۆڤە بگرت دەمێ $f''(c)=0$ و $(c, f(c))$ نەبیتە خالا وەرگێڕانێ.

21 چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\sqrt[3]{x}$ وێنەبکە، و خالا وەرگێڕانێ ل سەر وێنەی دیاربکە. ئەرێ داتاشراویێ دووێ $f''(x)$ یێ پێناسەکرییە دخالا وەرگێڕانێ دا؟ بەرسڤا خو رۆنبکە.

22 بەهایێن a و b و c و d هەژماربکە، دەمێ نەخشەیا سێجایی $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ مەزنترین هەبیت ل خالا $(3, 3)$ و بچووکترین بەها هەبیت ل خالا $(5, 1)$ و خالا وەرگێڕانێ هەبیت ل خالا $(4, 2)$.

23 **هاتنە خوارێ یا فرۆکێ:** فرۆکەیەکێ دەست ب هاتنە خوارێ کر دەمێ ئەو ل بلنداهیا ئێك کیلۆمیتەر و ل دووریا 4 کیلۆمێتەران ژ رێرەوێ [مدرج] فرۆکەخانێ بوو [بەرێ خو بدە وێنەیێ بەرامبەر].



أ نەخشەیا سێجا $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ هەژماربکە کو ئەو رێرەوێ فرۆکێ ل ماوەیێ $[-4, 0]$ دنوێنت دەمێ دهێتە خوارێ.

ب ل کیدەرێ هاتنە خوارا فرۆکێ دێ بلەزترین تێکرا بیت؟

24 ئەڤا ل خوارێ دیاربکە: هەکە c نەخشەیەکا سێجای بیت و 3 شیکارێن راستی و جودا هەبن، ئەوێ نەخشەی دێ خالا وەرگێڕانێ هەبیت و پۆیێ وێ خالێ x دبیتە تێکرایێ هەرسێ شیکارێن نەخشێ.

دروستەیان نەیا دروستە؟ ژ راهێنانا 25 هەتا 28، دیاربکە هەکە رستەیا دروست بیت، رۆنبکە. و هەکە نەیا دروست بیت، ب دژە نموونەیەکێ بسەلمینە.

25 هەر چەماوەیەکی نەخشەیا سێجای بتنێ ئێك خالا وەرگێڕانێ هەیە.

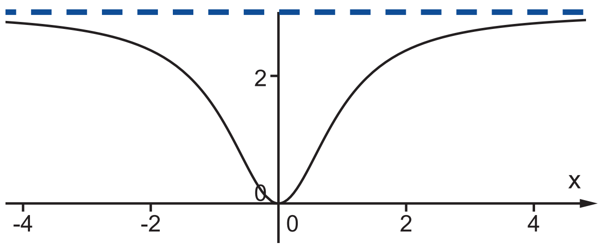
26 چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{x}$ یێ کومدە دەمێ $x<0$، و یێ ناقچالە دەمێ $x>0$، و خالا وەرگێڕانێ هەیە دەمێ $x=0$.

27 هەکە $f'(c)>0$، چەماوەیێ f دێ یێ ناقچال بیت دەمێ $x=c$

28 هەکە $f''(2)=0$، چەماوەیێ نەخشەیا f دێ خالا وەرگێڕانێ هەبیت دەمێ $x=2$.

3-4 ئارمانج ل بێدوماهیێ

Limits at Infinity



ئارمانج

- ئارمانجێن دیارکرین ل بێدوماهیێ دهەژمێرن.
- دەرکنارێن ئاسوێ بۆ چەماوەیێ نەخشێ دیاردکەن هەکە هەبن.
- ئارمانجێن نەدیارکرین ل بێدوماهیێ هەژماردکەن.

زاراڤ
Vocabulary

دەرکنارێن ئاسۆیی
Horizontal Asymptotes

دەرکنارێن ستوونی
Vertical Asymptotes

ئارمانج ل بێدوماهیێ

ئەڤ وانە ڤەکولینێ ل سەر سیفەتێ نەخشەیێ دکەت دەمێ x بێدوماهی زێدەدبیت یان کێم دبیت. و ب ڤی شێوەی دەردبرن،
دەمێ $(x\to+\infty)$ یان $(x\to-\infty)$

وێنەیێ بەرامبەر چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\frac{3x^2}{x^2+1}$ دیاردکەت.
و دیاردکەت کو بەهایێ $f(x)$ نێزیکی 3 دبیت دەمێ x زێدەدبیت یان کێم دبیت بۆ بێدوماهیێ.
تو دشێی ب رێیا ژمارەی بگەهیە ڤێ ئەنجامێ هەر وەک ل خوارێ دیار.

x بێدوماهی کێم دبیت ← → x بێدوماهی زێدەدبیت

x	$-\infty \leftarrow$	-100	-10	-1	0	1	10	100	$\to +\infty$
$f(x)$	$3\leftarrow$	2.9997	2.97	1.5	0	1.5	2.97	2.9997	$\to 3$

$f(x)$ نێزیکی 3 دبیت ← → $f(x)$ نێزیکی 3 دبیت

خشتە دیاردکەت کو بەهایێ $f(x)$ نێزیکی 3 دبیت دەمێ x بێسنوور زێدە دبیت $(x\to+\infty)$ یان x بێسنوور کێم دبیت $(x\to-\infty)$، وان هەردوو ئارمانجان ل بێدوماهیێ ل سەر شێوەیێ ل خوارێ دێ نڤیسین

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$$ ئارمانجێ $f(x)$ ل بێدوماهییا سالب

و

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$$ ئارمانجێ $f(x)$ ل بێدوماهییا مووجەب

دەرکنارێن ئاسۆیی

مە ل نەخشەیا $f(x)=\frac{3x^2}{x^2+1}$ دیت، کو چەماوەیێ نەخشێ نێزیکی راستەهێلێ $y=3$ دبیت دەمێ x بێسنوور زێدەدبیت. دبێژن ئەڤ راستەهێلە **دەرکنارێ ئاسۆیە** بۆ چەماوەیێ نەخشەیێ.

پێناسەیا دەرکنارێ ئایۆیی

راستەهێلێ $y=a$ دبیتە درکنارێ ئاسۆیی بۆ چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)$ ، دەمێ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$
یان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$

سیفەتێن ئارمانجان ل بێدوماهیێ وەك سیفەتێن ئارمانجانە ل $x=c$ ، کو c ژمارەکا راستییە. و هەر وەسا هندەك سیفەتێن سەربار هەنە:

ئارمانج ل بێدوماهیێ

- هەکە r ژمارەیەکا رێژەی یە مووجەب بیت، دێ $\lim_{x\to+\infty}\frac{c}{x^r}=0$
- هەکەر r ژمارەیەکا رێژەی یە مووجەب بیت، و x^r یا پێناسەکری بیت ل بەهایێن x یێن سالب، دێ $\lim_{x\to-\infty}\frac{c}{x^r}=0$.

نموونە 1

هەژمارکرنا ئارمانجێ ل بێدوماهیێ

ئەڤێ ئارمانجێ بهەژمێرە $\lim_{x\to+\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right)$.

شیکار: ل دووڤ سیفەتێن ئارمانجان و سەلمیناوا پێشتر، تو دشێی بنڤیسی.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}5-\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=5-0=5$$

خالا چاڤدێرییێ 1. ئەڤێ ئارمانجێ بهەژمێرە $\lim_{x\to+\infty}\left(5-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$.

نموونە 2

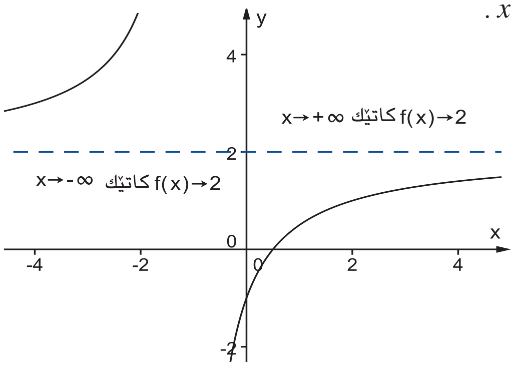
هەژمارکرنا ئارمانجێ ل بێدوماهیێ

ڤێ ئارمانجێ بهەژمێرە $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}$.

شیکار بەرێ خو بدێ کو هەر ئێك سەرە و ژێرە بەرەف $+\infty$ دچیت دەمێ x بێسنوور زێدە دبیت.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}=\frac{\lim_{x\to+\infty}(2x-1)}{\lim_{x\to+\infty}(x+1)}\to\frac{+\infty}{+\infty}$$

ئەڤە دبیتە بارەیەك ژ بارەیێن نەدیار. بۆ شیکارکرنا ڤێ پرسیارێ، ئانکو بۆ لادانا نەدیاریێ، هەر ئێکێ ژ سەرەیی و ژێرەی دابەشکە ل سەر x .



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\frac{\lim_{x\to+\infty}2-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=\frac{2-0}{1+0}=2$$

هەروەسا راستەهێلێ $y=2$ دبیتە دەرکنارێ ئاسۆیی بۆ نەخشەیێ ل رەخێ راستێ.. هەکە ل دووڤ ئارمانجێ نەخشەیێ بگەرێی دەمێ x بێسنوور کێم دبیت،

دێ بینی کو $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x+1}=2$ و راستەهێلێ $y=2$ ئەوژی دبیتە دەرکنارێ ئاسۆیی بۆ نەخشەیێ ژ رەخێ چەپێ.

مفا

دەمێ تو توشی شێوازەکی نە دیارکری بی، وەکو ل نموونەیا 2، سەرەیی و ژێرەیی دابەشکە ل سەر بلندترین هێزا x ئەوا ل ژێرەی.

خالا چاڤدێرییێ 2. ئەڤێ ئارمانجێ بهەژمێرە: $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}$

نموونـــه 3

بەراوردکرنا سێ نەخشەیێن رێژەی:

ڤان هەرسێ ئارمانجێن ل خوارێ بهەژمێرە:

أ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{3x^2+1}$ ب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5}{3x^2+1}$ ج $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3+5}{3x^2+1}$

شیکار

أ سەرەی و ژێرەی ل سەر x^2 دابەشبکە.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+5}{x^2}}{\frac{3x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{0+0}{3+0}=0$$

ب سەرەی و ژێرەی ل سەر x^2 دابەشبکە.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2+5}{x^2}}{\frac{3x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

ج سەرەی و ژێرەی ل سەر x^2 دابەشبکە.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+5}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3+5}{x^2}}{\frac{3x^2+1}{x^2}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{+\infty}{3}=+\infty$$

بۆ تە دیار دبیت کو ئارمانجێ سێیێ نەیی دیارکرییە، چونکی سەرە بێسنوور زێدە دبیت و ژێرەی نەگۆڕ دمینت و ناهێتە گوهۆڕین.

دیارکرنا دەرکنارێن ئاسۆیی بۆ نەخشەیێن رێژەی

1. هەکە پلەیا سەرەی ژ پلەیا ژێرەی کێم تر بیت، راستەهێلێ $y=0$ دێ بیتە دەرکنارێ ئاسۆیی بۆ وێ نەخشەیێ.
2. هەکە پلەیا سەرەی یەکسانی پلەیا ژێرەی بیت، راستەهێلێ $y=\frac{a}{b}$ دبیتە دەرکنارێ ئاسۆیی بۆ وێ نەخشەیێ. دەمێ a هاوکۆلکەیێ سەرەکی بیت بۆ سەرەی، و b هاوکۆلکەیێ سەرەکی بیت بۆ ژێرەی.
3. هەکە پلەیا سەرەی ژ پلەیا ژێرەی زێدەتر بیت، ئەوێ نەخشەێ دەرکنارێ ئاسۆیی نینە.

خالا چاڤدێریێ

3. ئەرێ نەخشەیا $f(x)=\frac{5x^3-2x^2}{x-2x^3}$ دەرکنارێ ئاسۆیی هەیە؟ هەکە بەرسڤا تە بەلێ بوو، هاوکێشا وێ دەرکناری بنڤیسە.

ل نموونەیێن پێشتر تە تێبینیا ڤێ کر: هەکە راستەهێلێ $y=a$ دەرکنارێ ئاسۆیی جەماوەیێ نەخشەێ بیت ل رەخێ راستێ، هەروەسا ئەو دبیتە دەرکنارێ چەماوەیێ نەخشەیێ ل رەخێ چەپێ. ئەڤە یا دروستە بۆ هەموو نەخشەیێن رێژەی، لێ بۆ هندەك نەخشەیێن دی نەیا دروستە، هەر وەك ل نموونەیا 4 دیاردبیت.

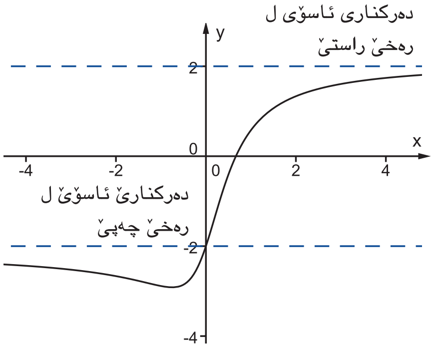
نموونـــــه 4

نەخشەیەکێ دوو دەرکنارێ ئاسۆیی یێن جودا هەنە

هەر ئارمانجەکی ل خوارێ بهەژمێرە. و هەردوو هاوکێشەیێن هەردوو دەکنارێن ئاسۆیی بۆ چەماوەیێ نەخشەیا $y=\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$ بنڤیسە

أ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

ب $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$



شیکار

أ هەکە $x>0$ تو دشێی بنڤیسی $x=\sqrt{x^2}$
هەکە سەرەیی و ژێرەی ل سەر x دابەشبکەی
دێ:-

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x-2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{3-0}{\sqrt{2+0}}=\frac{3}{\sqrt2}=\frac{3\sqrt2}{2}$$

ڤێجا $y=\frac{3\sqrt2}{2}$ دبیتە دەرکنارێ ئاسۆی ل رەخێ راستێ

ب هەکە $x<0$ تو دشێی بنڤیسی $x=-\sqrt{x^2}$ ، هەکە سەرەی و ژێرەی ل سەر x دابەشبکە
دێ:-

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3x-2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{3-0}{\sqrt{2+0}}=-\frac{3}{\sqrt2}=-\frac{3\sqrt2}{2}$$

ڤێجا $y=\frac{-3\sqrt2}{2}$ دبیتە دەرکنارێ ئاسۆیی ل رەخێ چەپی.

خالا چاڤدێریێ

4. دەرکنارێن ئاسۆیی بۆ نەخشەیا $f(x)=\frac{5x-3}{\sqrt{3x^2+2}}$ بنڤیسە.

ئارمانجێن نە دیارکرین ل $\pm\infty$

گەلەك نەخشە هەنە، بهایێن وان نێزیکی ئارمانجەکا دیارکری نابن، دەمێ x بێسنوورزێدە دبیت یان کێم دبیت. ژ ڤان نەخشەیان، نەخشەیێن رادەدار. پێناسەیێن ل خوارێ بۆ بەحسکرنا سیفەتێن نەخشەیێن رادەدار بکاردئینن یان بۆ وانێن دی ل$\pm\infty$.

پێناسەیا ئارمانجێن نەدیارکرین ل $\pm\infty$

1. نڤیسینا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ئەوێ دەردبڕت کو بهایێ $f(x)$ بێسنوور زێدە دبیت دەمێ x بێسنوور زێدە دبیت.

2. نڤیسینا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ئەوێ دەردبڕت کو بهایێ $f(x)$ بێسنوور کێم دبیت دەمێ x بێسنوور کێم دبیت.

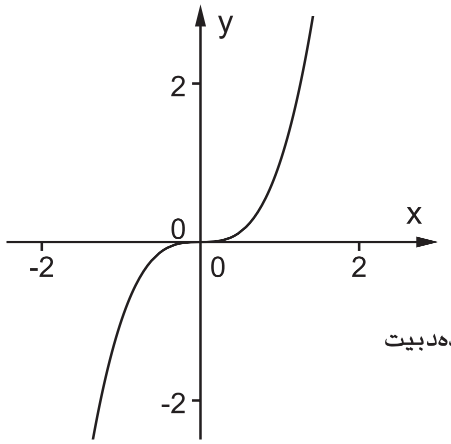
هەردوو نڤیسین $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ب ئێك رێکێ دهێنە پێناسەکرن.

نموونــــه 5

هەژمارتنا ئارمانجێن نەدیارکرین ل $\pm\infty$

ئەڤێن ل خوارێ بهەژمێرە:

أ $\lim_{x\to+\infty} x^3$ ب $\lim_{x\to-\infty} x^3$



شیکار

أ دەمێ x بێسنوور زێدە بیت، دێ x^3 بێسنوور زێدەدبیت

و ئەڤە دبیت $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

ب دەمێ x بێسنوور کێم بیت، دێ x^3 بێسنوور کێم بیت و ئەڤە دبیت $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

جەماوەیێ نەخشەیا $f(x) = x^3$ ڤان ئەنجامان دسەلمینت.

خالا چاڤدێریێ **5.** ئەنجامێن ئەڤێن ل خوارێ بهەژمێرە. أ $\lim_{x\to+\infty} x^2$ ب $\lim_{x\to-\infty} x^2$

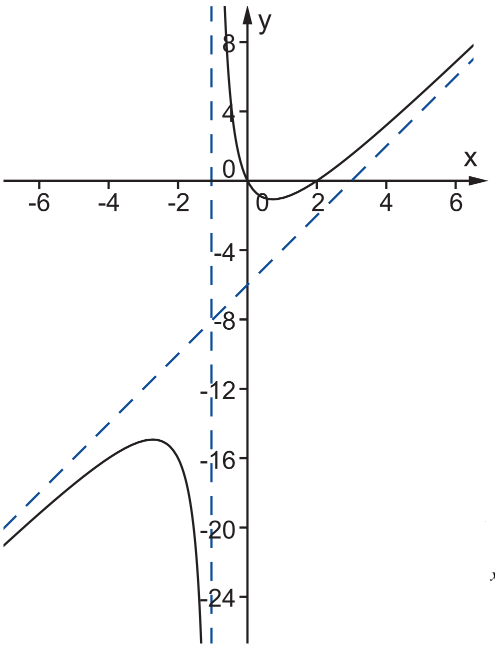
نموونــــه 6

هەژمارتنا ئارمانجێن نەدیارکرین ل $\pm\infty$

ئەنجامێن ئەڤێن ل خوارێ بهەژمێرە.

أ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1}$

ب $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1}$



شیکار

سەرەی ل سەر ژێرەی دابەشبکە: .

$$\frac{2x^2-4x}{x+1} = 2x-6+\frac{6}{x+1}$$

أ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(2x-6+\frac{6}{x+1}\right) = +\infty$

ب $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty}\left(2x-6+\frac{6}{x+1}\right) = -\infty$

ئەڤ ئەنجامەنە ئەوێ دیاردکەن کو سیفەتێن نەخشەیا $f(x)=\frac{2x^2-4x}{x+1}$ ل $\pm\infty$ هەمان سیفەتێن نەخشەیا $g(x)=2x-6$ هەنە. ل وانەیێن ئایندە د فێری ڤی جورێ ئارمانجان بی ب وێنەیێ رۆنکرنێ، و دیاردبیت کو راستەهێلا $y=2x-6$ دبیتە دەرکناری لاری بۆ جەماوەیێ نەخشەیێ وەك ل وێنەیێ سەری دیاردبیت.

خالا چاڤدێریێ **6.** ئەڤێن ل خوارێ بهەژمێرە: أ $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2-x+1}{x-1}$ ب $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1}$

نموونـــــه 7

هەژمارتنا ئارمانجێن نەخشەیێن سێگۆشەیی ل $\pm\infty$

ئەنجامێن ل خوارێ بهەژمێره:

أ $\lim_{x\to+\infty} \sin x$

ب $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$

شیکار

أ دەمێ بهایێ x ب ئاراستەیێ $+\infty$ زێدەدبیت، بهایێ نەخشەیا $\sin x$ ل ناڤبەرا -1 و 1 بەردەوام دوبارە دبیت. لەورا $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ نینە.

ب $-1 \leq \sin x \leq 1$

چونکی x بەرەڤ $+\infty$ دچیت $x > 0$

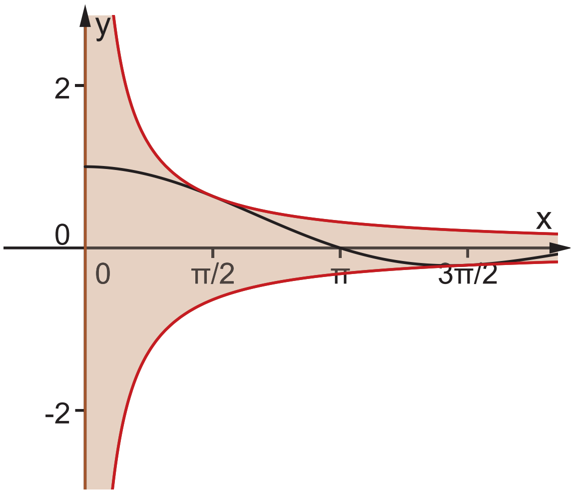
دێ: $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$

ڤێجا ل دووڤ سەلمێنراوا دووا

مەرج دێ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

هەر وەك دیار ل وێنەیێ بەرامبەر.



خالا چاڤدێریێ 7. ئەنجامێن ل خوارێ بهەژمێره:

أ $\lim_{x\to+\infty} \cos x$

ب $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}$

3–4 ڕاهێنان

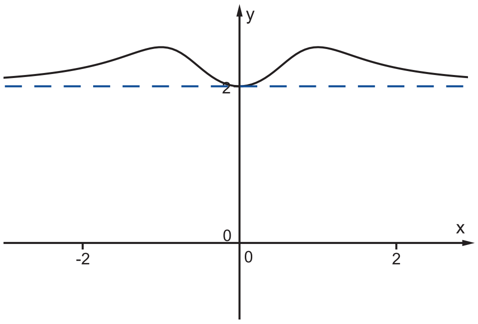
هەردوو ڕاهێنانان 1 ، 2 ب شێوازێ خو رۆنبکە:

1 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$

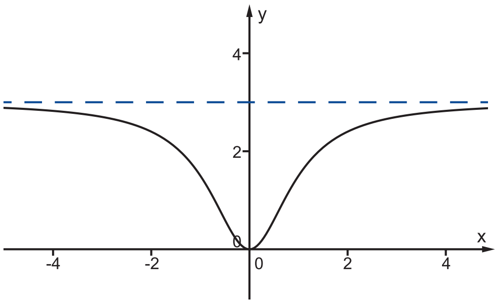
2 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$

ژ ڕاهێنانا 3 هەتا 6، چەماوەیێ هەر نەخشەیەکێ بکارئینانا دەرکنارێن ئاسۆیی دیاربکە:

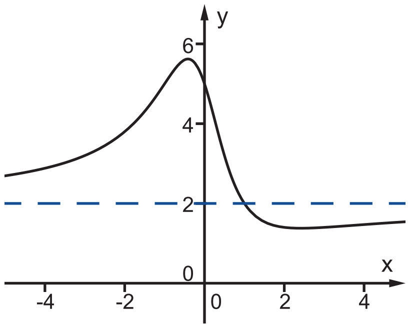
أ



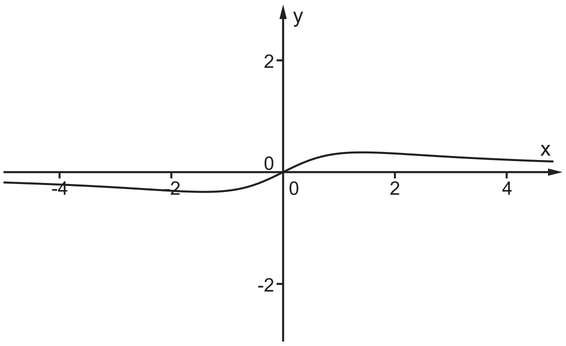
ب



ج



د



3 $f(x)=\frac{x}{x^2+2}$

4 $f(x)\frac{3x^2}{x^2+2}$

5 $f(x)=\frac{2x^2-3x+5}{x^2+1}$

6 $f(x)=2+\frac{x^2}{x^4+1}$

7 ئەنجامێ ئەڤێن ل خوارێ بهەژمێرە، دەمێ $f(x)=5x^3-3x^2+10$

أ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$

ب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3}$

ج $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^4}$

ژ ڕاهێنانا 8 هەتا 15، ئارمانجێ داخوازکری بهەژمێرە.

8 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{3x+2}$

9 $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2}{9x^3-3x^2+7}$

10 $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x+3}$

11 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x-\frac{4}{x^2}\right)$

12 $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$

13 $\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}$

14 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x+\sin x}$

15 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin 2x}{x}$

دەربارەی چەمکان

16 f نەخشەیەکە بەردەوامە و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$ ساخدکەت. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ بهەژمێرە هەکە یا دشیاندا بیت ل هەردوو بارەیێن ل خوارێ:

أ جەماوەیێ نەخشەیا f یێ هاوجێیە دگەل تەوەرێ y.

ب جەماوەیێ نەخشەیا f یێ هاوجێیە دگەل خالا بنەرەت.

ژ ڕاهێنانا 17 هەتا 22، ئێکودووبڕینان دگەل هەردوو تەوەران، و هاوجێ بوونێ و دەرکناران دیاربکە.

17 $f(x)=\frac{2+x}{1-x}$

18 $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$

19 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$

20 $f(x)=2-\frac{3}{x^2}$

21 $f(x)=3+\frac{2}{x}$

22 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

دروستە یان نەیا دروستە؟ ل هەردوو ڕاهێنانان 23 و 24، دیاربکە هەکە دەستەواژەیا ڕستەیا دروست بیت، هۆیێ وێ ڕوونبکە، و هەکە نەیا دروست بیت ب دژە نموونەیەکێ بسەلمینە.

23 هەکە $f'(x)>0$ بەهایێ x هەر چەند بیت، دێ نەخشەیا f بێسنور بەرەڤ زێدەبوون بیت.

24 هەکە $f'(x)<0$ بەهایێ x هەر چەند بیت، دێ نەخشەیا f بێسنوور بەرەڤ کێمبوون بیت.

بەشێ 4

ئەزموونا نیڤا بەشی

1–4 بەرەڤ زێدەبوون و بەرەڤ کێمبوونا نەخشەیان.

1 ماوەیێن بەرەڤ زێدەبوون و بەرەڤ کێمبوونا هەر نەخشەیەکی دیاربکە.

أ $f(x)=x^3-x$ ب $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ ج $f(x)=x+\cos 2x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

2–4 بەهایێن دوماهیێ

2 خشتەیێ گۆهۆرینان بۆ هەر نەخشەیەکا ل خوارێ دروستبکە، و مەزنترین بەها و بچووکترین بەهایێن خوجهی هەژماربکە.

أ $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$ ب $f(x)=\sin^2 x\left(-\frac{\pi}{2}<x\leq\frac{\pi}{2}\right)$

2–4 خالێن وەرگێڕانێ

3 خالێن وەرگێڕانێ بۆ هەر نەخشەیەکا ل خوارێ دیاربکە، و ماوەیێن ڤەکری کو نەخشە تێدا یا ناڤچال یان کومد بیت دیاربکە:

أ $f(x)=2x^3-3x^2$ ب $f(x)=2\cos(\pi x)\quad(0\leq x\leq 2)$

4 بەهایێن a ، b ، c بهەژمێرە، بۆ زانینا نەخشەیا $f(x)=ax^3+bx^2+c$ خالا وەرگێڕانێ هەیە ل $x=-1$ و لێکەفتێ جەماوەیی ل وێ خالێ دبیتە $y=-3x-1$.

5 هەکە. رستەیا دروست بیت هۆیی وێ رۆنبکە، و هەکە نە یا دروست بیت ب دژە نموونەیەکێ بسەلمینە:

أ خالا $(1, 0)$ خالا وەرگێڕانێیە بۆ نەخشەیا $f(x)=(x-1)^4$.

ب هەکە $f''(c)>0$ ، لارێ لێکەفتێ چەماوەیێ وێ نەخشەیێ دێ یێ مووجەب بیت ل $x=c$.

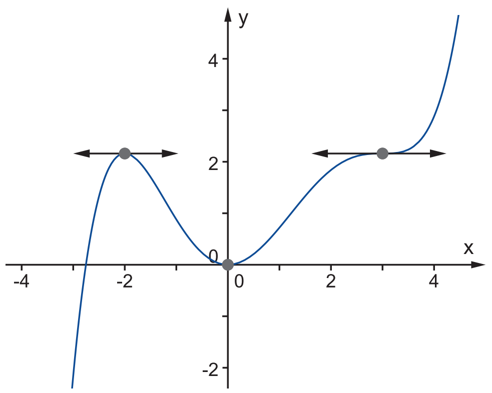
3–4 ئارمانج ل بێدوماهیێ

6 هەر ئارمانجەکێ بهەژمێرە:

أ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-2x)^2}{2x^2+1}$ ب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2x^2}-1+3x\right)$ ج $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x-1}{|x-2|}$

3–4 خشتەیێ گۆهۆرینێ

7 وێنەیێ بەرامبەر چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)$ دیاردکەت، خشتەیێ ل خوارێ تەمامبکە بکارئینانا هێمایێن (+ ، − ، سفر)



	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$x=-2$			
$x=0$			
$x=3$			
$x=-3$			
$x=4$			

4–4

وێنە کێشانا چەماوەیێن (وێنەیێن رونکرنیٚ) نەخشەیان Curve Sketching

ئارمانج

• نەخشەیێ شروڤەدکەن و چەماوەیێ وێ وێنەدکەن.

زاراڤ
Vocabulary

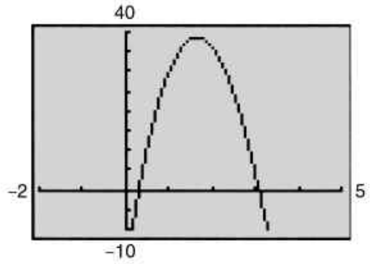
دەرکەنارێ لاری
Slant Asymptote

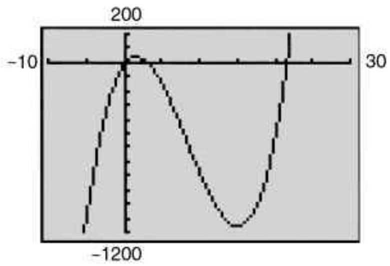
شلۆڤەکرنا چەماوەیێن نەخشەیان

نابیت گرنگیا بکارئینانا چەماوەیێن نەخشەیان ل بیرکاریێ بێتە فراموشکرن. ئەندازەیا شیتەلکرنیٚ ئەوا زانایێ فەرەنسی دیکارتی دانایی، ب ئاوایەکی بەرچاڤ هاریکارییا پێشئێخستنا هەژمارکرنا جوداکاریێ و تەمامکاریێ کر، ئەوا ل ناڤەراستا سەدێ هەڤدێ دەستپێکری. زانایی فەرەنسی لا گرانج ئەڤ کارە ب ڤی شێوەیی دەربری «دەمێ هەر ئێکێ جەبر و ئەندازەییێ ل رێرەوێ خو یێ تایبەت کاردکر، پێشکەفتنا هەر ئێکێ ژ وان یا هێواش بوو، و بجهئینانێن وان یێن کێمبوون. ب ئێکودو گەهشتنا هەردووان بوو هۆیەکی تەمامکەر بۆ هەردووان.

هەتا نوکە تو فێری گەلەك چەمکان بوویە، کو ئەو هاریکاریێ دکەن بۆ شلۆڤەکرنا چەماوەیێن نەخشەیان.

• ئێکودوو برین دگەل هەردوو تەوەرێن پۆتانان.
• هاوجێبوون.
• بوار و مەودا.
• بەردەوامی.
• دەرکنارێن ستوونی و ئاسۆیی.
• داتاشراو.
• بەهایێن دوماهیا خۆجهی.
• خالێن وەرگێرانیٚ.
• دەرکنار.
• ئارمانج ل بێدوماهییٚ.





دەمێ تو چەماوەیێ نەخشەیەکێ ب دەستی «یان ب بژمێرا روونکرنیٚ» وێنە دکەی، ئەوێ بزانە کو تو وێنەییێ بەشەکی چەماوەی وێنە دکەی، و تو نە شێی وێنەیی ب تەمامی وێنەبکەی. بریار دانا تە بۆ دیارکرنا بەشەکی چەماوەیی تە دڤێت وی وێنەبکەی بریارەکا گرنگە. بەرێ خو بدە هەردوو وێنەیێن بەرامبەر ب رایێ تە کیژ هەردووان ب شێوەیەکی باشتر نەخشەیا $f(x)=x^3-25x^2+74x-2$ دنوێنت؟

یا ئاشکرایا کو وێنەییێ دوویێ یێ نەخشەییێ ب شێوەیەکی باشتر دنوێنیت، بۆ بەرسڤدانا ڤێ پرسیارێ دڤێت تو جوداکاریێ بکاربینی بۆ شلۆڤەکرنا داتاشراوێ ئێکێ و دوویێ یێ نەخشەیێ.

ئەڤێن ل خوارێ هندەك رێنماینە بۆ دیارکرنا بەشەکی چەماوەی ب شێوەیەکێ باش. و دڤێت ئەڤ بەشە وان دانەیێن دڤان رێنماییاندا هاتین بخۆڤە بگرت.

رێنماییێن وێنەکرنا چەماوەیێ نەخشەیێ (وێنەیێ روونکرنێ)

1. بوار و مەودایێ نەخشەیێ دیاربکە.

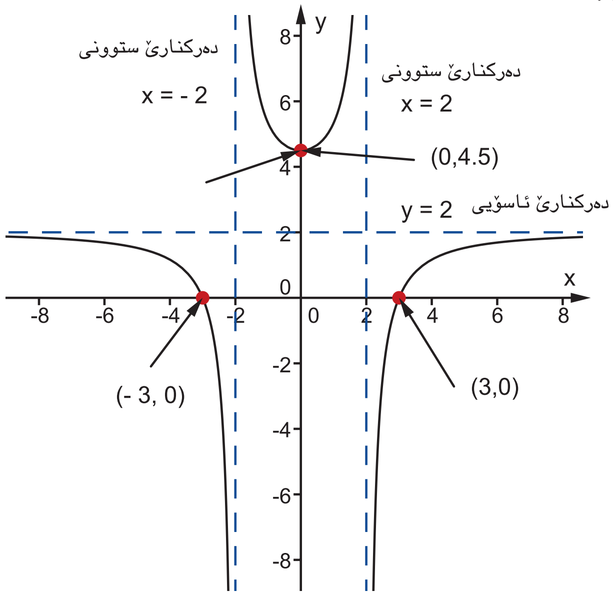
2. ئێکودوو بڕینێن چەماوەیێ نەخشەیێ دگەل هەردوو تەوەرێن پۆتانان دیاربکە، پاشی دەرکناران و هاوجێبوونێ دیاربکە.

3. بەهاییێن x ئەوێن $f'(x)$ و $f''(x)$ دکەنە سفر یان هەبوون نەبیت دیاربکە. ڤان ئەنجامان بۆ دیارکرنا بەهاییێن دوماهییا خۆجهی و خالێن وەرگێرانا نەخشەیێ بکاربینە.

نموونە 1

وێنەکێشانا چەماوەیێ نەخشەیا رێژەیی

چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\dfrac{2(x^2-9)}{x^2-4}$ وێنەبکە.



شیکار

داتاشراوێ ئێکێ: $f'(x)=\dfrac{20x}{(x^2-4)^2}$

داتاشراوێ دووێ: $f''(x)=\dfrac{-20(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$

ئێکودوو بڕینێن ئاسۆیی: $(-3,0)$ و $(3,0)$

ئێکودوو بڕینێن ستوونی: $\left(0,\frac{9}{2}\right)$

دەرکنارێن ستوونی: $x=-2$ و $x=2$

دەرکنارێن ئاسۆیی: $y=2$

بەهاییێن شلوقە: $x=0$

خالێن وەرگێرانێ: نینە.

بوارێ نەخشەیێ: هەموو ژمارەیێن راستینە ژبلی -2 و 2

هاوجێبوون: هاوجێیە دگەل تەوەرێ y

ماوەیێن تاقیکرنێ و بەهاییێن وان: $]-\infty,-2[\quad -2\quad]-2,0[\quad 0\quad]0,2[\quad 2\quad]2,+\infty[$

خشتەیێ ل خوارێ چاوانیا بکارئینانا ماوەیان و بەهاییێن تاقیکرنێ پۆختە دکەت بۆ دیارکرنا سیفەتێن چەماوەیێ نەخشەیێ پێ ل سەرێ.

خشتەیێ داتاشراوێ ئێکێ و دووێ

سیفەتێن چەماوەی	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	x
بەرەڤ زێدەبوون، کومد	−	−		$-\infty<x<-2$
مەزنترین بەهایێ خۆ جهی	پێناسە نەکرییە	پێناسە نەکرییە	پێناسە نەکرییە	$x=-2$
بەرەڤ کێمبوون، کومد	+	−		$-2<x<0$
دەرکنارێن ستوونی	+	0	4.5	$x=0$
بەرەڤ کێمبوون، ناڤچال	+	+		$0<x<2$
بچووکترین بەهایێ خوجهی	پێناسە نەکرییە	پێناسە نەکرییە	پێناسە نەکرییە	$x=2$
بەرەڤ زێدەبوون، ناڤچال	-	+		$2<x<+\infty$

پشتراستبە ژ تێگەهشتنا خشتەیێ پێشتر، بمفا وەرگرتنێ ژ جوداکاریێ تو دشێی دلنیابی کو ئەوی چەماوەیێ نەخشەیێ بهایێن دوماهیی یان خالێن وەرگێڕانێ نینن ژبلی ئەوێن دخشتەی دا هاتین.

خالا چاڤدێریی **1.** چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\dfrac{3(x-2)}{x^2-1}$ وێنەبکە.

نموونە 2 وێنەکێشانا چەماوەیێ نەخشەیا ڕێژەی

چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$ وێنەبکە.

شیکار

داتاشراوێ ئێکێ: $f'(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

ئێکودوو بڕینێن ئاسۆیی:

دەرکنارێن ستوونی: $x=2$

بەهایێن شلۆقە: $x=0$ و $x=4$

داتاشراوێ دووێ: $f''(x)=\dfrac{8}{(x-2)^3}$

ئێکودوو بڕینێن ستوونی: $(0,-2)$

دەرکنارێن ئاسۆیی نینە

خالێن وەرگێڕانێ: نینە

بوارەکەی: هەموو ژمارەیێن ڕاستی ژبلی $x=2$.

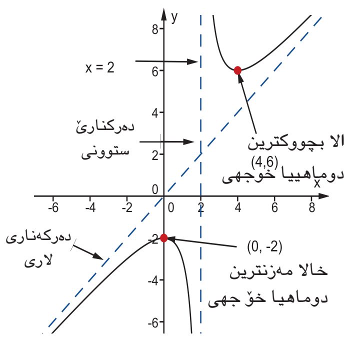
ماوەیێن تاقیکرنێ و بەهایێن وان: $]-\infty,0[$ ، 0 ، $]0,2[$ ، 2 ، $]2,4[$ ، 4 ، $]4,+\infty[$

ئەڤ خشتەیێ ل خوارێ چاوانیا بکارئینانا ماوە و بەهایێن تاقیکرنێ پۆختە دکەت بۆ دیارکرنا سیفەتێن چەماوەیێ نەخشەیێ.

سیفەتێن چەماوەی	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	x
بەرەڤ زێدەبوون، کومد	$-$	$+$		$-\infty<x<0$
مەزنترین بەهایێ خۆجهی	$-$	0	-2	$x=0$
بەرەڤ کێمبوون، کومد	$-$	$-$	$-$	$0<x<2$
دەرکنارێ ستوونی	پێناسەکرییە	پێناسەکرییە	پێناسەکرییە	$x=2$
بەرەڤ کێمبوون، ناڤچال	$+$	$-$		$2<x<4$
بچووکترین بەهایێ خۆ جهی	$+$	0	6	$x=4$
بەرەڤ زێدەبوون، ناڤچال	$+$	$+$		$4<x<+\infty$

دەرکنارێن لاری

ل نموونەیا 2 چەماوەیێ نەخشەیێ دەرکناری ئاسۆی نینە، لێ دەرکنارێ لاری هەیە. چەماوەیێ نەخشەیا ڕێژەی [ئەوا کۆلکەیێن هاوبەش لناڤبەرا سەرە و ژێرەی نەبن، و پلەیا ژێرەی نە کێمتر بیت ژ 1] دەرکنارێ لاری هەیە هەکە پلەیا سەرەی ژ پلەیا ژێرەی زێدەتربیت ب (1)ێ بتنێ. بۆ دیارکرنا دەرکنارێ لاری، دابەشکرنا درێژ بکاربینە بۆ نڤیسینا هاوکێشا نەخشەیێ وەك سەرجەمێ ڕادەدارەکی پلە ئێك و نەخشەیەکا دی یا ڕێژەی پلەیا سەرەیێ وێ کێمتر بیت ژ پلەیا ژێرەیێ وێ.

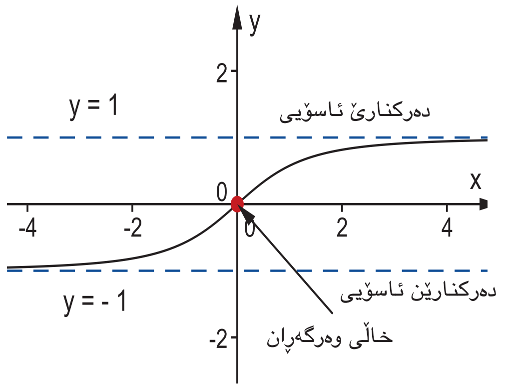


$f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$ هاوکێشا نەخشەی بنڤیسە

$f(x)=x+\dfrac{4}{x-2}$ جارەکا دی بنڤیسە پشتی ئەنجامدانا دابەشکرنێ

چەماوەیێ بەرامبەر پێدایێن خشتەیێ ل سەری بۆ پۆختە دکەت، و دەرکنارێ لاری $y=x$ ی

خالا چاڤدێریێ 2. چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\frac{3x^2-5x+3}{3x-2}$ وێنەبکە.



نموونە 3

وێنەکێشانا چەماوەیێ نەخشەیا رەگدار

چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ بکێشە.

شیکار:

$$f'(x)=\frac{2}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{و} \quad f''(x)=-\frac{6x}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}$$

چەماوەیی ئێك خالا ئێکودووبرینێ $(0,0)$ هەیە. چەماوەیی دەرکنارێن ستوونی نینن، وی دوو دەرکنارێن ئاسۆیی هەنە: $y=-1$ ، $y=1$ نەخشەیێ بەهایێن شلۆقە نینن، چێدبیت ئەوێ ئێك خالا وەرگێڕانێ هەبیت ل $(x=0)$. بوارێ نەخشەی کۆمەلا هەموو ژمارەیێن راستییە.
چەماوەیێ نەخشەیێ هاوجێیە دگەل خالا بنەڕەت.

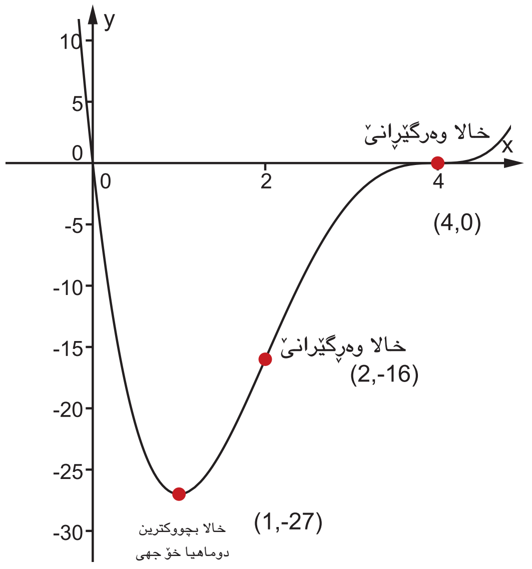
x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	سیفەتێن چەماوەیی
$-\infty<x<0$		+	+	بەرەڤ زێدەبوون، ناڤچال
$x=0$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	خالا وەرگێڕانێ
$0<x<+\infty$		+	−	بەرەڤ زێدەبوون، کومد

خالا چاڤدێریێ 3. چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\frac{-2x}{\sqrt{x^2+2}}$ بکێشە.

نموونە 4

وێنەکێشانا چەماوەیێ نەخشەیا ڕادەدار:

چەماوەیێ نەخشەیا رادەدار $f(x)=x^4-12x^3+48x^2-64x$ وێنەبکە.



شیکار:

داتاشراوێ ئێکێ: $f'(x)=4(x-1)(x-4)^2$

داتاشراوێ دووێ: $f''(x)=12(x-4)(x-2)$

ئێکودو برینێن ئاسۆی: $(0,0)$ و $(4,0)$

ئێکودووبرینێن ستوونیێ: $(0,0)$

دەرکنارێن ستوونی: نینە.

دەرکنارێن ئاسۆیی: نینە.

سیفەتێن وی ل $\pm\infty$: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

هەردوو بەهایێن شلۆقە: $x=1$ و $x=4$

خالێن وەرگێڕانێ ل: $x=2$ و $x=4$

بوار کومەلا ژمارەیێن راستییە.

ماوەیێن تاقیکرنێ و بەهایێن وان: $]-\infty,1[$ ، $]1,2[$ ، $]2,4[$ ، $]4,+\infty[$

سیفەتێن چەماوەی	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	x
بەرەڤ کێمبوون، ناڤچال	$+$	$-$		$-\infty < x < 1$
بچووکترین بەهایێ خۆ جهی	$+$	0	-27	$x = 1$
بەرەڤ زێدەبوون، ناڤچال	$+$	$+$		$1 < x < 2$
خالا وەرگێڕانێ	0	$+$	-16	$x = 2$
بەرەڤ زێدەبوون، کومد	$-$	$+$		$2 < x < 4$
خالا وەرگێڕانێ	0	0	0	$x = 4$
بەرەڤ زێدەبوون، ناڤچال	$+$	$+$		$4 < x < +\infty$

نەخشەیا رادەدارێ نموونەیا (4)، ئێك بچووكترین بەهایێ خۆجی هەیە، و مەزنترین بەهایێن خۆ جهی نینە. ب شێوەیەکی گشتی، نەخشەیا رادەدارێ پلەیا n چێدبیت ب زێدەهی $(n-1)$ بەهایێن دوماهیێن خۆ جهی هەبن، و $(n-2)$ خالێن وەرگێڕانێ ب زێدەهی هەبن. زێدەبارێ وێ، نەخشەیا رادەدار ئەوا پلەیێن رادەیێن وێ جۆت ب کێماتی ئێك بەهایی دوماهیێ خۆ جهی هەیە.

ئەوا تە ل پۆلا دەهێ ل نەخشەیێن رادەدار خواندی ل بیرا خۆ بینە، کو سیفەتێ نەخشەیێ ل بێدوماهێی، ب پلەیا نەخشەی و نیشانا هاوکۆلکەیێ سەرەکی دیاردبیت. چەماوەیێ نەخشەیا نموونە (4)، بێسنوور زێدە دبیت دگەل نێزیکبوونا x بۆ $+\infty$ چونکی هاوکۆلکێ سەرەکی یی مووجەبە. و ئەو بێسنوور زێدەدبیت دگەل نێزیکبووناx بۆ $-\infty$ چونکی پلەیێن رادەیێن وێ جۆتن.

خالا چاڤدێریێ **4.** چەماوەیێ نەخشەیا $f(x) = 5x^3 - 15x$ وێنەبکە.

نموونـــــە 5 وێنەکێشانا چەماوەیێن نەخشەیێن سێگۆشەیی

وێنەی چەماوەێ $f(x) = \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ بکێشە.

شیکار

نەخشەیە دوبارەبوویە و دوبارەبوونا وێ 2π، لەورا تو دشێی لێکۆلینا وێ د مەودایێ 2π دا ئەنجام بدەی. ماوەیێ $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ هەلبژێرە.

بوار: کومەلا ژمارەیێن راستی ژبلی $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ، دەمێ $n \in \mathrm{I}$

داتاشراوێ ئێکێ: $f'(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos^2 x}$ داتاشراوێ دووێ: $f''(x) = \dfrac{(1-\sin x)^2}{\cos^3 x}$

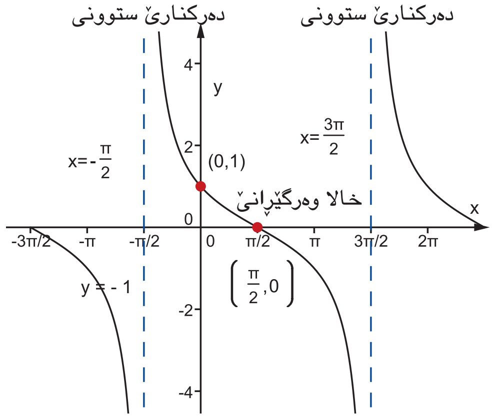
ماوەیێ دوبارەبوونێ: 2π ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی: $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. ئێکودووبڕینێن ستوونی: $(0,1)$

دەرکنارێن ستوونی: $x = -\frac{\pi}{2}$ $x = \frac{3\pi}{2}$. دەرکنارێن ئاسۆیی: نینە بەهایێن شلۆقە: نینە

خالێن وەرگێڕانێ: $x = \frac{\pi}{2}$

ماوەیێن تاقیکرنێ و بەهایێن وان $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	سیفەتێن چەماوەیی
$x=-\frac{\pi}{2}$	پێناسەنەکرییە	پێناسەنەکرییە	پێناسەنەکرییە	دەرکنارێ ستوونی
$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$		$-$	$+$	بەرەف کێمبوون، ناقچال
$x=\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	خالا وەرگێڕانێ
$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$		$-$	$-$	بەرەف کێمبوون، کومد
$x=\frac{3\pi}{2}$	پێناسەنەکرییە	پێناسەنەکرییە	پێناسەنەکرییە	دەرکنارێ ستوونی



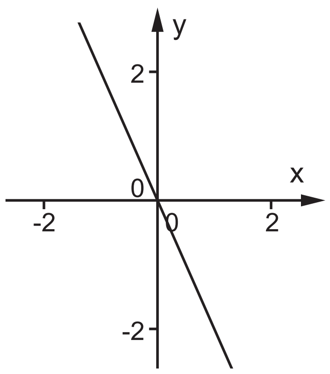
خالا چاڤدێریی

5. چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\frac{1+\cos x}{\sin x}$ وێنەبکە.

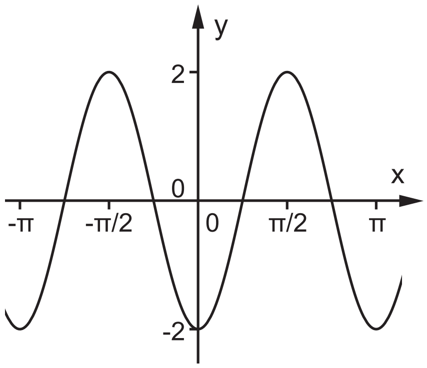
4–4 ڕاهێنان

چەماوەیێ داتاشراوێ هەر نەخشەیەکێ دیاربکە.

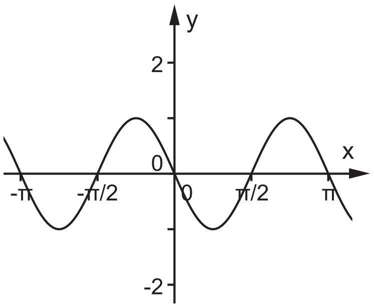
1 نەخشە



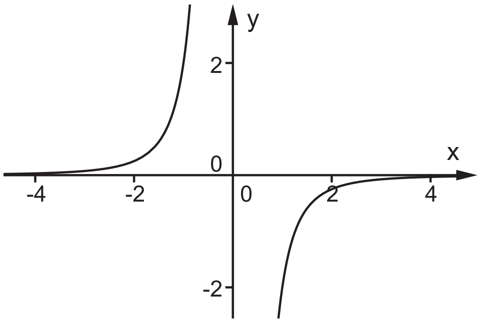
أ داتاشراو



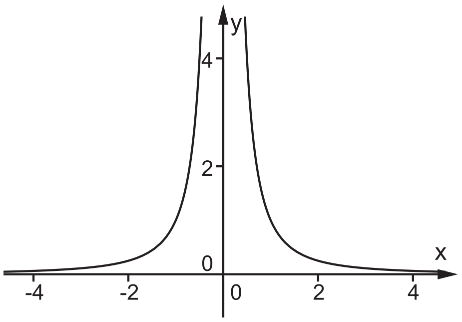
2



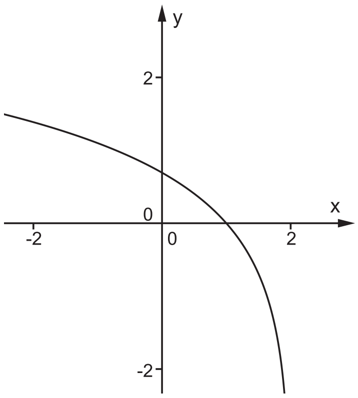
ب



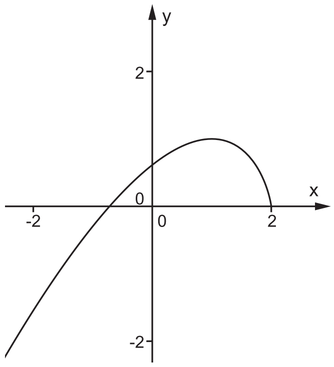
3



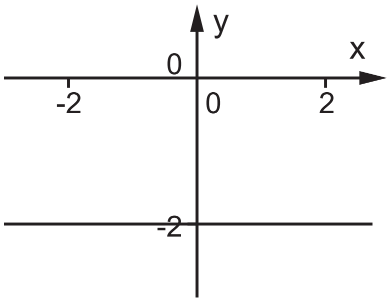
ج



4



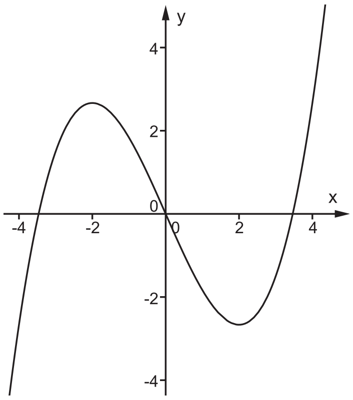
د



5 **خواندنا وێنەیێ ڕونكرنێ:** وێنەیێ ل خوارێ چەماوەیێ نەخشەیا f دیاردكەت.

أ ل كیژ بەهایێ x ، داتاشراوێ نەخشەیێ $f'(x)$ دبیتە سفر؟ دبیتە مووجەب؟ دبیتە سالب

ب ل كیژ بەهایێ x ، داتاشراوێ دووێ $f''(x)$ دبیتە سفر؟ دبیتە مووجەب؟ دبیتە سالب



ج د كیژ ماوەی دا $f'(x)$ بەرەڤ زێدەبوونە؟

د ل كیژ بەهایێ x ، $f'(x)$ بچووكترین بەها وەردگرت؟ بەراوردیا تێكرایێ گۆهۆڕینا f لنك ڤی بهایی، و تێكرایێ گۆهۆڕینا f لنك بەهایێن دی یێن x ئەنجام بدە. بەرسڤا خو ڕۆنبكە.

ژ ڕاهێنانا 6 هەتا 17 ، چەماوەیێ (وێنەیێ ڕۆنکرنی) نەخشەیێ بکێشە:

6 $f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$

7 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-9}$

8 $f(x)=x+\frac{4}{x^2+1}$

9 $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

10 $f(x)=\frac{x^2-6x+12}{x-4}$

11 $f(x)=x\sqrt{4-x}$

12 $f(x)=3x^{\frac{2}{3}}-2x$

13 $f(x)=2-x-x^3$

14 $f(x)=3x^4+4x^3$

15 $f(x)=|2x-3|$

16 $f(x)=(x-1)^5$

17 $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$

18 ئەرێ چێدبیت چەماوەیێ نەخشێ دەرکنارەکی خۆیێ ستوونی ببڕت؟ بەرسڤا خۆ ڕۆنبکە.

19 ئەرێ چێدبیت چەماوەیێ نەخشەی دەرکنارەکی خۆیێ ئاسویی ببڕت؟

20 هاوکێشا نەخشەیا $f(x)=\frac{6-2x}{x-3}$ وەسا ئاماژە دکەت، کو چەماوەیێ وێ نەخشێ دەرکنارەکی ستوونی هەیە. هاوکێشا وی بنڤیسە؟ چەماوەیێ ڤێ نەخشەیێ وێنەبکە، و بسەلمینە کو وێ دەرکناری ستوونی نینە. چەوا ئەڤێ ڕۆندکەی؟

هزربکە: ل هەردوو ڕاهێنانان 21 و 22 ، ئەوێ نەخشەیا ڤان مەرجێن دیارکرین ساخدکەت بنڤیسە.

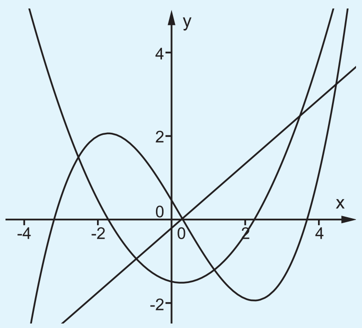
21 نەخشەیێ دەرکنارەکی ستوونی هەیە، هاوکێشیا وی $x=5$ و دەرکنارەکی ئاسۆیی هەیە هاوکێشەیا وی $y=0$.

22 نەخشەیێ دەرکنارەکی ستوونی هەیە هاوکێشەیا وی $x=5$ و دەرکنارەکی لاری هەیە هاوکێشەیا وی $y=3x+2$.

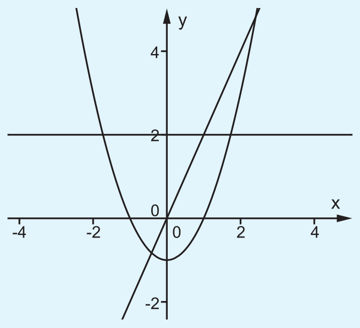
دەربارەی چەمکان (تێگەهان)

ل هەردوو ڕاهێنانێن 23 و 24 ، وێنە چەماوەیێن نەخشەیێ $f(x)$ و داتاشراوێ وێ ئێکێ $f'(x)$ و داتاشراوێ وێ یێ دووێ $f''(x)$ دیاردکەت، هەر ئێکێ ژ وان جودابکە.

23



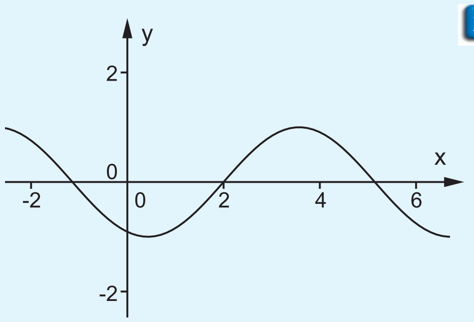
24



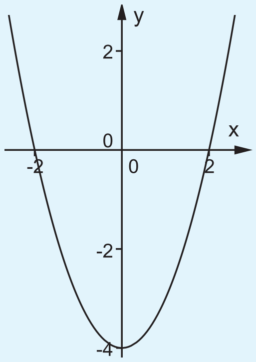
دەربارەی تێگەهان

ل هەردوو راهێنانێن 25 و 26 ، وێنەیێ روونکرنێ بۆ نەخشەیا $f(x)$ ب هۆیێ وێنەیێ رونکرنا داتاشراوێ ئێکێ $f'(x)$ بکێشە.

26

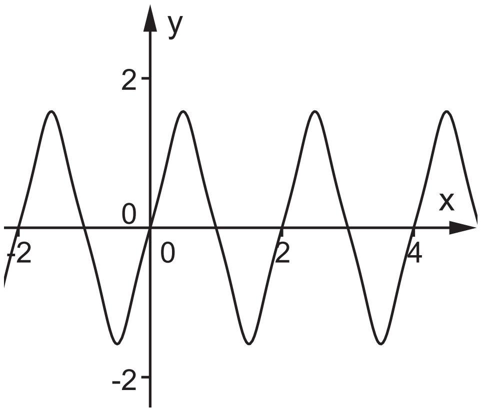


25



27 وەسا دانە کو $f'(x)<0$ ل ماوەیێ $]2, 8[$ ، رۆنبکە بۆچی $f(3)>f(5)$ ؟

28 **خواندنا وێنەیێ رۆنکرنێ:** وێنەیێ رونکرنێ ئەوێ ل خوارێ دبیتە چەماوەیی نەخشەیا $f(x)=\tan(\sin\pi x)$.



أ ئەرێ وێنەیێ رونکرنێ یی هاوجێیە؟ هەکە وەسا بوو جورێ هاوجێ بوونێ دیاربکە.

ب ئەرێ نەخشەیە دووبارەبوویە. هەکە وەسا بوو دووبارەبوونا وێ دیاربکە.

ج بەهایێ خوجهی دوماهیێ بۆ وێ نەخشەیێ ل ماوەیێ $]-1, 1[$ دیاربکە.

د ئەرێ تو خالێن وەرگێرانێ بۆ وێ نەخشەیێ ل ماوەیێ $]0, 1[$ دبینی؟ ژمارا وان چەندە؟

5-4

گەڕیان ل دووف باشترین شیکار

(بەهاییێن خوجهێن دوماهیێ) Optimization

ئارمانج

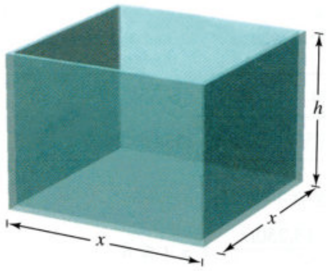
- پرسیارێن دیارکرنا بچووکترین بەهایان و مەزنترین بەهایان شیکاردکەن.

پرسیارێن بچووکترین بەها و مەزنترین بەها

شیکارکرنا پرسیارێن بچووکترین بەها و مەزنترین بەها دبنە گرنگترین بجهئینان بۆ هەژمارکرنا جوداکاریێ. بێگومان تە هندەك دەستەواژەیێن بهیستین وەك پترترین قازانج (مفا) و کێمترین تێچۆن و گەلکین دی، بەری بەرفرەهکرنێ ل ڤی بابەتی بەرێ خو بدە ڤێ نموونێ.

نموونە 1 — دیارکرنا مەزنترین قەبارەێ سندۆقەکێ

ئەندازیارەك ل کارگەهێ کاردکەت ژ بۆ دیزاینکرنا سندوقەکا ژ سەری ڤەکری و بنکەیێ وێ چارگۆشەی و رووبەرێ وێ $675cm^2$ بیت، هەر وەك ل وێنەیێ ل رەخێ راستێ دیاردبیت. دڤێت ئەو چ دووراتیان هەلبژێرت دا وێ سندۆقێ مەزنترین قەبارە هەبیت؟



شیکار

چونکی بنکێ سندۆقێ چارگۆشەییە، قەبارە دێ بیتە $V = x^2h$. دبێژنە ڤی هاوکێشی هاوکێشەیا سەرەکی بۆ پرسیارێ. چونکی ئەو شێوازەکی پەیدادکەت بۆ هەژمارتنا ئەوێ دڤێت مەزنترین بەها بیت.

ل رەخەکی دی، رووبەرێ سندۆقێ دبیتە سەرجەمێ رووبەرێ بنکەیی دگەل رووبەرێ هەر چار ڕوویان ئانکو $S = x^2 + 4xh$. لێ رووبەرێ وێ یەکسانە $675cm^2$ و ئەڤە پەیوەندییەکێ لناڤبەرا لایێ بنکەی x و بلنداهیا وێ h پەیدادکەت. $S = x^2 + 4xh = 675$

ژ وێ دەرئەنجام دبیت کو $h = \frac{675-x^2}{4x}$ و $V = x^2\left(\frac{675-x^2}{4x}\right) = \frac{675}{4}x - \frac{x^3}{4}$

بەری دیارکرنا بەهاییێن x ئەوین مەزنترین قەبارە دابین دکەن، بوارێ قازانجی (مفایی) دیاربکە، ئانکو وان بەهاییێن دشیاندا x وەربگرت. تو دزانی x نەیا سالبە و رووبەرێ بنکەی x^2 نە زێدەتر ژ 675 ڤێجا $0 \le x \le \sqrt{675}$. دا مەزنترین قەبارە بدەست ئەندازیاری بکەڤت، دڤێت ئەو وان بهاییێن x هەژماربکەت ئەوێن وەسا دکەن کو نەخشەیا $V(x) = \frac{675x-x^3}{4}$ مەزنترین بەهایی وەربگرت $V'(x)$ بینەدەر و هاوکێشەیا $V'(x) = 0$ شیکاربکە.

$$V'(x) = \frac{675-3x^2}{4} = 0$$

$$3x^2 = 675$$

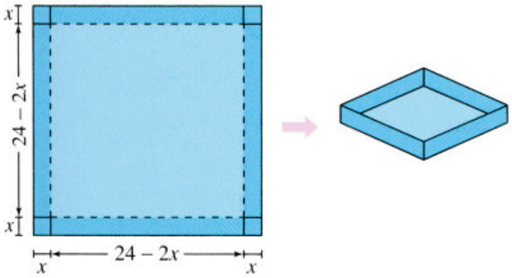
$$x^2 = 225$$

$x = 15$ یان $x = -15$

هەردوو بەهاییێن شلۆقە ئەڤەنە $x = -15$ و $x = 15$. بەهایێ $x = -15$ فرامۆش بکە چونکی x نەیا سالبە. دا ساخبکەی کو بەهایێ شلۆقە $x = 15$ بۆ مەزنترین بەهایێ نەخشەیێ ڤەدگەڕێت، تاقیکرنا داتاشراویێ دوویێ بکاربینە. داتاشراویێ دوویێ بۆ نەخشەیێ دبیتە:

$V''(x) = -\frac{3}{2}x$ و بەهایێ وێ ل $x = 15$ دبیتە $V''(15) = -\frac{3}{2}(15) = -\frac{45}{2} < 0$ ، ڤێجا ئەڤ بەهایێ شلۆقە ڤەدگەڕیت بۆ مەزنترین بەهایێ خۆ جهێ نەخشەیێ.

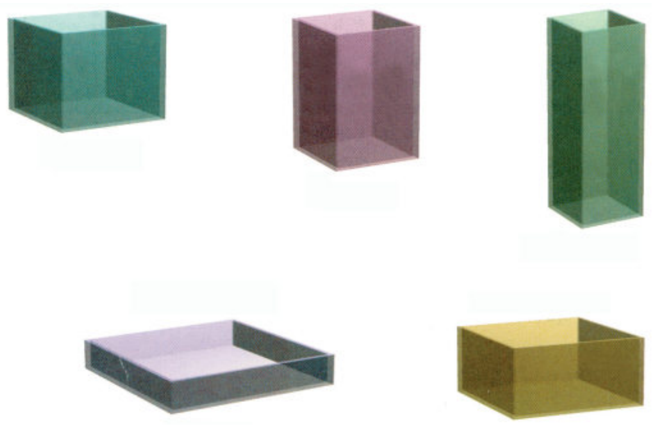
هەکەئەندازیار درێژیا بنکەی 15 cm هەلبژێرت و بلنداهیا سندۆقیٚ $7.5 = \frac{675-15^2}{4\times15} = h$ مەزنترین قەبارە دبیتە $V_{max} = 15\times15\times7.5 = 1687.5cm^3$.



خالا چاڤدێریێ

1. ئەندازیارەك ل کارگەهەکیٚ کاردکەت ژ بۆ دیزاینکرنا عولبکیٚ سەریٚ ویٚ ڤەکری و بنکەییٚ ویٚ چوار گۆشەبیت، بکارئینانا پارچەکی چوار گۆشەی ژ کارتۆنیٚ درێژیا لاییٚ ویٚ 24 cm، پیٚ بڕینا 4 چوار گۆشەیان ژ کوژییٚن ویٚ درێژیا لاییٚ چارگۆشیٚ x بیت، پاشی ڤچەماندنا لاییٚن ویٚ کارتۆنیٚ. ئەندازیار چ بەهای بۆ x هەلبژێرت دا ویٚ عەلبکیٚ مەزنترین قەبارە هەبیت.

ڤەگەراندن بۆ نموونە (1)، دڤێت بەری تو دەست ب شیکارکرنیٚ بکەی، بزانی گەلەك عۆلبە هەنە رووبەریٚ وان دبیتە $675cm^2$. دەست ب پرسیارکرنیٚ بکە کیژ شێوەییٚ عولبیٚ مەزنترین قەبارە هەیە. ئەریٚ ئەو یا بلندە یان یا نزمە یان یا نێزیکە بۆ شەشپالۆییٚ؟



چێدبیت یا باش بیت تو قەباریٚ ژمارەکا عولبەیان هەژماربکەی، هەر وەك دیار ل وێنەییٚ ل خواریٚ، دا چەمکەکی نێزیکی شیکارکرنیٚ لنك تە پەیدا بیت. ئەویٚ بزانە کو تو نکاری دەست ب شیکارکرنیٚ بکەی، هەکە تو نزانی داخوازی چییە.

ئەڤێن ل خواریٚ ئەو پێنگاڤێن گشتینە کو دڤێت تو پیٚ ڕابی بۆ شیکارکرنا ڤی جۆریٚ پرسیاران:

بۆ شیکارکرنا پرسیارەکیٚ ژ پرسیارێن بەهایێن دوماهییٚ

1. هەموو بەهایێن پێدایین و هەموو بەهایێن داخوازکری دیاربکە، پاشی هێلکارەکی وێنەبکە هەکە یا دشیاندابیت.

2. هاوکێشەیەکا سەرەکی بۆ وی برِی دڤێت تو بەهاییٚ ویٚ ییٚ دوماهیی هەژماربکەی بنڤیسە.

3. هاوکێشەیا سەرەکی جارەکا دی بنڤیسە ب مەرجەکی ئەڤ هاوکێشەیا نوو بتنیٚ کۆڕاوەکی ئازاد بخۆڤە بگرت. چێدبیت تو هندەك هاوکێشەیێن دی بکاربینی کو ناڤبەرا گۆڕاوێن ئازادێن هاوکێشەیا سەرەکی گرێدەت.

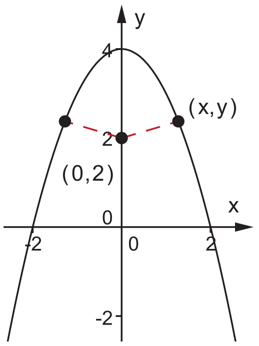
4. ماوەییٚ بمفا بۆ هاوکێشەیا سەرەکی دیاربکە، ئانکو ئەوان بەهایێن وەسا دکەن کو پرسیاریٚ رامان هەبیت دیاربکە.

5. مەزنترین بەها یان بچووکترین بەهاییٚ داخوازکری دیاربکە بکارئینانا تەکنیکێن هەژمارکرنا جوداکارییٚ ئەوا تو ل وانەیێن پێشتر فێربوویی.

نموونە 2 هەژمارتنا کورتترین دوورییٚ

ئەوان خالێن ل سەر برگەییٚ هاوتا $f(x) = 4 - x^2$ دیاربکە ئەوێن نێزیکترین خال بن بۆ $(0, 2)$.

شیکار:



وێنەیێ بەرامبەر دیاردکەت، کو دوو خال ل سەر برگەیێ هاوتا هەنە و وان کێمترین دووری ژ خالا $(0, 2)$ هەنە. دەست ب هەژمارتنا دووراتیا ل ناڤبەرا خالا $(0, 2)$ و خالا $(x, f(x))$ بکە.

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + \left(4 - x^2 - 2\right)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

چونکی d کێمترین بەهایی وەردگرت دەمێ ئەو برێ دژێر رەگی دا کێمترین بەهایی وەردگرت. بەهایێن شلۆقە بۆ نەخشەیا $g(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ بینەدەر. داتاشراوێ نەخشەیا g بینەدەر پاشی هاوکێشەیا $g'(x) = 0$ شیکاربکە.

$$g'(x) = 4x^3 - 6x = 2x\left(2x^2 - 3\right)$$

$$2x\left(2x^2 - 3\right) = 0$$

$$x = -\sqrt{\tfrac{3}{2}}،\ x = \sqrt{\tfrac{3}{2}}،\ x = 0$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

خشتە ئەوێ دیاردکەت کو هەر ئێك ژ هەردوو بەهایێن شلۆقە $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ و $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ بچووکترین بەهایی بۆ نەخشەی دیاردکەت. بۆ دیارکرنا وان خالێن دبنە شیکار بۆ پرسیارێ، دوریێ لناڤبەرا خالا $(0, 2)$ و هەر خالەکێ $(0, f(0))$ و $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$، $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$ هەژماربکە. دێ بینی کو هەردوو خال $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$ ، $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$ دبنە شیکار بۆ پرسیارێ. و دووری لناڤبەرا هەر ئێك ژ وان خالان و خالا $(0, 2)$ یەکسانە 1.45 بنێزیکی.

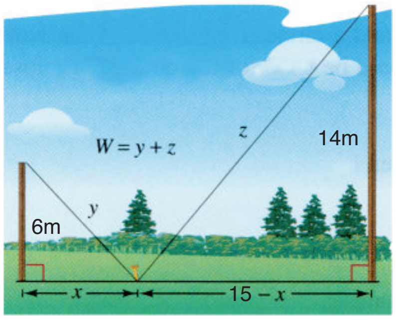
خالا چاڤدێریێ

2. ئەوان خالێن ل سەر برگەیێ هاوتا $f(x) = x^2 - 2$ دیاربکە ئەوێن نێزیکترین خال بن بۆ خالا $(0, -1)$ ؟

نموونە 3

هەژمارتنا کورتترین درێژیێ

دوو ستوونێن بلنداهییا وان $14\ m$ و $6\ m$ و دووری لناڤبەرا وان $15\ m$. داخوازێ ژ ئەندازیارەکی هاتەکرن سەرێ هەر ئێکێ ژ هەردوو ستوونان ب تێلەکێ دگەل خالەکێ ل ناڤبەرا وان گرێدەت کو کێمترین درێژیا تێلێ بێتە بکارئینان هەر وەك ل وێنەیێ بەرامبەر دیار.



شیکار: درێژیا تێلێ دانە W و دووریيا لناڤبەرا خالێ و ستوونا کورت دانە x. ژ وێنەی دیاردبیت کو $W = y + z$

$z = \sqrt{x^2 - 30x + 421}$ ، $y = \sqrt{x^2 + 36}$ ، $(15 - x)^2 + 14^2 = z^2$ ، $x^2 + 6^2 = y^2$.

هەروەسا $W = y + z = \sqrt{x^2 + 36} + \sqrt{x^2 - 30x + 421}$ ماوەیێ بمفا دبیتە $0 \le x \le 15$.

داتاشراویێ $W(x)$ بینەدەر: $W'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+36}} + \dfrac{x-15}{\sqrt{x^2-30x+421}}$

هاوکێشەیا $W'(x) = 0$ شیکاربکە.

$$W'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+36}} + \frac{x-15}{\sqrt{x^2-30x+421}} = 0$$

$$x\sqrt{x^2 - 30x + 421} = (15 - x)\sqrt{x^2 + 36}$$

$$x^2\left(x^2 - 30x + 421\right) = (15 - x)^2\left(x^2 + 36\right)$$

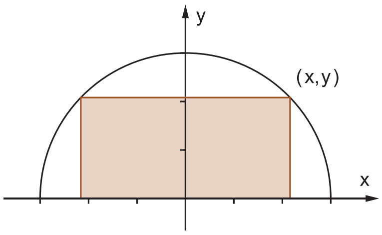
$$x^4 - 30x^3 + 421x^2 = x^4 - 30x^3 + 261x^2 - 1080x + 8100$$

$$160x^2 + 1080x - 8100 = 0$$

$$x = -11.25 \quad x = 4.5$$

شیکارا پەسەند دبیتە $x = 4.5$ ، ئانکو دڤێت دووری لناڤبەرا خالێ و ستوونکا کورت 4.5 m بیت.

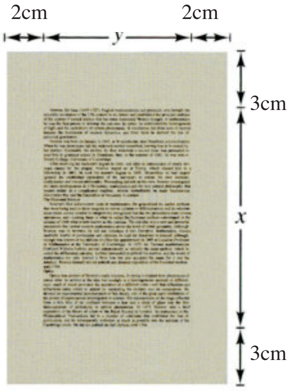
3. درێژی و پانیا مەزنترین لاکێشە بهەژمێرە، کو تو بشێی دناڤ بازنەکێ دا وێنەبکەی نیڤتیرەیێ وێ r بیت.



نموونە 4

هەژمارتنا کێمترین رووبەر:

دیزاینکەرەکی چاپکرنێ کاری ل سەر دیزاینا بەرپەرەکی لاکێشەی دکەت. ئەو رووبەرێ بۆ چاپکرنێ تەرخانکری $150\ cm^2$، و پانیا پراوێزین سەری و ژێرەی 3 cm و پراویزین رەخێ راستێ و چەپێ 2cm، دڤێت ئەو درێژی و پانیا بەرپەری چەندە هەلبژێریت دا بکاربرنا کاغەزێ کیمتر بیت؟



شیکار:

x دانە بۆ درێژیا رووبەرێ تەرخانکری بۆ چاپکرنێ و y بۆ پانیا وی رووبەری. و A دانە بۆ رووبەرێ کاغەزێ: $A = (x + 6)(y + 4)$

پەیوەندی لناڤبەرا x و y دبیتە $xy = 155$ ئەڤە رێکێ ددەت ئەم رووبەرێ A وەک نەخشەیەکێ پێ x بنڤیسین:

$$A(x) = (x + 6)\left(\frac{155}{x} + 4\right) = 179 + 4x + \frac{930}{x}$$

ماوەیێ بمفا بۆ ڤێ پرسیارێ دبیتە کۆمەلا ژمارەیێن راستی یێن مووجەب. داتاشراوێ نەخشەیا $A(x)$ دبیتە $A'(x) = 4 - \dfrac{930}{x^2}$

و بەهایێن شلۆقە دبنە رەگێن هاوکێشەیا $A'(x) = 4 - \frac{930}{x^2} = 0$ ئەڤێ هاوکێشەیێ دوو رەگ هەنە ± 15.25 ب نێزیکی، رەگێ سالب ڕامان نینە. درێژیا بەرپەرێ و پانیا وی دبنە 21.25 و $\left(\frac{155}{15.25}+4\right) \approx 14.16$ cm .

خالا چاڤدێریێ

4. دیزاینکەرەکی چاپکرنێ کاری ل سەر دیزاینا بەرپەرەکی لاکێشەی دکەت. ئەو رووبەرێ بۆ چاپکرنێ تەرخانکری دبیتە $200\ cm^2$ ، و پانیا هەر ئێك ژ هەر چوار پراویزان 3 cm . دڤێت ئەو درێژی و پانیا بەرپەری چەند هەلبژێرت دا بکاربرنا کاغەزێ کێمتر بیت؟

5–4 ڕاهێنان

1 دوو ژمارە سەرجەمێ وان دبیتە S و ئەنجامێ لێکدانا وان مەزنترین بەها هەبیت بینەدەر.

2 دوو ژمارەیێن موجەب هەژماریکە ئەنجامێ لێکدانا وان 192 بیت و سەرجەمێ ئێکی ژ وان و 3 جارانی یێ دوویێ بچووکترین بەها هەبیت.

3 دوو ژماران هەژماریکە سەرجەمێ ئێك ژ وان و دوو جارانی یێ دوویێ 100 بیت و ئەنجامێ لێکدانا وان مەزنترین بەها هەبیت.

4 چێوەیێ لاکێشەیەکێ 100 m، درێژی و پانیا وێ هەژماریکە کو وێ لاکێشەیێ مەزنترین رووبەر هەبیت.

ل هەردوو ڕاهێنانان: 5 و 6، خالەکێ ل سەر چەماوەیێ نەخشەی دیاربکە کو نێزیکترین خال بیت بۆ خالا دیارکری:

5 $f(x) = \sqrt{x}$ ؛ $(4, 0)$

6 $f(x) = (x+1)^2$ ؛ $(-1, 3)$

7 هاتن و چۆن: نەخشەیا $F(v) = \frac{v}{22+0.02v^2}$ نموونەیەکە بۆ ئەنجامدانا لێکۆلینێ ل سەر تێکرایێ هاتن چۆنێ (ژمارا ترومبێلان د چرکەکێ دا) ل سەر یەکا ب قەلەبالغ (مزدحم)، v هێمایە بۆ لەزا رێڤەچۆنێ ل سەر ڤێ رێکێ. کێژ لەز وەسا دکەت کو ئەڤێ تێکرایێ مەزنترین بەها هەبیت.

8 جوتیارەکێ پلانەك دانا بۆ پەرژینکرنا رووبەرێ پارچەکا ئەردێ لاکێشەی ل سەر رەخێ رویبارەکی. دڤێت ئەو جوتیارە درێژی و پانیا ڤێ لاکێشێ چەند هەلبژێرت دا پەرژینێ بکاردئێت کێمترین درێژی هەبیت، هەکە بزانێ ئەو رووبەرێ جوتیاری دڤێت پەرژینبکەت $180\ 000\ m^2$ ، و رەخێ ل سەر رویباری جوتیار پەرژین ناکەت.

9 مەزنترین رووبەر: پەنجەرا نۆرماندی ژ پەنجەرەکا لاکێشەی و بەشێ وی یێ سەری پەنجەرەکا نیڤبازنەی پێکدهێت، هەر وەك ل وێنەیێ بەرامبەر دیاردبیت. مەزنترین رووبەرێ وێ پەنجەرا نۆرماندی هەژماریکە هەکەر چێوەیێ وێ 6m بیت.

10 تێرەیێ بازنەکا ل دۆر سێگۆشەیەکا دوو لا یەکسان وێنەکری دبیتە 8 cm، مەزنترین ڕووبەرێ سێگۆشەیێ هەژماربکە.

11 هەردوو نەخشەیان: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ و $g(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ ل ماوەیێ $[0, 4]$ بکاربینە.

أ وێنەیێ رونکرنێ بۆ هەر دوو نەخشەیان ل سەر ئێك رووتەخت ل ماوەیێ $[0, 4]$ بکێشە.

ب برەکی پێ x بنڤیسە، دوورییا ستوونی d دناقبەرا چەماوەیێن هەردوو نەخشەیان دا ل نك x دەرببڕت.
پاشی جوداکاریێ بکاربینە بۆ دیارکرنا بەهایێ x کو مەزنترین بەهایێ دووریێ هەبیت.

ج هاوکێشەیێن هەردوو لێکفتێن هەردوو چەماوەیان ل دەف بەهایێ x ئەوێ تە ل لقێ (أ)
هەژمارتی دیاربکە، هەردوو لێکەڤتان وێنەبکە. چ پەیوەندی دناقبەرا واندا هەیە؟

د تو چ دبێژی دەربارەی پەیوەندیا لناقبەرا هەردوو لیکەفتین هەردوو نەخشەیان کو بەهایێ x
وەسا دکەت دوورییا لناقبەرا هەردوو چەماوەیان مەزنترین بیت.

12 عومبارەك شێوەیێ لولەکەکێ وەردگریت، سەرە و ژێرەیێ وێ دگەل دوو نیڤ گویان د گرێداینە.
قەبارەیێ گشتیێ ڤێ عومبارێ دبیتە $12m^3$. نیڤتیرەیێ لوولەکێ هەژماربکە ئەوێ بچووکترین ڕووبەرێ ڕوویێ عومبارێ دابیندکەت.

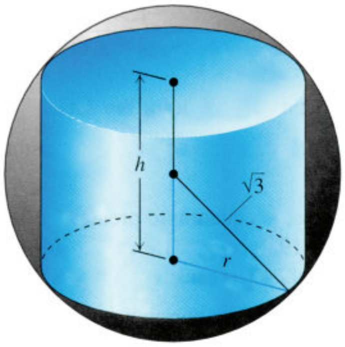
13 عومبارەکا هاوشێوە بۆ عومبارا پرسیارا پێشتر قەبارێ دێ $3m^3$. لێچوویا هەردوو نیڤ گویان دبیتە دووجارانی لێچوویا لوولەکێ ب مێتەرین دووجای. نیڤتیرەیێ بنکێ لولەکێ هەژماربکە کو ئەوێ کێمترین لێچوو هەبیت.

14 قەبارێ مەزنترین قووچەکا وەستاو هەژماربکە کو دناڤ نیڤ گۆیەکا نیڤتیرەیێ وێ r دا بێتە دانان.

دەربارەی چەمکان

15 چێوەیێ لاکێشەکێ 20 m . درێژی و پانیا وێ هەژماربکە کو ڕووبەرێ وێ مەزنترین بەها هەبیت. ئەرێ هندەك بەها بۆ درێژی و پانیا لاکێشەیێ هەنە کو رووبەری وێ بچووکترین بەها هەبیت؟ بەرسڤا خۆ ڕۆنبکە.

16 لوولەکەك دناڤ گۆیەکا نیڤتیرەیێ وێ r دایە، هەر وەك ل وێنەیێ بەرامبەر دیارکری. بلنداهی و نیڤتیرەیێ لوولەکێ هەژماربکە کو قەبارەیێ وێ مەزنترین بەها هەبیت.



بەشێ 4

پێداچوونا بەشی

1 خالا شلۆقەیا نەخشەیٚ پێناسەبکە، چەماوەییٚ نەخشەیەکیٚ وێنەبکە کو جۆرێن جوداییێن خالێن شلۆقە دیاربکەت.

2 **نەخشەیا کت**، نەخشەیا f نەخشەیەکا کتە ڤێٚ ساخدکەت $f(-x)=-f(x)$ بەهاییٚ x هەر چەند بیت. وەسا دانە کو نەخشەیا f کتە ویە بەردەوامە و شیانا داتاشراویٚ هەیە، خشتەییٚ ل خواریٚ هندەك بەهایان بۆ ویٚ دیاردکەت.

x	-5	-4	-1	0	2	3	6
y	1	3	2	0	-1	-4	0

أ $f(4)$ هەژماربکە.

ب $f(-3)$ هەژماربکە.

ج پێداییێن خشتەییٚ بنوێنە، و چەماوەییٚ نەخشەیٚ ل ماوەییٚ $[-6, 6]$ وێنەبکە. کێمترین ژمارا خالێن شلۆقە ل سەر چەماوەیی دڤی ماوەیی دا چەندە؟ ئەڤیٚ روونبکە.

د ئەریٚ ب کێماتی بەهایەکی بتنیٚ هەیە وەك c ژبەهاییێن x دماوەییٚ $[-6, 6]$ دا ئەڤیٚ $f'(c)=-1$ ساخبکەت؟ ئەڤیٚ رۆنبکە.

هـ ئەریٚ چێدبیت $\lim_{x\to 0} f(x)$ ئارمانج نەبیت؟ ڤیٚ روونبکە؟

ل هەردوو راهێنانێن 3 و 4 ، (هەکەر هەبیت) خالێن شلۆقە و ماوەیێن بەرەڤ زێدەبوون و ماوەیێن بەرەڤ کێمبوون بۆ ڤیٚ خشتەییٚ دیاربکە.

3 $f(x)=(x-1)^2(x-3)$

4 $f(x)=\sin x+\cos x$ لەماوەی $[0,2\pi]$

ل هەردوو راهێنانێن 5 و 6 ، خالێن وەرگێرانیٚ دیاربکە، و ڤەکۆلینیٚ بکە ل سەر ناڤچال و کومدیا چەماوەییٚ نەخشەیٚ:

5 $f(x)=x+\cos x$ لەماوەی $[0,2\pi]$

6 $f(x)=(x+2)^2(x-4)$

ل هەردوو راهێنانێن 7 و 8، تاقیکرنا داتاشراویٚ دووێ بکاربینە بۆ دیارکرنا هەموو بەهاییێن دوماهییٚ.

7 $f(x)=2x^2(1-x^2)$

8 $f(x)=x-4\sqrt{x+1}$

ژ ڕاهێنانا 9 هەتا 16 ، ئارمانجیێ داخوازکری هەژماربکە.

9 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{3x^2+5}$

10 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x^2+5}$

11 $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x+5}$

12 $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{-2x}$

13 $\lim_{x\to+\infty} \frac{5\cos x}{x}$

14 $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$

15 $\lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{x+\cos x}$

16 $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2\sin x}$

ژ ڕاهێنانا 17 هەتا 20 ، هەموو دەرکنارین ئاسۆیی و ستوونی بۆ نەخشەیێ دیاربکە:

17 $f(x)=\frac{2x+3}{x-4}$

18 $f(x)=\frac{5x^2}{x^2+2}$

19 $f(x)=\frac{3}{x}-2$

20 $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}$

ژ ڕاهێنانا 21 هەتا 28 ، چەماوێ هەر نەخشەیەکێ وێنەبکە.

21 $f(x)=4x^3-x^4$

22 $f(x)=x\sqrt{16-x^2}$

23 $f(x)=(x-3)^2(x-1)^3$

24 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

25 $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

26 $f(x)=\frac{x^2}{x^4+1}$

27 $f(x)=x^2+x+\frac{4}{x}$

28 $f(x)=|x-1|+|x-3|$

29 **پاپۆڕا** A ل ڕەخێ ڕۆژهەلاتێ B ب 100 km یا دوور بوو، پاپۆڕا A بەرەف ڕۆژ ئاڤا چۆ ب لەزەکێ تێکڕایێ وێ 12 km/h بوو، و پاپۆڕا B بەرەف باشوور چۆ ب لەزەکێ تێکڕایێ وێ 10 km/h بوو. ل چ دەمی دووری لناڤبەرا هەردوو پاپوڕان دێ کێمترین بەها هەبیت؟

30 ل سێگۆشەیەکا گۆشە وەستاو، هەردوو لایێن وەستاو جۆتن ل سەر هەردوو تەوەرێن پۆتانان، و ژێێ وێ دخالا $(1, 8)$ ڕادبۆریت. سەرێن وێ سێگۆشێ دیاربکە کو ڕووبەرێ وێ کێمترین بەها هەبیت.

بەشێ 4

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

1 کیژ نەخشەیا ل خوارێ بتنێ دوو بەهایێن دوماهیێ هەنە؟

أ $f(x)=|x-2|$ ب $f(x)=x^{3}-6x+5$ ج $f(x)=x^{3}+6x-5$

د $f(x)=\tan x$ هـ $f(x)=x+\ln x$

2 ل کیژ ماوەیی، نەخشەیا $f(x)=e^{x^3-6x^2+8}$ بەرەڤ کێمبوونە؟

أ $]-\infty,-2]$ ب $]2,4[$ ج $[2,4]$ د $]4,+\infty[$ هـ نییە.

3 هەکەر $a<0$ چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=ax^{3}+3x^{2}+4x+5$ دێ یێ ناڤچال بیت ل ماوەیێ.

أ $]-\infty,-\frac{1}{a}[$ ب $]-\infty,\frac{1}{a}[$ ج $]-\frac{1}{a},+\infty[$ د $]\frac{1}{a},+\infty[$ هـ $]-\infty,-1[$

4 پۆیێن خالێن وەرگێرانێ x بۆ نەخشەیا $f(x)=x^{5}-5x^{4}+3x+7$ دبیتە.

أ 0 بتنێ ب 1 بتنێ ج 3 بتنێ د 0 و 3 هـ 0 و 1

5 کیژ ڤانێن ل خوارێ، ڕێکێ ددەت تو بێژی چەماوەیێ نەخشەیا f خالا وەرگێڕانێ هەیە ل $x=c$.

أ f' مەزنترین بەها هەیە ل $x=c$. ب $f''(c)=0$ ج $f''(c)$ نینە.

ء نیشانا f'' ل $x=c$ دهێتە گۆهۆڕین هـ f نەخشەیەکا ڕادەرە سێجاییە و $c=0$

6 سەرجەمێ دوو ژمارەیێن مووجەب یەکسانە 60. مەزنترین بەهایێ دشیاندا بۆ ئەنجامێ لێکدانا ئێکێ ژ وان دگەل دوجایێ یێ دووێ چەندە؟

أ 3481 ب 3600 ج 27 000 د 32 000 هـ 36 000

7 سێگۆشەیەکا وەستاو، درێژیا ژێیێ وێ یەکسانە 10 . مەزنترین بەهایێ ڕووبەرێ وێ چەندە؟

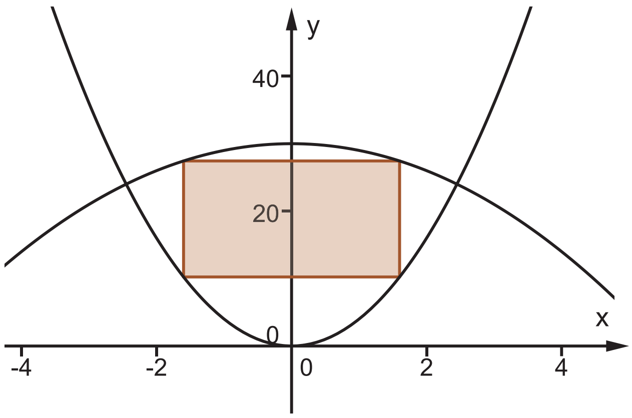
أ 24 ب 25 ج $25\sqrt{2}$ د 48 هـ 50

8 مەزنترین ڕووبەرێ لاکێشەیا سۆر ئەوا سنووردای ب هەردوو برگەیێن هاوتا $y=4x^{2}$ و $y=30-x^{2}$ دبیتە:

أ $20\sqrt{2}$ ب 40

ج $30\sqrt{2}$ د 50

هـ $40\sqrt{2}$



9 قەبارێ شەشپالۆیەکێ ب تێکڕایێ $24cm^3/min$ زێدەدبیت، لێ درێژیا لایێ وێ ب تێکڕایێ $2cm/min$ زێدە دبیت. درێژیا لایێ شەشپالۆیێ چەندە؟

أ $2cm$ ب $2\sqrt{2}\,cm$ ج $\sqrt[3]{12}cm$ د $4cm$ هـ $8cm$

10 قەبارێ شەشپالۆیەکێ ب تێکڕایێ $24cm^3/min$ زێدە دبیت، لێ رووبەرێ ڕوویێ وێ ب تێکڕایێ $12cm^2/min$زێدە دبیت. درێژیا لایێ شەشپالۆیێ چەندە؟

أ $2cm$ ب $2\sqrt{2}\,cm$ ج $\sqrt[3]{12}cm$ د $4cm$ هـ $8cm$

11 خالەك ل سەر بازنەیەکێ دلڤیت، هەکە لەزا وێ یا ئاسۆیی $\frac{dx}{dt}=3$ بیت ل خالا $(0.8\,,0.6)$، لەزا وێ یا ستوونێ $\frac{dy}{dt}$ ل وێ خالێ چەندە؟

أ -3.875 ب -3.75 ج -2.25 د 3.75 هـ 3.875

بەشێ

5

تمامکاری Integration

بەشێ پێنجێ

وانە

1–5 تەماماکارییا بێسنوور

2–5 تەماماکارییا سنووردار

ئەزموونا نیڤا بەشی

3–5 هەژمارکرنا تەماماکاریێ

4–5 بجهئینان ل سەر تەماماکاریێ

پێداچوون

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

هۆنەرێ چێکرنا سیرامیکی ل زۆربەی وەلاتان یا پێشکەفتیە، و هەتا ئەڤرۆ ئەو پێشکەفتنە یا بەردەوامە. وێنەیێ رۆنکرنێ یێ نەخشەیا $y = 5.0 + 2\sin\frac{x}{4}$ دەمێ $0 \le x \le 8\pi$ ، شێوەیێ تەنیشتی بۆ ئامانەکا سیرامیکی دنوێنت، x هێمایە بۆ بلنداهیێ (ب گرییان)، و y هێمایە بۆ نیڤتیرەیێ دەمێ بلنداهیێ x بیت. بنکەیێ وی ئامانێ دروستکرن و دانانە سەر مێزەکی دزڤریت. برێ وێ هەرییا دڤێت بهێتە زێدەکرن ل سەر بنکەیی بۆ چێکرنا ڤێ ئامانێ چەندە، بۆ زانین هەکە نیڤتیرەیێ ژ ناڤدەیە بەردەوام ب ئێک ئینجی (گرێیەکێ) کێمتر بیت ژ نیڤتیرەیێ ژ دەرڤە؟

ئەرێ تو یێ ئامادەیی؟

زاراڤ

1 **هەر دەستەواژەیەکا ل ستوونا رەخێ راستێ دگەل شروڤەکرنا ویێ یا گونجای ل ستوونا رەخێ چەپێ گرێدە؟**

1. داتاشراوێ نەخشەیا f دەمێ $x=a$.	أ. ئارمانجێ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ دەمێ Δx نێزیکی سفرێ دبیت.
2. تێکرایێ گۆهۆڕینا ناڤەندی.	ب. نێزیکبوونا برەکێ x بخۆڤەدگرت دەمێ x نێزیکی برەکی دیارکری دبیت یان نێزیکی $+\infty$ دبیت.
3. تێکرایێ گۆهۆڕینا ساتی	ج. نێزیکبوونا برێ $\frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ دەمێ h نێزیکی سفرێ دبیت.
4. نەخشەیا بەردەوام	د. ئەنجامێ دابەشکرنا گۆهۆڕینا y ل سەر گۆهۆڕینا x .
5. ئارمانج.	هـ. مەزنترین بەهایێ نەخشە بخوڤەدگرت دماوەیەکی دا.
	و. نەخشەیەکە، یا دشیاندایە وێنەیێ روونکرنا وێ وێنەبکەن بێ سەری پێنڤیسی راکەن.

سەرجەمێن ب ناڤو دەنگ:

2 سەرجەمێ n $s_n=1+2+...+n$ پێ n هەژماربکە، n ژمارەیەکا تەواوە مووجەبە.

3 بکارئینانا دەرئەنجامێ بیرکاری بسەلمینە کو، $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ، کو n ژماریەکا تەواوە مووجەبە.

داتاشراو

4 دوو نەخشەیێن جۆدا $u(x)$، $v(x)$ دیاربکە کو $u'(x)=v'(x)=a$ ، کو a ژمارەیەکا راستی بیت.

5 دیاربکە کو هەردوو نەخشەیان $f(x)=e^{2x}$ و $g(x)=e^{2x}+C$ ئێك داتاشراو هەنە، C ژمارەیەکا راستییە.

6 هەکەر $f(x)$ داتاشراوێ نەخشەیا $u(x)$ بیت، داتاشراوێ نەخشەیا $v(x)=u(x)+C$ چەندە؟ هەکە C ژمارەیەکا راستی بیت.

رێسایێن داتاشراوێ

ل راهێنانێن 7 هەتا 12، داتاشراوێ نەخشەیێ هەژماربکە.

7 $f(x)=e^x+\sin x$ **8** $f(x)=1+\tan x$ **9** $f(x)=2\ln x-\frac{1}{x}$

10 $f(x)=e^x\ln(x+1)$ **11** $f(x)=e^{\sin x}$ **12** $f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}$

ئارمانج

ل سەر سادەترین شێوە بنڤیسە:

13 $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$ **14** $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2+3}{5x^2+7}$ **15** $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}$

1–5

تەمامکاریيا بێسنوور
Indefinite Integral

ئارمانج

- ئێسینا تەمامکاریيا بێسنوور بۆ دەربرینا نەخشەیا بنەڕەت بکاردئینن.
- نەخشەیێن بنەڕەت هەژمار دکەن، بکارئینانا ڕێسایێن تەمامکاریێ.
- نەخشەیا بنەڕەت بۆ نەخشەیەکا دیارکری، و ئەوا دخالەکا دیارکری را دبۆریت هەژماردکەن.

زاراڤ
Vocabulary

نەخشەیا بنەڕەت
Antiderivative

تەمامکاریيا بێسنوور
Indefinite Integral

نەگۆڕێ تەمامکاریێ
Constant of integration

ڤەدیتن

هەژمارکرنا نەخشەیێن بنەڕەت: نەخشەیا $F(x)$ ئەو داتاشراو ژ وێ پەیدابوویی هەژماربکە:

1. $F'(x)=2x$ 2. $F'(x)=x$ 3. $F'(x)=x^2$

4. $F'(x)=\frac{1}{x^2}$ 5. $F'(x)=\cos x$

تە چەوا ئەو نەخشە هەژمارکر؟

نەخشەیا بنەڕەت

ل وانەیێن پێشتر تو فێربوویێ چەوا داتاشراوێ نەخشەیەکا دیارکری هەژماردکەی، لێ تە ڕوژەکێ پرسیارکرییە، ئەرێ تو دشێی نەخشەیەکێ هەژماربکەی هەکە داتاشراوێ وێ بزانی. ل ڤێ وانەیێ دێ فێربی: هەکە f نەخشەیەکا بەردەوام بیت، تو دشێی نەخشەیا F هەژماربکەی کو شیانا داتاشراوێ هەبیت، و f داتاشراوێ وێ بیت. دبێژنە ڤێ نەخشێ F نەخشەیا بنەڕەت بۆ نەخشەیا f. دێ فێری هندەك ڕێسایان بی، ئەو هاریکاریا تە بکەن بۆ هەژمارکرنا هەموو نەخشەیێن بنەڕەت بۆ نەخشەیەکا دیارکری.

نەخشەیا بنەڕەت
دبێژنە نەخشەیا F کو شیانا داتاشراوێ هەبیت نەخشەیا بنەڕەت بۆ نەخشەیا f، هەکە داتاشراوێ F یەکسانی f بیت.

ئەرێ پتر ژ نەخشەیەکا بنەڕەت بۆ نەخشەیەکا دیارکری هەنە؟ بەرسڤا ڤێ پرسیارێ گەلەك یا ساناهییە. هەموو نەخشەیێن نەگۆڕ دبنە نەخشەیێن بنەڕەت بۆ نەخشەیا $f(x)=0$.

سەلمێنراوا 1–5   نەخشەیا بنەڕەت
هەکە $F(x)$ نەخشەیەکا بنەڕەت بیت بۆ نەخشەیا $f(x)$، دێ نەخشەیا $G(x)=F(x)+C$، C ژمارەیەکا ڕاستییە، نەخشەیەکا بنەڕەت بیت بۆ $f(x)$.

هەژمارکرنا داتاشراوێ $G(x)=F(x)+C$ بەسە بۆ سەلماندنا ڤ سەلمینراوی. ئەوێن ل بوارێ بیرکاریێ کاردکەن هێمایێ $\int f(x)dx$ بکاردئینن بۆ دەربرینا هەر نەخشەیەکا بنەڕەت بۆ نەخشەیا $f(x)$. و دبێژنە ڤێ هێمایێ تەمامکاریيا بێسنوور بۆ نەخشەیا $f(x)$.

نموونـــه 1
هەژمارکرنا نەخشەیا بنەڕەت

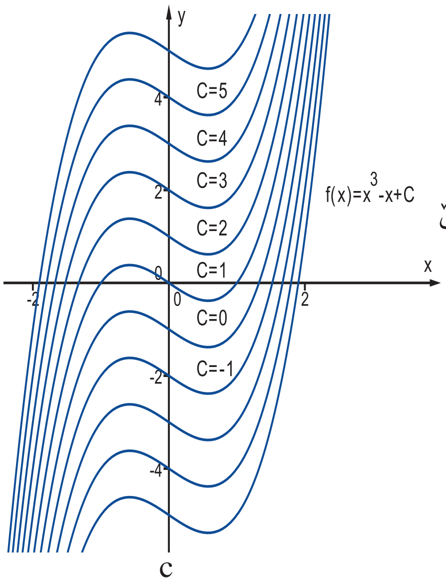
$\int x^2dx$ هەژماربکە:

شیکار:

هەکە تو ڕێسایا داتاشراوێ نەخشەیێن هێزێ $f(x)=ax^n$ ل بیرا خۆ بینی، دێ بینی کو نەخشەیا $f(x)=x^2$ داتاشراوێ نەخشەیەکێیە ژ جۆرێ $F(x)=ax^3$. بەلێ داتاشراوێ ڤێ نەخشێ دبیتە $F(x)=3ax^2$. هەکە $F'(x)=f(x)$ دێ $a=\frac{1}{3}$ و $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ دبیتە نەخشەیا بنەڕەت بۆ $f(x)=x^2$.. لەورا تو دشێی بنڤیسی: $\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$. تێبینیا ژمارەیا C بکە. ئارمانجێ هەبوونا ڤێ ژمارا نەگۆڕ (C) دا بزانی کو دوو نەخشەیێن بنەڕەت هەنە بۆ وێ نەخشێ و ژ ئێکودو د جودانە ب جیاوازییا زێدەکرنا ژمارەکا ڕاستی.

خالا چاڤدێریێ

1. $\int x^3dx$ هەژماربکە:



پەیوەندیا $G(x)=F(x)+C$ ل ناڤبەرا دوو نەخشەیێن بنەڕەت بۆ ئێك نەخشێ، وێ ئێکێ دگەهینت کو وێنەیێن ڕۆنکرنێن هەموو نەخشەیێن بنەڕەت یێن نەخشەیەکا دیارکری پەیدا دبن ژ ئەنجامێ ڕاکێشانا ستوونی یا وێنەیێ روونکرنا نەخشەیەکێ ژ وان، هەر وەك ل وێنەیێ بەرامبەر دیاردبیت، ب بەرچاڤ وەرگرتنا ڤێ تێبینیێ، دناڤ هەموو نەخشەیێن بنەڕەت یێن نەخشەیەکا دیارکری دا، ئێك نەخشەیا بنەڕەت هەیە وێنەیێ روونکرنا وێ دخالەکا دیارکری ڕا دبۆریت بتنێ ل سەر رووتەختێ پۆتانی. و نەگۆڕێ c دبیتە ئێکودوو بڕینا ستوونێ یێ وێنەیێ روونکرنا وێ نەخشەیا بنەڕەت، ئانکو خالا ئێکودوبڕینا وێ نەخشەی دبیتە $(0\ ,\ c)$.

نموونـــه 2
هەژمارکرنا نەخشەیەکا بنەڕەت یا سنووردای

نەخشەیا بنەڕەت بۆ $f(x)=x^2$ هەژماربکە هەکە وێنەیێ ڕۆنکرنا وێ د خالا (3,3) را ببوریت.

شیکار:

$G(x)=\frac{1}{3}x^3+C$ دبیتە نەخشەیا بنەڕەت بۆ نەخشەیا $f(x)=x^2$ ، دا وێنەیێ روونکرنا نەخشەیا بنەڕەت د خالا (3,3) رابوریت، دڤێت C هاوکێشەیا $3=\frac{1}{3}3^3+C$ ساخبکەت. ئانکو C یەکسانە -6 . و ژ ڤێ دیاردبیت کو نەخشەیا بنەڕەت بۆ نەخشەیا $f(x)=x^2$ ئەوا د خالا (3,3) رادبۆریت دبیتە $G(x)=\frac{1}{3}x^3-6$.

خالا چاڤدێریێ

2. نەخشەیا بنەڕەت بۆ نەخشەیا $f(x)=x^4$ هەژماربکە هەکە وێنەیێ ڕۆنکرنا وێ د خالا (2,4) را ببۆریت.

دێ ل ڤێ وانێ فێربی چەوا تەمامکارییا بێسنوور بۆ نەخشەیەکا دیارکری هەژمارکەی. چونکی داتاشراو ڤەگۆهاستنا نەخشەیەکیە بۆ داتاشراوێ وێ، لەورا هەژمارکرنا تەمامکارییا بێسنوور بۆ نەخشەیەکا دیارکری دبیتە کردارەکا **بەرۆڤاژی بۆ داتاشراوی**، ژ ڤێ تێبینیێ دەرئەنجام دبیت کو ڕێسایێن داتاشراوێ ڕێسایێن تەمامکاریا بێسنوور پەیدا دکەن.

ڕێسایێن تەمامکاریا بێسنوور

ڕێسایێن تەمامکاریێ	ڕێسایێن داتاشراوی
$\int 0dx=C$	$(C)'=0$
$\int kdx=kx+C$	$(kx)'=k$
$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$	$(kf(x))'=kf'(x)$
$\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$	$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$
$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad n\neq -1$	$(x^n)'=nx^{n-1}$
$\int e^x dx=e^x+C$	$(e^x)'=e^x$
$\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
$\int \cos xdx=\sin x+C$	$(\sin x)'=\cos$
$\int \sin dx=-\cos x+C$	$(\cos x)'=-\sin x$

نموونە 3 بجهئینانا ڕێسایێن تەمامکاریێ

$\int(2\cos x-5x)dx$ هەژماربکە.

شیکار:

$$\int(2\cos x-5x)dx=\int 2\cos xdx-\int 5xdx=2\int\cos xdx-5\int xdx=2\sin x-\frac{5}{2}x^2+C$$

خالا چاڤدێریێ

3. $\int(2\sin x+3x^2)dx$ هەژماربکە

بۆ ساناهیکرنا بجهئینانا ڕێسایێن تەمامکاریێ. دڤێت هندەك جاران تو وێ نەخشەیێ جارەکا دی ب شێوەیەکی ڕێك بنڤیسە، دا بجهئینانا ڕێسایێن تەمامکاریێ ب ساناهی بیت.

نموونە 4 پێنگاڤێن هەژمارکرنا تەمامکاریا بێسنوور

ڤی خشتەیێ تەمامبکە:

ساده‌بکە	تەمامکاریێ ئەنجام بدە	ڕێکخستنا نەخشەیێ	تەمامکاری
			أ $\int \frac{1}{x^3}dx$
			ب $\int \sqrt{x}\,dx$
			ج $\int 2\sin xdx$

شیکار:

تەمامکاری	ڕێکخستنا نەخشەی	تەمامکاریێ ئەنجام بدە	سادەبکە
أ $\int \frac{1}{x^3}dx$	$\int x^{-3}dx$	$\frac{-1}{2}x^{-2}+C$	$-\frac{1}{2x^2}+C$
ب $\int \sqrt{x}\,dx$	$\int x^{\frac{1}{2}}dx$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$
ج $\int 2\sin x dx$	$2\int \sin x dx$	$2(-\cos x)+C$	$-2\cos x+C$

خالا چاڤدێریێ 4 : $\int x\sqrt{x}\,dx$.

1–5 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا **1** هەتا **3** ، دروستیا ئەوا نڤیسی ساخبکە، ب داتاشراوکرنا نەخشەیێن بنەڕەت:

1 $\int\left(-\frac{9}{x^4}\right)dx=\frac{3}{x^3}+C$

2 $\int\left(4x^3-\frac{1}{x^2}\right)dx=x^4+\frac{1}{x}+C$

3 $\int\frac{x^2-1}{x\sqrt{x}}dx=\frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}}+C$

ڤی خشتەی تەمامبکە.

	تەمامکاری	ڕێکخستنا نەخشەی	تەمامکاریێ ئەنجام بدە	سادەبکە
4	$\int\sqrt[3]{x}dx$			
5	$\int\frac{1}{x\sqrt{x}}dx$			
6	$\int\frac{1}{(3x)^2}dx$			

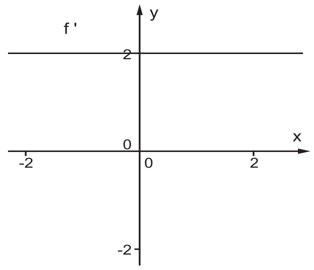
ژ ڕاهێنانا **7** هەتا **15**، تەمامکارییا بێسنوور هەژماربکە، و دروستیا بەرسڤا خو ساخبکە بکارئینانا داتاشراویێ:

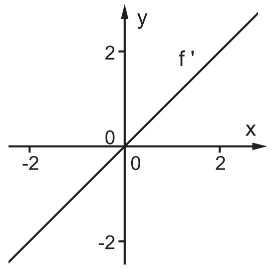
7 $\int(2x-3x^2)dx$ **8** $\int(x^3-4x+2)dx$ **9** $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

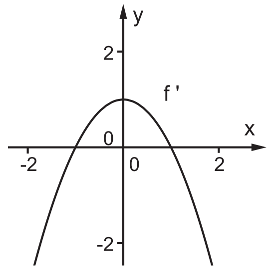
10 $\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx$ **11** $\int(2x^2-1)^2dx$ **12** $\int\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)dx$

13 $\int(2\sin x+3\cos x)dx$ **14** $\int(x^2-\sin x)dx$ **15** $\int(\tan^2 x+1)dx$

ژ ڕاهێنانا 16 هەتا 18، دوو وێنەیێن رۆنکرنێ یێن نێزیککری بۆ دوو نەخشەیان بکێشە کو هەردووان داتاشراوەکی هاوبەش هەبیت کو وێنەیێ رونکرنا بەرامبەر بنوێنیت.

16 

17 

18 

ل هەردوو ڕاهێنانێن، 19و 20، نەخشەیا $f(x)$ هەژماربکە ب زانینا داتاشراویێ وێ و خالەکێ ل سەر وێنەی رونکرنا وێ:

19 $f'(x)=2x-1$ ؛ $(1,1)$

20 $f'(x)=2(x-1)$ $(3,2)$

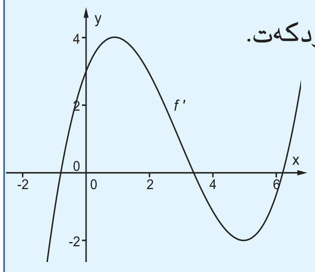
21 **گەشەبوونا ڕووەکان:** نە مامگەهەك جۆرەکی نەمامکێن کورت دفرۆشت پشتی6 سالان ژ چاندنا وان. نەخشەیا $h'(t)=1.5t+5$ نموونەیەکێ دنوێنت بۆ تێکرایێ گەشەبوونا ڤی جۆرێ ڕووەکان دسالەکێ دا ب سانتیمێتەران یا پیڤاییە ل دەمێ شەش سالان، و درێژیا نەمامکەکێ ژ ڤی جۆری12 cm بوو ل دەمێ چاندی$(t=0)$.

أ درێژیا ڤێ نەمامکێ $h(t)$ بهەژمێرە پشتی بۆرینا t سالان.

ب درێژیا ڤێ نەمامکێ ل دەمێ دئێتە فرۆتن دێ بیتە چەند؟

دەربارەیی چەمکان

22 وێنەیێ بەرامبەر وێنەیێ رۆنکرنا داتاشراویێ f' بۆ نەخشەیا f دیاردکەت. وی وێنەیی بکاربینە بۆ بەرسڤدانا پرسیاران، بۆ زانین$f(0)=-4$.



أ بەهایەکی نێزیککری بۆ لاریێ نەخشەیا f دیاربکە دەمێ $x=4$ بیت. بەرسڤا خۆ رۆنبکە.

ب ئەری چێدبیت $f(2)=-1$؟بەرسڤا خۆ ڕۆنبکە.

ج ئەرێ چێدبیت $f(5)-f(4)>0$ ؟ بەرسڤا خۆ رۆنبکە.

د بەهایەکی نێزیککری بدە x دەمێ نەخشەیا f مەزنترین بەها وەردگریت. بەرسڤا خو روونبکە.

هـ ماوەیەکی بخەملینە کو وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیاf دوی ماوەیدا یی ناڤچال بیت و ماوەیەکی دی بخەملینە کو وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیاf دوی ماوەیدا یی کومدبیت. بەهایەکی نێزیککرنێ بدەx ل خالا وەرگێرانێ.

و بەهایەکی نێزیککری بدەx کو داتاشراویێ دوویێf'' بچووکترین بەهایی وەربگریت.

ز وێنەیەکی روونکرنێ یێ نێزیککری بۆ نەخشەیا f بکێشە.

23 تەپکەك ژ بلنداهیا2m ب لەزا دەستپێکی $10m/s$ هاتە هەلاڤێتن، بلندترین خال کو تەپك دگەهیتێ چەندە؟

24 **تاودان:** ترومبێلەك ل ترەفیك لایتێ یا ڕاوەستیای بوو، دەمێ نیشانا کەسك دیاربوو ئەو ترومبێلە ب تاودانا $2m/s^2$ برێڤەچوو، و د وی دەمیدا ترومبێلەکا بارهەلگر ژ وێ بۆری ب لەزەکا نەگۆر برێ وێ $10m/s$ بوو.

أ پشتی چەند کیلو مێتەران ئەو ترومبێلە دێ گەهیتە بارهەلگرێ.

ب لەزا ترومبێلێ دێ بیتە چەند دەمێ بگەهیتە بارهەلگرێ؟

25 فرۆکەیەك ب تەودانەکا نەگۆڕ ل سەر ڕێرەوێ فرۆکخانێ بریێڤەچۆ و پشتی برینا $1.5\,\text{km}$ ل سەر ڕێرەوێ ئەو فرۆکە بلندبوو و لەزا وێ گەهشتە $210\,\text{km/h}$. تاودانا فرۆکێ چەند بوو؟

دروستە یان نەیا دروستە [شاشە]؟ ژ ڕاهێنانا 26 هەتا 32 دیاربکە هەکە دەستەواژەیا دروست بیت هۆیێ وێ بێژە، و هەکە نەیا دروست بیت ب دژە نموونەیەکێ روونبکە.

26 هەر نەخشەیەکا بنەڕەت بۆ نەخشەیەکا زۆر رادەدار ژ پلەیا n دبیتە نەخشەیەکا زۆر رادەدار ژ پلەیا $n+1$.

27 هەکە f نەخشەیەکا زۆر ڕادەدار بیت. دێ وێ نەخشێ بتنێ ئێك نەخشەیا بنەڕەت هەبیت کو وێنەیێ روونکرنا وێ دخالا بنەڕەت رابىۆرت

28 هەکە $F(x)$ و $G(x)$ دوو نەخشەیێن بنەڕەت بن بۆ نەخشەیا f ، دێ $F(x)=G(x)+C$ ، C ژمارەیەکا راستییە.

29 $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx$

30 هەر نەخشەیەکێ f بتنێ ئێك نەخشەیا یا بنەرەت هەیە.

31 نەخشەیا f بینەدەر هەکە داتاشراوێ وێ یێ دووێ $f''(x) = 2x$ ، و وێنەیێ ڕۆنکرنا وێ لێکەفتەکی ئاسۆیی ل خالا $(2,0)$ هەبیت.

32 $f'(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 2 \\ 3x & 2 \le x \le 5 \end{cases}$. نەخشەیا f بینەدەر، بۆ زانین یە f بەردەوامە و $f(2) = 6$ ئەرێ ڤێ نەخشەی شیانا داتاشراوێ هەیە ل $x = 2$ ؟

2–5

تەمامكارییا سنووردار

Definite Integral

ئارمانج

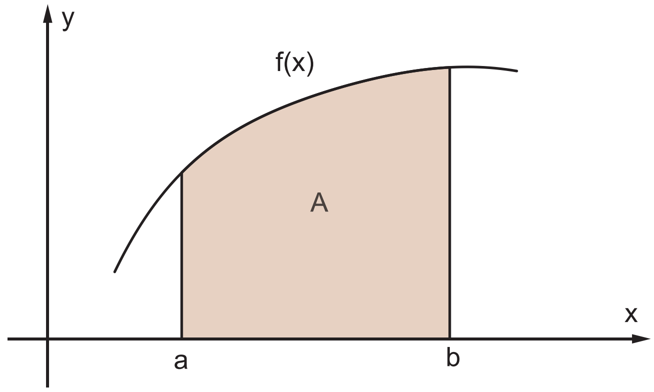
- تەمامكارییا سنووردار هەژماردكەن بكارئینانا سیفەتێن وێ

زاراڤ Vocabulary

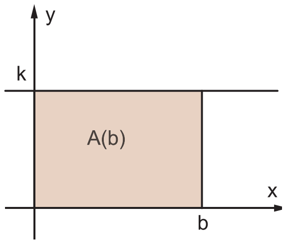
تەمامكارییا سنووردار
Definite Integral
رادەیێن تەمامكارییێ
Limits of integration

تەمامكارییا سنووردار

تو ل وانەیا بۆری فێربوویی كو هەژماركرنا تەمامكارییا بێسنوور بۆ نەخشەیەكا دیاركری دبیتە بەرۆڤاژیا كردارا داتاشراویێ، و تەمامكارییا بێسنوور بۆ نەخشەیا f دبیتە نەخشەیا بنەرەت بۆ وی نەخشەیێ. لێ ژبلی ڤێ ئێكێ تەمامكارییا بێسنوور ڕۆلەكی دی هەیە، دێ ل ڤێ وانەیێ فێربی كا چەوا نەخشەیا بنەڕەت بكاردهێت بۆ شیكاركرنا دووەمین جۆری پرسیارێن سەرەكی دهەژماركرنا جوداكارییێ و تەمامكارییێ دا، و ئەو دبیتە پرسیارا ڕووبەری. دڤێ وانێ دا دێ فێربی چەوا نەخشەیا بنەڕەت بكاردئینی بۆ هەژماركرنا ڕووبەرێ دەڤەرەكا سنووردای ب وێنەیێ ڕۆنكرنێ و تەوەرێ x و دوو راستەهێلان $x = a$ و $x = b$ ، هێمایێ A بۆ ڕووبەرێ ڤێ دەڤەرێ بكاربینە.



ل دەستپێكێ دێ گرنگیێ دەینە ڕووبەرێ $A(b)$ یێ وێ هاتییە سنووردان دەڤەرا ب وێنەیێ ڕوونكرنا نەخشەیێ و تەوەرێ x هەردوو ڕاستەهێلان $x = 0$ و $x = b$:

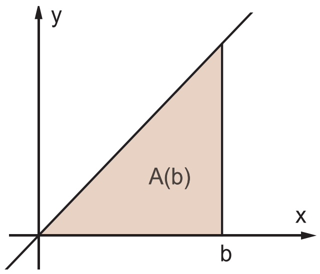


دێ هەولدەین شێوازەكی ببینین بۆ هەژماركرنا ڤی جۆرێ ڕووبەران.

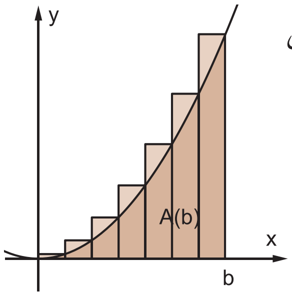
هەكە $f(x) = k$ ژمارەكا راستی بیت، دێ $A(b) = bk$

هەكە $f(x) = x$ ، دێ $A(b) = \frac{1}{2}b^2$

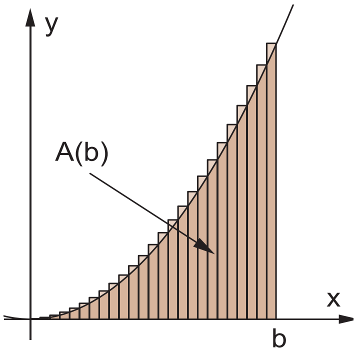
هەكە $f(x) = x^2$، دێ ئەڤ كارە ئالۆزتر بیت، چونكی ئەو دەڤەرە ب وێنەیێ رونكرنا نەخشەیا f و تەوەرێ x و هەردوو راستەهێلان $x = 0$ و $x = b$. دهێتە سنوردان، دبیتە شێوەیەكی ئەندازەی نەرێك. دێ ئەم هەول دەین بەهایەكی نێزیككری بۆ ڤێ ڕووبەرێ بینینەدەر. بۆ ڤێ مەرەمێ دێ ماوەیێ $[0,b]$ دابەشكەین بۆ n ماوەیێن یەكسان، و مەودایێ هەر ئێكێ ژ وان دبیتە $\left(\frac{b}{n}\right)$، و دێ لاكێشەیان ل سەر ڤان ماوەیان وێنەكەین بلنداهییێن وان ئێك ل دووڤ ئێك ببنە $f\left(\frac{b}{n}\right)$ ، $f\left(\frac{2b}{n}\right)$ $\cdots$ $f\left(\frac{nb}{n}\right)$

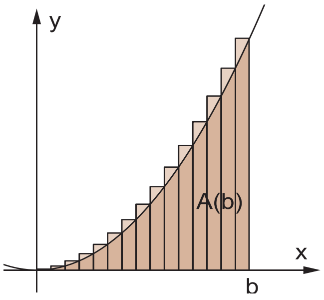


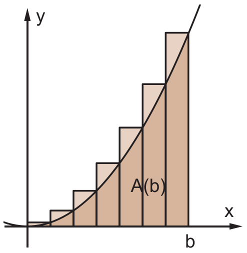
سەرجەمێ ڕووبەرین ڤان لاكێشەیان بەهایەكی نێزیككری بۆ ڕووبەرێ $A(b)$ پكدهینت.



هەکە تۆ بەرێ خو بدەیە ڤان هەرسێ وێنەیێن رۆنکرنێ ل خوارێ، دێ تێبینیێ کەی ب زێدەبوونا بەهایێ n ژمارا لاکێشەیان زێدەدبن و سەرجەمێ رووبەرێن وان نێزیکی $A(b)$ دبیت، و ل دووڤ ڤێ تێبینیێ دێ بێژین $A(b)$ دبیتە ئەنجامێ ڤی سەرجەمی دەمێ بەهایێ n بێسنوور زێدەببیت.







سەرجەمێ رووبەرین ڤان لاکێشەیان دبیتە:

$$S_n = \frac{b}{n} f\left(\frac{b}{n}\right) + \frac{b}{n} f\left(\frac{2b}{n}\right) + \ldots + \frac{b}{n} f\left(\frac{nb}{n}\right) = \frac{b}{n}\left[\frac{b}{n}\right]^2 + \frac{b}{n}\left[2\frac{b}{n}\right]^2 + \ldots + \frac{b}{n}\left[n\frac{b}{n}\right]^2$$

$$= \frac{b^3}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)$$

بەلێ $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ژ ڤێ دیاردبیت کو:

$$A(b) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{b^3}{n^3} = \frac{1}{3} b^3 \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{2n^3} = \frac{1}{3} b^3 \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2n^3} = \frac{1}{3} b^3$$

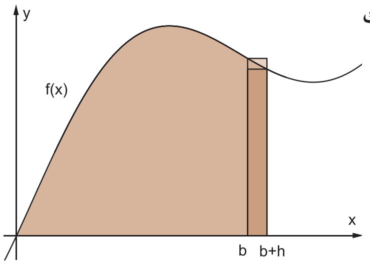
خشتەیێ ل خوارێ ئەوا ئەم گەهشتینێ پۆختە دکەت.

A	$f(x)$
$A = kb$	$f(x) = k$
$A = \frac{1}{2} b^2$	$f(x) = x$
$A = \frac{1}{3} b^3$	$f(x) = x^2$

خشتەیێ ل سەری دیاردکەت کو رووبەر A دئێتە هەژمارکرن بکارئینانا نەخشەیا $F(x)$ کو $A = F(b)$.
ل رەخەکی دی خشتەیێ ل خوارێ چەمکی هەژمارکرنا نەخشەیا $F(x)$ دیاردکەت:

پەیوەندی لناڤبەرا $f(x)$ و $F(x)$	$F(x)$	A	$f(x)$
$F'(x) = f(x)$	$F(x) = kx$	$A = kb$	$f(x) = k$
$F'(x) = f(x)$	$F(x) = \frac{1}{2} x^2$	$A = \frac{1}{2} b^2$	$f(x) = x$
$F'(x) = f(x)$	$F(x) = \frac{1}{3} x^3$	$A = \frac{1}{3} b^3$	$f(x) = x^2$

ژ شێوازێ بوری دەرئەنجامدکەین کو رووبەری $A(b)$ یەکسانە $F(b)$ دەمێ $F(x)$ نەخشەیا بنەرەت بیت بۆ وێ نەخشێ F کو $C = 0$ هەکە ئەم بەحسێ بارێ گشتی بکەین، دەمێ f نەخشەیەکا بەردەوام بیت، و ل دووڤ خشتەیێ بەرامبەر، یا دشیاندایە رووبەرێ $A(b + h) - A(b)$ سنوور بدەین ب دوو رادەیان ئەو دبنە: رووبەرێ لاکێشە یا بچووك و رووبەرێ لاکێشەیا مەزن، رووبەرێ لاکێشەیا بچووك یەکسانە $hf(b)$ و رووبەرێ لاکێشەیا مەزن یەکسان $hf(b + h)$.



ژ ڤێ دەرئەنجام دبیت کو $hf(b+h) \le A(b+h) - A(b) \le hf(b)$

و پاشی $f(b+h) \le \frac{A(b+h)-A(b)}{h} \le f(b)$

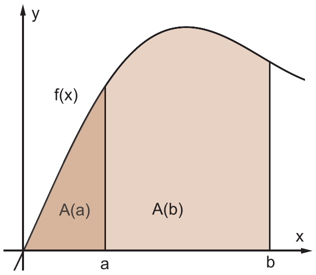
دەمێ hنێزیکی 0 دبیت دێ:

$$\lim_{h\to 0} f(b+h) \le \lim_{h\to 0} \frac{A(b+h)-A(b)}{h} \le \lim_{h\to 0} f(b)$$

لێ $\lim_{h\to 0} f(b+h) = f(b)$ ، چونکی f نەخشەیەکا بەردەوامە ل$x = b$ و$\lim_{h\to 0} \frac{A(b+h)-A(b)}{h} = A'(b)$ ل دووڤ پێناسا داتاشراوێ $\lim_{h\to 0} f(b) = f(b)$.

ژ ڤێ دەرئەنجام دکەین، و ل دووڤ سەلمینراوا دوو مەرج، کو$A'(b) = f(b)$. و$A(x)$ نەخشەیا بنەرەتە بۆ نەخشەیا$f(x)$.

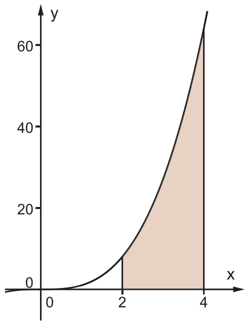
هەکە ئەم ڤگەرێنە رووبەرێ وێ دەڤەرا سنووردای ب وێنەیێ روونکرنا نەخشێ و تەوەرێ x و هەردوو راستەهێلان$x = a$ و $x = b$ دێ بینین ئەو رووبەرە یەکسان$A(b) - A(a)$ کو$A(y)$ نەخشەیا بنەرەتە بۆ نەخشەیا$f(x)$ ، ئانکو$\boxed{S = A(b) - A(a)}$. و ژ ڤێ دیاردبیت کو نەخشەیێن بنەڕەت ب مفانە بۆ هەژمارکرنا رووبەران



نموونـــــه 1

هەژمارکرنا رووبەرێ دەڤەرەکێ

هەکە $f(x) = x^3$ ، رووبەرێ دەڤەرا سنووردایی ب وێنەیێ روونکرنا نەخشەیێ و تەوەرێ x و هەردوو راستەهێلان$x = 2$ ، $x = 4$ بهەژمێرە.



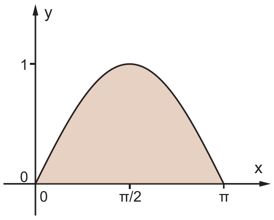
شیکار

رووبەرێ دەڤەرێ دبیتە$A = F(b) - F(a)$ دەمێ $f(x)$ نەخشەیا بنەڕەت بیت بۆ نەخشەیا$f(x)$. نەخشەیا بنەڕەت$F(x) = \frac{1}{4}x^4$

رووبەر دبیتە$A = F(4) - F(2) = \frac{1}{4}4^4 - \frac{1}{4}2^4 = 60$

خالا چاڤدێریێ

1. رووبەرێ دەڤەرا سنووردایی ب وێنەیێ رۆنکرنا نەخشەیا $f(x) = \sin x$ و تەوەرێ x و هەردوو راستەهێلان $x = 0$ و $x = \pi$ بهەژمێرە.



پێناسا تەمامکاریا سنووردار

هەکە f نەخشەیەکا بەردەوام بیت، وa، b دوو بەهابن د بوارێ وێ دا، تەمامکاریا سنووردار بۆ نەخشەیاf ل ناڤبەرا a، b دێ بیتە: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

دەمێ$F(x)$ نەخشەیا بنەڕەت بیت بۆ$f(x)$. دبێژنەa نزمترین رادەیێ تەمامکاریێ وb **بلندترین رادەیێ تەمامکاریێ** وf **نەخشەیا بابەتێ تەمامکاریێ بیت.**

ئەوێن دبوارێ بیرکاریێ دا کاردکەن هێمایێ $[F(x)]_a^b$ ل جهێ $F(b) - F(a)$ بکاردئین.

تەمامکاریا سنووردار هندەك سیفەت هەنە، ئەو هەژمارکرنا تەمامکاریێ ساناهی دکەن.

سیفەتێن تەمامکاریا سنووردار

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- هەکە f نەخشەیەکا بەردەوام بیت $f(x) \ge 0$ ، x هەر چەند بیت دماوەیێ $[a,b]$ دا، دێ $\int_a^b f(x)dx \ge 0$
- هەکە f و g دوو نەخشەیێن بنەرەت بن و $f(x) \le g(x)$، هەر چەند بیت دماوەیێ $[a,b]$ دا، دێ $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.
- هەکە f نەخشەیەکا بەردەوام بیت، دێ نەخشەیا $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ شیانا داتاشراویێ هەبیت ل هاوسییێن a ، و داتاشراویێ وێ $F'(x) = f(x)$. دبێژنە نەخشەیا $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ نەخشەیا کەلۆکی.

نموونە 2 هەژمارکرن تەمامکاریا سنووردار

بهایێ هەر تەمامکارییەکێ بهەژمێرە:

أ $\int_2^4 (x^2 - 3x - 2)dx$

ب $\int_{-1}^3 \left(-|x-1| + 2\right)dx$

شیکار:

أ پشتبەستن ب سیفەتێن تەمامکاریا سنوودار.

$$\int_2^4 (x^2 - 3x - 2)dx = \int_2^4 x^2dx - \int_2^4 3xdx - \int_2^4 2dx = \int_2^4 x^2dx - 3\int_2^4 xdx - 2\int_2^4 dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_2^4 - 3\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_2^4 - 2[x]_2^4 = \tfrac{1}{3}\left(4^3 - 2^3\right) - \tfrac{3}{2}\left(4^2 - 2^2\right) - 2(4-2) = -\tfrac{10}{3}$$

ب ژبەر هندێ کو نەخشە بهایێ ڕووت بخۆڤەدگرت، دڤێت وێ ژ هێمایێ ڕووت رزگاربکەین دا بشێین نەخشەیا بنەرەت هەژماربکەین، و ئەو دێئێتە ئەنجامدان ب رێیا نڤیسینا تەمامکاریێ وەك سەرجەمێ دوو تەمامکارییان ل سەر شێوەیێ ل خوارێ:

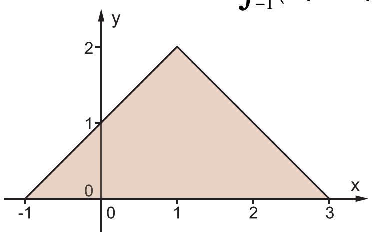
$$\int_{-1}^3 \left(-|x-1| + 2\right)dx = \int_{-1}^1 \left(-|x-1| + 2\right)dx + \int_1^3 \left(-|x-1| + 2\right)dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x+1)dx + \int_1^3 (-x+3)dx$$

$$= \int_{-1}^1 xdx + \int_{-1}^1 1dx - \int_1^3 xdx + \int_1^3 3dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1 + [x]_{-1}^1 - \left[\frac{1}{2}x^2\right] + [3x]_1^3$$

$$= 2 - 4 + 6 = 4$$



تو دشێی بەرسڤێ ساخبکەی ب رێیا هەژمارکرنا ڕووبەرێ سێگۆشێ ل وێنەیێ سەری.

خالا چاڤدێریێ

2. بهایێ هەر تەمامکاریەکێ هەژماربکە.

أ $\int_{-2}^4 \left(x^2 - 2\right)dx$

ب $\int_{-1}^3 \left(1 - |x|\right)dx$

بەهایێ ناڤەند Mean Value

دبێژنە ژمارەیا ڕاستی $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ بەهایێ ناڤەند بۆ نەخشەیا f دماوەیێ $[a,b]$دا.

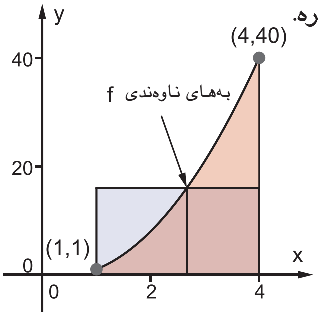
تو ل ئاماریٚ فێربوویی کو ناڤەندیٚ بهایێن کومەلەکیٚ دبیتە بەهایەك، چێدبیت ئەو بەهایە دناڤ بەهایێن کۆمەلیٚ دا نە بیت. هەکە ناڤەندیٚ نمرەیێن قوتابیێن پۆلەکیٚ ل بابەتیٚ بیرکاریێ 65.7 بیت، ئەڤە ویٚ چەندیٚ ناگەهینیت کو نمرەیان قوتابیەکی 65.7 بیت. ئەریٚ بەهایێ ناڤەند بۆ نەخشەیا f دماوەی دا دبیتە بەهایەك ئەو نەخشە وەدگرت ل خالەکیٚ دکەفتە دوی ماوەی دا؟ بەرسڤا ڤیٚ پرسیاریٚ بەلێیە ل دووڤ سەلمێنراوا بەهایێ ناڤەند د تەمامکاریێ دا.

سەلمێنراوا 5–2 بەهایێ ناڤەند

هەکە f نەخشەیەکا بەردەوام بیت دماوەیێ گرتی $[a,b]$ دا، بەهایەك هەیە، وەك $c\in[a,b]$ کو $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ ساخدکەت.

نموونە 3 هەژمارتنا بەهایێ ناڤەند بۆ نەخشەیێ

بەهایێ ناڤەند بۆ نەخشەیا $f(x)=3x^2-2x$ د ماوەیێ $[1,4]$ دا بهەژمێرە.



شیکار

بەهایێ ناڤەند بۆ وی نەخشەیێ دماوەیێ $[1,4]$ دا دبیتە

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{4-1}\int_1^4\left(3x^2-2x\right)dx=\frac{1}{3}\left[x^3-x^2\right]_1^4$$

$$=\frac{1}{3}\left[64-16-(1-1)\right]=16$$

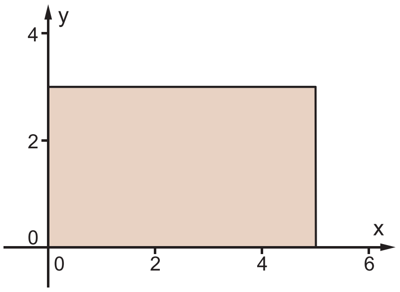
خالا چاڤدێریێ

3. بەهایێ ناڤەند بۆ نەخشەیا $f(x)=2x+1$ د ماوەیێ $[1,4]$ دا بهەژمێرە.

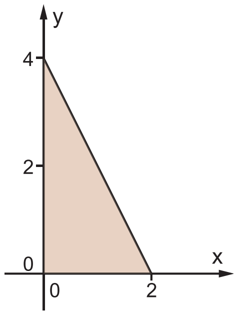
2-5 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا **1** هەتا **6**، تەمامكاریيا سنووردار بۆ ڕووبەرێ دەڤەرا سیبەركری بنڤیسە، بێی هەژماركرنا بەهایێ ڤێ ڕووبەری.

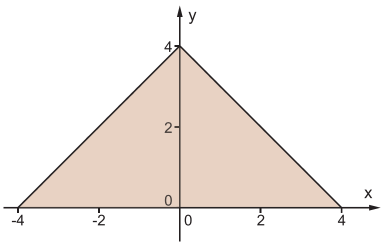
1 $f(x)=3$



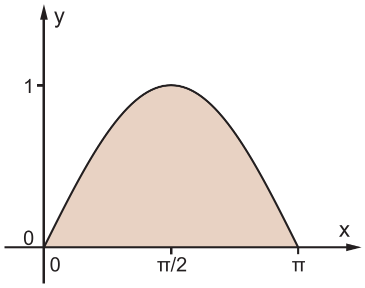
2 $f(x)=4-2x$



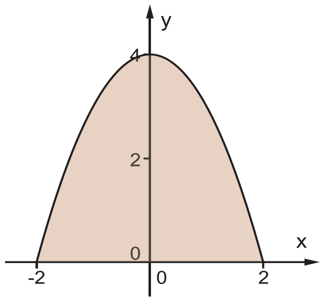
3 $f(x)=-|x|+4$



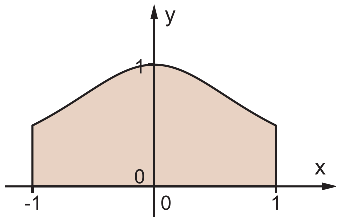
4 $f(x)=\sin(x)$



5 $f(x)=4-x^2$



6 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$



ژ ڕاهێنانا **7** هەتا **10** ، دەڤەرا ڕووبەرێ وێ دبیتە تەمامكاریيا سنووردار وێنەبكە، پاشی یاسایێن هەژماركرنا ڕووبەری ل ئەندازێ بكاربینە بۆ هەژمارتنا بهایێ تەمامكاریێ.

7 $\int_0^4 \frac{x}{2}\,dx$ **8** $\int_0^2 (2x+5)\,dx$ **9** $\int_{-1}^1 (1-|x|)\,dx$ **10** $\int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$

ژ ڕاهێنانا **11** هەتا **14** ، بەهایێ هەر تەمامكارییەكێ بكارئینانا ڤان بەهایان هەژماربكە:

$$\int_2^4 dx=2 \qquad \int_2^4 x\,dx=6 \qquad \int_2^4 x^3\,dx=60$$

11 $\int_2^4 4x\,dx$ **12** $\int_2^4 (x^3+4)\,dx$ **13** $\int_2^4 15\,dx$ **14** $\int_2^4 (6+2x-x^3)\,dx$

ژ ڕاهێنانا 15 هەتا 26، ڤان تەمامكارییان هەژماربكە.

15 $\int_{2}^{7} 3dx$

16 $\int_{0}^{1} 2x\,dx$

17 $\int_{-1}^{0} \left(x^2-2\right)dx$

18 $\int_{1}^{3} \left(3x^2+5x-4\right)dx$

19 $\int_{1}^{2} \left(\frac{3}{x^2}-1\right)dx$

20 $\int_{-3}^{3} x^{\frac{1}{3}}dx$

21 $\int_{1}^{4} \frac{x-2}{\sqrt{x}}dx$

22 $\int_{-1}^{0} \left(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)dx$

23 $\int_{0}^{3} |2x-3|dx$

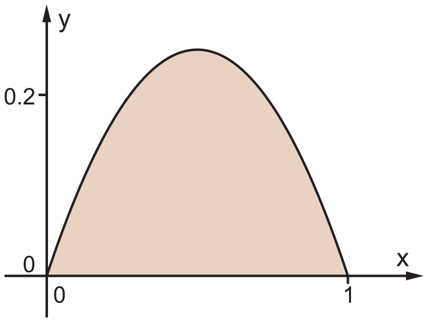
24 $\int_{1}^{4} \left(3-|x-3|\right)dx$

25 $\int_{0}^{\pi} \left(1+\sin x\right)dx$

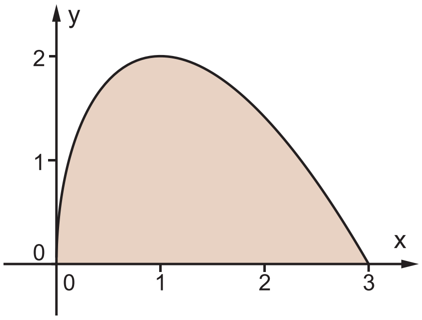
26 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$

ژ ڕاهێنانا 27 هەتا 30، ڕووبەرێ دەڤەرا سیبەركری هەژماربكە.

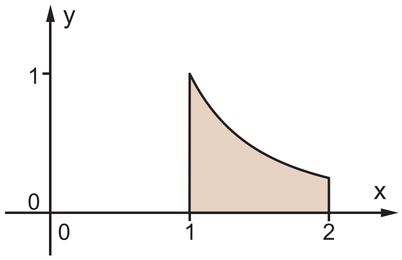
27 $f(x)=x-x^2$



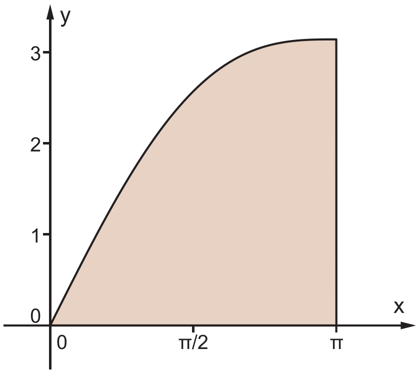
28 $f(x)=(3-x)\sqrt{x}$



29 $f(x)=\frac{1}{x^2}$



30 $f(x)=x+\sin x$



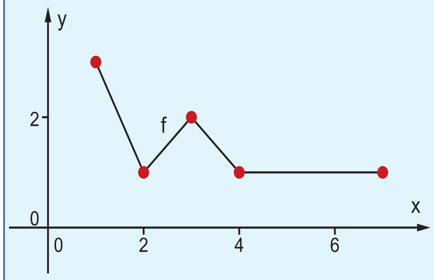
ل هەردوو ڕاهێنانێن 31 و 32 ، ڕووبەرێ وێ دەڤەرا سنووردایی ب چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)$ و تەوەرێ x و هەردوو ڕاستەهێلان $x=a$ و $x=b$ بهەژمێرە.

31 $f(x)=3x^2+1 \quad a=0 \quad b=2$

32 $f(x)=1+\sqrt[3]{x} \quad a=0 \quad b=8$

دەربارەی چەمکان

33 وێنەیێ بەرامبەر بکاربینە.

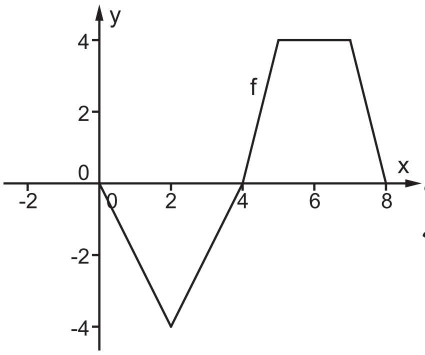


أ $\int_1^7 f(x)dx$ هەژماربکە.

ب بەهایێ ناڤەند بۆ نەخشەیا f دماوەیێ $[1,7]$ دا هەژماربکە.

ج هەردوو پرسیارێن لقی (أ) و (ب) جارەکا دی شیکاربکە، پشتی راکێشانا چەماوەیێ نەخشەیێ ب 2 یەکەیان بەرەڤ سەری.

34 g نەخشەیەکا پێناسەکرییە وەک: $g(x)=\int_0^x f(t)dt$.
f نەخشەیا چەماوەیێ وێ ل وێنەیێ بەرامبەر دیاربوویی.



أ بەهایەکی نێزیککری دیاربکە بۆ $g(0)$ $g(2)$، $g(4)$، $g(6)$، $g(8)$.

ب فرەهترین ماوەیی دیاربکە کو نەخشە تێدا بەرەڤ زێدەبوون بیت، و فرەهترین ماوەیی دیاربکە کو نەخشە تێدا بەرەڤ کێم بوون بیت.

ج بلندترین بها و نزمترین بها بۆ g دیاربکە.

د وێنەیێ رۆنکرنێ یێ نێزیککری بۆ چەماوەیێ g بکێشە.

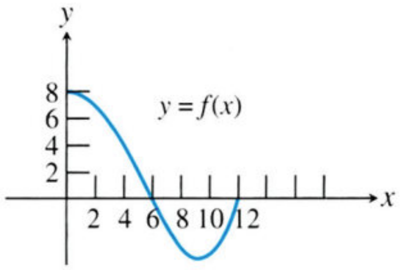
ل هەردوو راهێنانێن 35 و 36، $F'(x)$ هەژماربکە:

35 $F(x)=\int_8^x \sqrt[3]{t}\,dt$

36 $F(x)=\int_0^x t(t^2+1)dt$

37 **کا شاشیی؟** شاشیێ دیاربکە ل نڤیسینا: $\int_{-1}^{1} x^{-2}dx=\left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1}=(-1)-1=-2$.

38 $H(x)=\int_0^x f(t)dt$ دەمێ f نەخشەیەکا بەردەوام بیت و بوارێ وێ ماوەیێ $[0,12]$ لێ بیت و چەماوەیێ وێ وێنەیێ بەرامبەر بیت.



أ $H(0)$ هەژماربکە.

ب د چ ماوەیی دا نەخشەیا H بەرەڤ زێدەبوونە؟ بەرسڤا خۆ رۆنبکە.

ج د چ ماوەیی دا وێنەیێ رۆنکرنا نەخشەیا H یێ کومدە؟ ئەڤێ رۆنبکە.

ء $H(12)$ یێ مووجەبە یان یێ سالبە؟ ئەڤێ رۆنبکە.

هـ ل کێدەر نەخشەیا H بەهایێ خوجهی هەیە؟ رۆنبکە.

و جۆرێ ڤی پەرە بەهایی دیاربکە. بەرسڤا خۆ رۆنبکە.

بـەشێ
5

ئەزموونا نیڤا بەشی

1–5 تەمامکاریا بێسنوور

1 هەر تەمامکارییەکا بێسنوور هەژماربکە:

أ $\int\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^2}\right)dx$ ب $\int\frac{1+2\cos x}{3}dx$ ج $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}dx$

2–5 تەمامکاریا سنووردار

2 هەر تەمامکارییەکا سنووردار هەژماربکە:

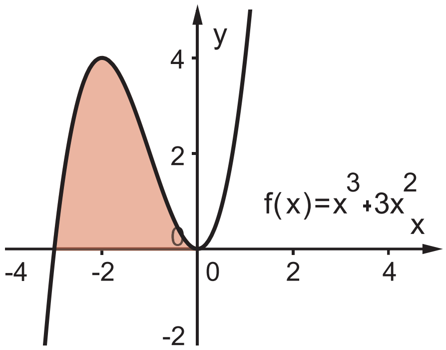
أ $\int_{-1}^{0}(2x-1)(x+1)dx$ ب $\int_{0}^{\frac{3\pi}{4}}(1-|\cos x|)dx$

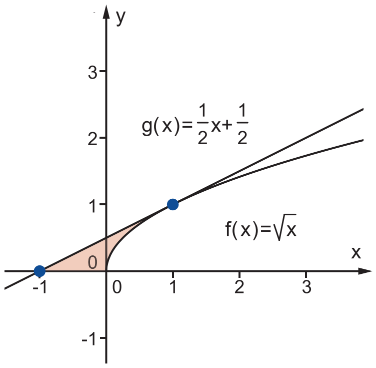
3 هەکە $\int_{-1}^{2}f(x)dx=3$ و $\int_{-1}^{4}f(x)dx=2$ ، هەر بەهایەکی ل خوارێ هەژماربکە:

أ $\int_{-1}^{2}(x-2f(x))dx$ ب $\int_{2}^{4}f(x)dx$

2–5 هەژمارکرنا ڕووبەران:

4 ڕووبەرێ هەر دەڤەرەکا سیبەرکری هەژماربکە:

أ


ب


2–5 لەزا

5 لەزا ترومبێلەکێ 30m/s بوو دەمێ شوفیرێ پێ خودانایە سەر برێکی، و ئەو ترومبێلە پشتی دوو جرکەیان ڕاوەستا. هەکە وەسا هاتە دانان کو تاودانا ترومبێلێ یا نەگۆڕ بیت ل دەمێ برێك گرتنێدا. ئەوێ تاودانێ و دووریيا برێ ژ دەمێ برێك گرتێ هەتا ترومبێل ڕاوەستای بهەژمێرە.

3-5 هەژمارکرنا تەمامکاریێ
Integration Methods

هەژمارکرنا تەمامکارییا سنووردار یان یا بێسنوور، کارەکێ گرانە ب بەراوردکرنا وێ دگەل هەژمارکرنا داتاشراویێ. دیارکرنا نەخشەیا بنەرەت بۆ نەخشەیەکا دیارکری هەموو دەمان نە کارەکێ سانا هییە. لێ ئەوێن دبوارێ بیرکاریێ دا کاردکەن، هندەك رێکێن جودا دیتن بۆ چارەسەریا ڤان ئاستنەگان. زێدەباری بکارئینانا رێسایێن بنەرەت بۆ هەژمارکرنا تەمامکاریێ، ئەوێن پێشتر هاتینە خواندن، دوو رێکێن دی هەنە، دشێن وان زۆربەی جاران بکاربینن: رێیا تەمامکاری ب پشك پشککرنێ، و رییا تەمامکاری ب لجهدانانێ.

ئارمانج

- هەژمارکرنا تەمامکارییا سنووردار ب رییا (پشك پشککرنێ).
- هەژمارکرنا تەمامکارییا سنووردار ب رییا ب لجهدانانێ.

زاراڤ
Vocabulary

تەواوکاری ب بەشبەشکرنێ
Integration by parts
تەواوکاری ب لجهدانانێ
Integration by Substitution

تەمامکاری ب رێیا پشك پشککرنێ

زانایێ بیرکاریێ لاینز Leibniz ئەڤ نڤیسینە بکارئینە: هەکە $u(x)$ نەخشەیەك بیت پێ x، دێ $du = u'(x)dx$، و گۆتە du و جوداکارییا نەخشەیا $u(x)$ و گۆتە dx جوداکارییا x. ئەم دێ ڤێ نڤیسینێ بکارئینین، چونکی ئەو تێگەهشتنا هەردوو بابەتێن ڤ وانێ دێ سانا هی کەت.

رێیا تەمامکاری ب پشك پشککرنێ ژ رێسایا داتاشراویێ ئەنجامێ لێکدانا دوو نەخشەیان دەردکەڤیت. تو دزانی $(uv)' = uv' + vu'$.

ژ ڤێ دیاردبیت کو:

$$d(uv) = (uv)'dx = (uv' + vu')dx = uv'dx + vu'dx = udv + vdu$$

پاشی:

$$u(x)v(x) = \int [u(x)v(x)]' dx = \int (u(x)v'(x) + v(x)u'(x))dx$$

$$= \int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx$$

ئەڤا بۆری ل سەر ڤێ شێوەی دێتە نڤیسین:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

یان $$\int udv = uv - \int vdu$$

سەرکەفتنا بکارئینانا ڤێ رێکێ دکەڤیتە سەر باش دیارکرنا u، dv ب ئاوایەکێ دروست، بەردەوام هەولبدە u وەسا هەلبژێرە کو داتاشراویێ وێ ژ وێ ساناهیتر بیت.

نموونـــــه 1 تەمامکاری ب پشك پشککرنێ

$\int xe^x dx$ هەژماربکە.

شیکار:

یە دیارە کو داتاشراویێ نەخشەیا $f(x) = x$ ساناهیترە ژ وێ نەخشێ، ڤێجا هەلبژێرە $u = x$، و $dv = e^x dx$، پاشی du و v بینەدەر $u'(x) = 1$، $du = u'(x)dx = dx$

$$v(x) = \int v'(x)dx = \int e^x dx = e^x$$

نۆکە رێسایا تەمامکاری ب پشك پشککرنێ بکاربینە:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int (1)e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

خالا چاڤدێریێ

1. $\int x^2 \ln x dx$ بهەژمێرە.

نموونـــه 2 تەمامکارییا نەخشەیەکا ئێك رادەی

$\int_1^e \ln x dx$ بهەژمێرە.

شیکار

ل دەستپێکێ تەمامکارییا بێسنوور $\int \ln x dx$ بهەژمێرە. ئەم دزانین داتاشراویێ نەخشەیا $f(x)=\ln x$ دبیتە $u=\ln x$ ، و ئەو ساناهیترە ژ وێ نەخشەێ.

ڤێجا هەلبژێرە: $v=\int dx = x$ و $dv=dx$

پاشی du و v هەژماربکە: $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int \left(\frac{1}{x}\right)(x)dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

نۆکە رێسایا تەمامکاری ب پشك پشککرنێ بکاربینە:

$$\int_1^e \ln x dx = \left[x(\ln x - 1)\right]_1^e = (e)(\ln(e)-1)-(1)(\ln(1)-1) = e(1-1)-(0-1)=1$$

خالا چاڤدێریێ

2. $\int_1^3 \ln 3x dx$ بهەژمێرە.

تەمامکاری ب لجهدانانێ

چەمکێ تەمامکاری ب لجهدانانێ یێ بەندە ل سەر رێسایا داتاشراویێ نەخشەیا ئاوێتە و ل سەر بکارئینانا نڤیسینا لایبنیز Leibniz : هەکە $u=g(x)$ ، دێ $du=g'(x)dx$. و دێ ب ڤی شێوەیی بیت $\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+C = F\left(g(x)\right)+C$.

نموونـــه 3 تەمامکاری ب لجهدانانێ

$\int 2x(x^2+1)^2 dx$ هەژماربکە.

شیکار

دانە $u=x^2+1$ ، ئەڤە دێ دەرکەڤت $du=2xdx$ ، پاشی دێ:

$$\int 2x(x^2+1)^2 dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}(u)^3 + C = \frac{1}{3}(x^2+1)^3 + C$$

خالا چاڤدێریێ

3. $\int 2x\sqrt{x^2-1}dx$ هەژماربکە.

نموونـــه 4 هەژمارکرنا تەمامکارییا سنووردار ب لجهدانانێ

$\int_0^1 x(x^2+1)^3 dx$ بهەژمێرە.

شیکار

ل دەستپێکێ تەمامکارییا بێسنوور $\int x(x^2+1)^3 dx$ بهەژمێرە. دانە $u=x^2+1$ ڤێجا $du=2xdx$ و دێ دەرکەڤیت $xdx=\frac{1}{2}du$.

$$\int x(x^2+1)^3 dx = \int \frac{1}{2}u^3 du = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]$$

پاشی تەمامکارییا سنووردار بهەژمێرە.

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}$$

خالا چاڤدێریێ

4. $\int_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx$ بهەژمێرە.

3-5 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا 1 هەتا 4 ، هەر نەخشەیەکێ دگەل تەمامکارییا بێسنوور یا گونجای ل خوارێ گرێدە.

أ $\int \ln x dx$ ب $\int x\sin x dx$ ج $\int x^2e^x dx$ د $\int x^2\cos x dx$

1 $f(x)=\sin x+x\cos x+c$

2 $f(x)=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c$

3 $f(x)=x^2e^x-2xe^x-2e^x+c$

4 $f(x)=-x+x\ln x+c$

ژ ڕاهێنانا 5 هەتا 8، u و dv دەستنیشانبکە بۆ دەستپێکرنا ئەنجامدانا تەمامکاری ب پشک پشککرنێ [تەمامکاری نەیا داخوازکرییە].

5 $\int xe^{2x}dx$ **6** $\int(\ln x)^2dx$ **7** $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$ **8** $\int x^2\cos x dx$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 9 هەتا 10، $g(x)$ د $\int f(g(x))g'(x)dx$ دا دیاربکە.

9 $\int 10x(5x^2+1)^2dx$ **10** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

ژ ڕاهێنانا 11 هەتا 13، تەمامکارییا بێسنوور ب ڕێیەکا گونجای هەژماربکە:

11 $\int(x^2-1)e^x dx$ **12** $\int x\sqrt{x-1}dx$ **13** $\int x\cos x dx$ **14** $\int x^3\sin x dx$

ژ ڕاهێنانا 14 هەتا 16 ، نەخشەیا بنەرەت بۆ f کو دخالا دیارکری را دبۆریت هەژماربکە:

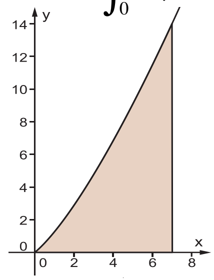
15 $f(x)=x\cos\frac{x}{2}$ ، $(0,3)$ **16** $f(x)=2x(4x^2-10)^2$ ، $(2,10)$ **17** $f(x)=-2x\sqrt{8-x^2}$ ، $(2,7)$

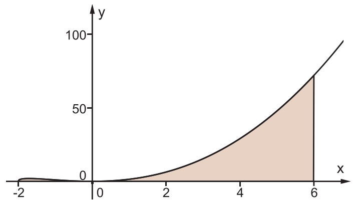
تەمامکارییا ب سنووردار بهەژمێرە:

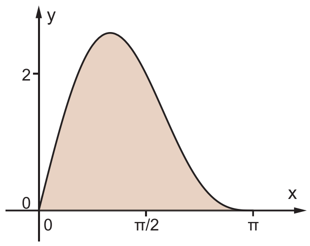
18 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ **19** $\int_0^1 x^2e^x dx$ **20** $\int_0^{\pi} x\sin 2x dx$

ژ ڕاهێنانا 21 هەتا 23، ڕووبەرێ دەڤەرا سیبەرکری هەژماربکە:

21 $\int_0^7 x\sqrt[3]{x+1}dx$ **22** $\int_{-2}^6 x^2\sqrt[3]{x+2}dx$ **23** $\int_0^{\pi}(2\sin x+\sin 2x)dx$







24 $\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}$ بکاربینە بۆ دەستکەفتنا بهایێ تەمامکاریێ بێی ئەنجامدانا تەمامکاریێ.

أ $\int_{-2}^0 x^2dx$ ب $\int_{-2}^2 x^2dx$ ج $\int_0^2 -x^2dx$ د $\int_{-2}^0 3x^2dx$

دەربارەی چەمکان

25 هەکە $\int x(5-x^2)dx=\int u^3du$ ^{3} ، ڕۆنبکە بۆچی نڤیسینا $u=5-x^2$ نەیا دروستە

26 ڕوونبکە بۆچی $\int_{-2}^{2}x(x^2+1)^2dx=0$ بێی ئەنجامدانا تەمامکاریێ

27 $\int\frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}dx$ بهەژمێرە بکارئینانا.

أ تەمامکاری ب پشک پشکرنێ دەمێ $dv=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx$.

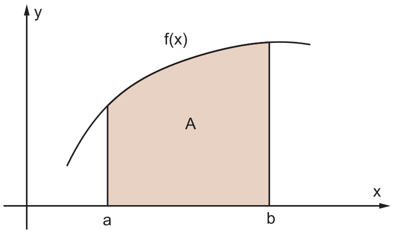
ب تەمامکاری ب لجهدانانێ دەمێ $u=4+x^2$.

4–5 بجهئینانێن تەمامکاریێ
Applications of Integral

ئارمانج

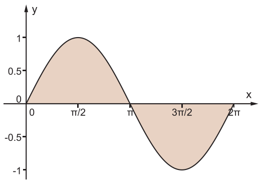
- بکارئینانا تەمامکاریا سنووردار بۆ هەژمارکرنا ڕووبەری.
- بکارئینانا تەمامکاریا سنووردار بۆ هەژمارکرنا قەبارەی.

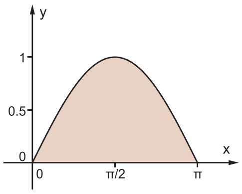
هەژمارکرنا ڕووبەری



$x = b \quad x = a$

تو ل وانەیێن پێشتر فێربوویی کو تەمامکاریا سنووردار هاریکاریا تە دکەت بۆ هەژمارتنا ڕووبەرێ سنووردار ب وێنەیێ ڕۆنکرنا نەخشێ و تەوەرێ x و هەردوو ڕاستەهێلان $x = a$ و $x = b$، دەمێ $a < b$. و نەخشەیا مووجەبە ل ماوەیێ $[a,b]$ ، ئانکو $f(x) > 0$ بۆ هەر بەهایەکی x دڤی ماوەیدا. دا تو گرنگیا ڤێ فێربی، ئەڤان هەژمار بکە، $\int_0^{\pi} \sin x dx$ و $\int_0^{2\pi} \sin x dx$





$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -[\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = [\cos x]_0^{2\pi} = \cos 2\pi - (-\cos 0) = 0$$

ئەنجامێن پێشتر بۆ تە دیاردکەن کو $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$ ، ئانکو بەهایێ تەمامکاریا $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$ ژمارەیەکە مووجەبە و بەهایێ تەمامکاریا $\int_0^{2\pi} \sin x dx$ ژمارەیەکە سالبە، ئەڤە وەسا لێدکەت کو ئەم جوداهیێ بکەین ل ناڤبەرا ئەوی بارەیێ نەخشە تێدا نەیا سالب بیت ل ماوەیێ $[a,b]$ ، دەمێ $a < b$ و بارەیێ نەخشە تێدا نەیا مووجەب بیت دڤی ماوەیدا.

هەژمارتنا ڕووبەری

> هەکە b, a دوو ژمارەیێن ڕاستی بن و $a < b$ ، ڕووبەرێ وێ دەڤەرا سنووردار ب وێنەیێ ڕۆنکرنا نەخشەیا $f(x)$ و تەوەرێ x و هەردوو ڕاستەهێلان $x = a$ و $x = b$ یەکسانە $\int_a^b f(x)dx$.

بۆ هەژمارکرنا ڕووبەرێ دەڤەرا سنووردار ب وێنەیێ ڕۆنکرنا نەخشەیا f و تەوەرێ x و هەردوو ڕاستەهێلان $x = a$ و $x = b$ دڤێت ل دەستپێکێ تو ماوەیێ $[a,b]$ دابەشبکەی ب شێوەیەکی ئەو نەخشە هێمایێ خو دهەر بەشەکی دا بپاریزت. پاشی ڕووبەرێ هەر بەشەکی بهەژمێرە ب بەرچاڤ وەرگرتنا ئەوا بوری، و ڤان ڕووبەران کۆمبکە. هەکە ئەم ڤەگەڕینە هەژمارتنا ڕووبەرێ دەڤەرا سنووردار ب وێنەیێ ڕۆنکرنا نەخشەیا $f(x) = \sin x$ و تەوەرێ x و هەردوو تەوەران $x = 0$ و $x = 2\pi$ دێ ئەڤ ڕووبەرە بیتە: $\int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = 2 - (-2) = 4$

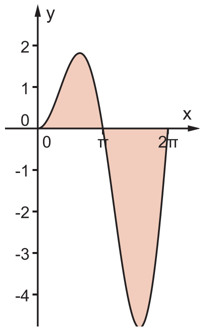
نموونە 1

هەژمارتنا ڕووبەری

ڕووبەرێ دەڤەرا سنووردار ب وێنەیێ ڕۆنکە نەخشەیا $f(x) = x\sin x$ و تەوەرێ x و هەردوو ڕاستەهێلان $x = 0$ و $x = 2\pi$.

شیکار:

ل دەستپێکێ نەخشەیا بنەرەت بۆ نەخشەیا f هەژماربکە، تە پێشتر زانی بوو کو نەخشەیا $F(x) = \sin x - x\cos x$ نەخشەیا بنەرەتە بۆ نەخشەیا $f(x) = x\sin x$ پاشی وێنەیێ ڕۆنکرنێ بۆ نەخشەیا f وێنەبکە بۆ دیارکرنا چاوانیا دابەشکرنا ماوەیێ $[0,2\pi]$.

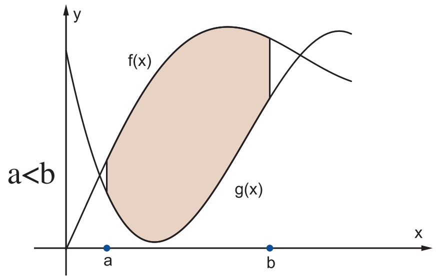


نەخشەیا f نەیا سالبە ل ماوەیێ $[0,\pi]$ و نەیا مووجەبە ل ماوەیێ $[\pi, 2\pi]$.
و ژ ئەڤێ دەرئەنجام دکەین کو رووبەرێ دەڤەرا سیبەرکری A دبیتە:

$$A=\int_0^{\pi} x\sin x dx-\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x dx=\left[\sin x-x\cos x\right]_0^{\pi}-\left[\sin x-x\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}$$
$$=\left[\sin(\pi)-(\pi)\cos(\pi)\right]-\left[\sin(0)-(0)\cos(0)\right]$$
$$-\left[\left[\sin(2\pi)-(2\pi)\cos(2\pi)\right]-\left[\sin(\pi)-(\pi)\cos(\pi)\right]\right]$$
$$=\left[\pi-0\right]-\left[-2\pi+(-\pi)\right]=4\ \pi$$

خالا چاڤدێریێ

1. رووبەرێ دەڤەرا سنووردار ب وێنەیێ رۆونکرنا نەخشەیا $f(x)=\cos x$ و تەوەرێ x و هەدوو راستەهێلان $x=-\pi$ و $x=\pi$.



رووبەرێ دناڤبەرا چەماوەیێن دوو نەخشاندا

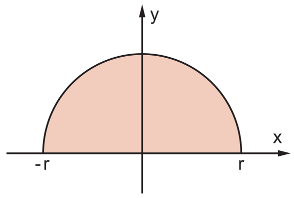
بۆ هەژمارتنا رووبەرێ سنووردار ب چەماوەیێن هەردوو نەخشەیان $f(x)$ و $g(x)$ و دوو راستەهێلان $x=a$ و $x=b$ دەمێ $a<b$ ئەڤێ ل خوارێ بکاربینە:

هەژمارتنا رووبەرێ دناڤبەرا چەماوەیێن دوو نەخشان دا

هەکە f ، g دوو نەخشەیێن بەردەوام بن، و $f(x)\geq g(x)$ ساخبکەت ل ماوەیێ $[a,b]$، رووبەرێ وێ دەڤەرا سنووردار ب وێنەیێن رۆنکرنێن هەردوو نەخشەیان $f(x)$ و $g(x)$ و هەردوو راستەهێلان $x=a$ و $x=b$ یەکسانە $A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$.

نموونـــــە 2

رووبەرێ بازنێ



تەمامکاریێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا رووبەرێ بازنەکێ نیڤتیرەیێ وێ r بیت.

شیکار:

ئەنجام نائێتە گۆهۆرین هەکە تو چەقێ بازنێ دانێیە دخالا بنەرەت دا، هاوکێشا بازنێ دبیتە $x^2+y^2=r^2$. بەسە تو رووبەرێ نیڤا بازنێ ئەوا دکەڤیتە ژۆریا تەوەرێ x. هەژمارێکەی، ئەڤ رووبەرە A دبیتە رووبەرێ دەڤەرا سنووردار ب $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ و $g(x)=0$ و هەردوو راستەهێلان $x=-r$ و $x=r$.

$$A=\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

بۆ هەژمارکرنا ڤێ تەمامکاریێ، گۆڕاوێ x بگۆهۆرە و دانە $x=r\cos t$ ڤێجا $dx=-r\sin t dt$
پاشی دێ:

$$A=\int_{\pi}^{0}\sqrt{r^2-r^2\cos^2 t}\,(-r\sin t)dt=\int_{\pi}^{0}-r^2\sqrt{1-\cos^2 t}\,\sin t dt=r^2\int_0^{\pi}\sin^2 t dt$$
$$=r^2\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt=\frac{r^2}{2}\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{r^2}{2}\left[\pi-0\right]=\frac{\pi r^2}{2}$$

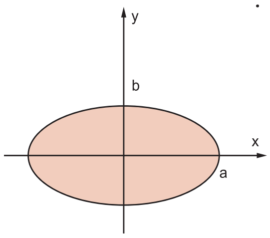
رووبەرێ بازنێ دبیتە πr^2 .

ل بیرا تە بیت

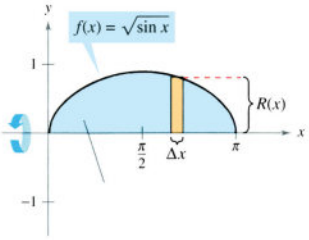
دا x هەموو بەهایێن ماوەیێ $[-r, r]$ وەربگرت، دڤێت t هەموو بەهایێن ماوەیێ $[\pi, 2\pi]$ وەربگرت، لەوا نزمترین رادەیێ تەمامکاریێ دبیتە π و بلندترین رادەیێ تەمامکاریێ دبیتە 2π .

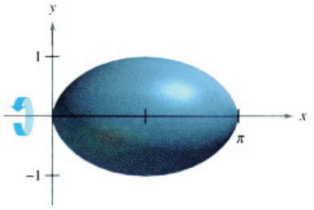
خالێ چاودێری

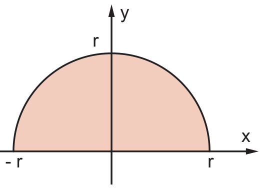
2. ئەڤ بڕگەیێ نە تەمامێ بەرامبەر چەماوەیەكی گرتییە و هاوكێشا وی دبیتە $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ، دێ فێری ئەڤی جۆرێ چەماوەیان بی د بەش بێت دا. بسەلمینە ڕووبەرێ ئەوێ بڕگەیێ نە تەمام دبیتە πab .



هەژماركرنا قەبارەیان







تەمامكارییا سنووردار بكاردئینن بۆ هەژمارتنا قەبارەیان. دێ فێری بارەكی ژ بارەیێن هەژمارتنا قەبارەیان بی. ئەو بارە دبیتە قەبارێ تەنەكی بدەست تە دكەڤت ژ ئەنجامێ زڤڕاندنا بەشەكی چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)$، خولەكا تەمام ل دۆر تەوەرێ x د بۆشاییێ دا ل ماوەیێ $[a, b]$. بۆ نموونە: گۆیەكا نیڤتیرەیێ وێ r و چەقێ وێ خالا بنەڕەت بیت بدەست تە دكەڤت ب ڕێیا زڤڕاندنا نیڤا ژۆری یا بازنا $x^2+y^2=r^2$ ل دۆر تەوەرێ x خولەكا تەمام.

قەبارەیێ تەنەكی وەك ڤی دئێتە هەژمارتن بكارئینانا ڕێسایا ل خوارێ:

هەژمارتنا قەبارەیێ تەنەكی زڤڕاندی

هەكەر f نەخشەیەكا بەردەوام بیت، قەبارەیێ وی تەنێ پەیدادبیت ژ ئەنجامێ زڤڕاندنا بەشەكی چەماوەیێ f خولەكا تەمام د بۆشاییێ دا ل دۆر تەوەرێ x ل ماوەیێ $[a,b]$ ، پێ ڤێ ڕێسایێ دهێتە هەژمارتن $V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$.

نموونـــــە 3 قەبارەیێ گۆیێ

قەبارەیێ گۆیەكێ بهەژمێرە، هەكە نیڤتیرەیێ وێ r بیت.

شیكار

ئەنجام ناهێتە گۆهۆڕین هەكە چەقێ گۆیێ دانیە د خالا بنەڕەتدا. چونكی گۆیا نیڤتیرەیێ وێ r و چەقێ وێ خالا بنەڕەت بیت، پەیدا دبیت ژ ئەنجامێ زڤڕاندنا نیڤا ژۆریا بازنا $x^2+y^2=r^2$ ل دۆر تەوەرێ x خولەكا تەمام، لەورا قەبارەیێ وێ دبیتە بەهایێ تەمامكارییێ:

$$V=\pi\int_{-r}^{r}(f(x))^2\,dx=\pi\int_{-r}^{r}y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx=\pi\int_{-r}^{r}r^2dx-\pi\int_{-r}^{r}x^2dx$$

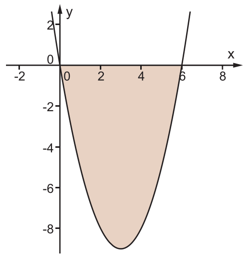
$$=\pi\left[r^2x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}=\left[\pi r^3-(-r^3)-\tfrac{1}{3}\left(r^3-(-r)^3\right)\right]=\pi\left[2r^3-\tfrac{2}{3}r^3\right]=\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

ڤێجا قەبارەیێ گۆیا نیڤتیرەیێ وێ r دبیتە $v=\frac{4}{3}\pi r^3$.

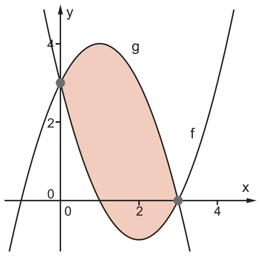
4-5 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا 1 هەتا 3 ، تەمامکارییا سنووردار بۆ رووبەریٚ دەڤەرا سیبەرکری بنڤیسە:

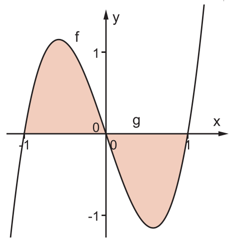
1 $f(x)=x^2-6x$
$g(x)=0$



2 $f(x)=x^2-4x+3$
$g(x)=-x^2+2x+3$



3 $f(x)=3\left(x^3-x\right)$
$g(x)=0$



ژ ڕاهێنانا 4 هەتا 6، نەخشە بابەتیٚ تەمامکارییٚ ل سەر شێوەییٚ جوداهیا دوو نەخشەیان دیاردکەت، وێنەییٚ رونکرنیٚ بۆ هەر نەخشەیەکیٚ بکێشە و ئەو دەڤەرا تەمامکاری رووبەریٚ وێ دنوێنت سیبەربکە.

4 $\int_0^4\left[(x+1)-\frac{x}{2}\right]dx$ **5** $\int_2^3\left[4\left(\frac{x^3}{3}-x\right)-\frac{x}{3}\right]dx$ **6** $\int_0^1\left[e^x(-x+1)\right]dx$

ل هەردوو ڕاهێنانان 7 و 8 ، ئەوی بەهاییٚ باشترین خەملاندن دنوێنت بۆ رووبەریٚ سنووردار ب چەماوەیێن هەردوو نەخشەیان هەلبژێرە:

7 $f(x)=x+1$ ؛ $g(x)=(x-1)^2$ ؛ أ -2 ب 2 ج 10 د 4 ه 8

8 $f(x)=2-\frac{1}{2}x$ ؛ $g(x)=2-\sqrt{x}$ ؛ أ 1 ب 6 ج -3 د 3 ه 4

ژ ڕاهێنانا 9 هەتا 12، ڕووبەریٚ دەڤەرا سنووردار ب تەوەریٚ x و چەماوەیی خشتەییٚ و هەردوو راستەهێلان $x=a$ و $x=b$ هەژماربکە.

9 $f(x)=\sin x$ ؛ $a=0$ ؛ $b=\pi$

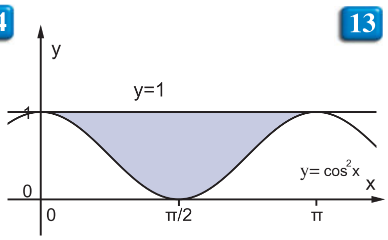
10 $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ؛ $a=-\frac{\pi}{4}$ ؛ $b=\frac{\pi}{4}$

11 $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ؛ $a=-3$ ؛ $b=3$

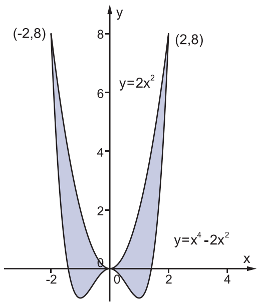
12 $f(x)=e^{2x}$ ؛ $a=0$ ؛ $b=1$

ژ ڕاهێنانا 13 هەتا 15، رووبەریٚ دەڤەرا سیبەرکری بهەژمێرە.

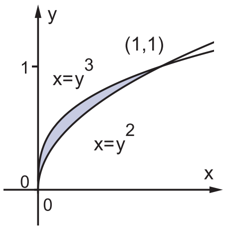
13



14



15



ژ ڕاهێنانا 16 i هەتا 21، خالێن ئێکودوبڕینا چەماوەیێن هەردوو نەخشان بینەدەر، پاشی ڕووبەریٚ دەڤەرا سنووردار ب هەر دوو چەماوەیان بهەژمێرە:-

16 $f(x)=x^2-2$ ؛ $g(x)=2$

17 $f(x)=7-2x^2$ ؛ $g(x)=x^2-4$

18 $x+y^2=0$ ؛ $x+3y^2=2$

19 $x+y^2=3$ ؛ $4x+y^2=0$

20 $f(x)=8\cos x$ ؛ $g(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ؛ $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{3}$

21 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ ؛ $g(x)=x$

ل هەردوو ڕاهێنانان 22 و 23، بەهایێ b بهەژمێرە، دەمێ ڕاستەهێلێ $y=b$ ئەوێ دەڤەرا سنووردار ب چەماوەیێن هەردوو نەخشەیان دابەش دکەت بۆ دوو بەشێن ڕووبەر یەکسان.

22 $g(x)=0$ ؛ $f(x)=9-x^2$

23 $g(x)=0$ ؛ $f(x)=9-|x|$

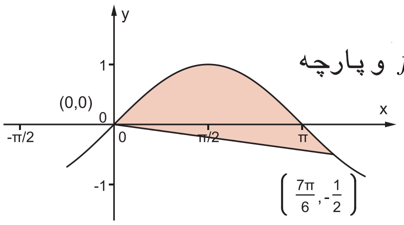
دروستە یان نەیان دروستە؟ ژ ڕاهێنانا 24 هەتا 26، دیاربکە هەکە ڕستەیا دروست بیت. هۆیێ وێ ڕوونبکە، و هەکە نەیا دروست بیت ب دژە نموونەیەکێ بسەلمینە.

24 هەکە ڕووبەرێ دەڤەرا سنووردار ب چەماوەیێن هەردوو نەخشەیان f و g یەکسان بیت 1، ڕووبەرێ دەڤەرا سنووردار ب چەماوەیێن هەردوو نەخشان $h(x)=f(x)+c$ و $k(x)=g(x)+c$ دێ هەر وەسا یەکسان بیت 1.

25 هەکە $\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=A$ دێ $\int_a^b[g(x)-f(x)]dx=-A$.

26 هەکە چەماوەیێن هەردوو نەخشەیان f و g ئێکودو ل خالەکێ ببڕن کو پۆیێ وێ خالێ x بکەڤیتە ناڤەراستا a و b، دێ $\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=0$.

27 **ڕووبەر:** ڕووبەرێ دەڤەرا سنووردار ب نەخشەیا $f(x)=\sin x$ و پارچە ڕاستەهێلێ ناڤبەرا خالا بنەڕەت و خالا $\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$ دگەهینت، هەر وەك دیار ل وێنەیێ بەرامبەر هەژماربکە.



دەربارەی تێگەهان (چەمکان)

28 وێنەیێن ڕونکرنێن هەردوو نەخشەیان $f(x)=x^4-2x^2+1$ و $g(x)=1-x^2$ ل (3) خالان ئێکودوو دبڕن. و دگەل ڤێ چەندێ ئەم دشێین ڕووبەرێ لناڤبەرا وان هەژماربکەین بکارئینانا ئێك تەمامکارییا سنووردار، هۆیێن ڤی کارێ ڕۆنبکە و تەمامکارییا وان بنڤیسە.

ژ ڕاهێنانا 29 هەتا 32، قەبارێ ئەوی تەنێ پەیدابوویی ژ ئەنجامێ زڤڕاندنا دەڤەرا سنووردار ب چەماوایێن هاوکێشەیان ل دۆر تەوەرێ x بهەژمێرە:

29 $y=x^2$ ، $y=0$ ، $x=2$

30 $y=\sqrt{9-x^2}$ ، $y=0$

31 $y=x$ ، $y=1$ ، $x=0$

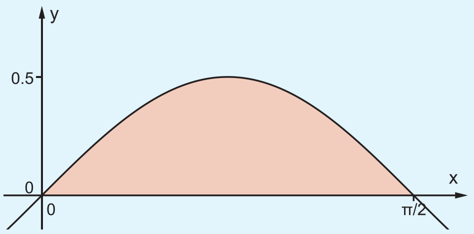
32 $y=x^2+1$ ، $y=x+3$

33 تەمامکاریێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا قەبارێ ئەوی تەنێ پەیدا دبیت ژ ئەنجامێ زڤڕاندنا سێگۆشەیا سەرێن وێ: $(0, 0)$ ، $(b, 0)$ ، $(0, h)$ ل دۆر تەوەرێ x.

34 تەمامکاریێ بکاربینە بۆ نڤیسینا ڕێسایا هەژمارکرنا قەبارەیێ قووچەکەکێ نیڤتیرەیێ بنکەیێ وێ r و بلنداهیا وێ h بیت.

بەرهنگاری

35 قەبارێ وی تەنێ پەیدادبیت ژ ئەنجامێ زڤڕاندنا دەڤەرا سنووردار ب چەماوەێ نەخشەیا $f(x)=\cos x \sin x$ و تەوەرێ x ل دۆر تەوەرێ x بهەژمێرە.



بەشێ 5

پێداچوونا بەشی

ژ ڕاهێنانا **1** هەتا **4** ، **تەمامکارییا بێسنور بهەژمێرە:**

1 $\int \left(2x^2+x-1\right)dx$

2 $\int \frac{2}{\sqrt[3]{3x}}dx$

3 $\int \frac{x^3+1}{x^2}dx$

4 $\int \left(5\cos x-\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$

5 **لەز و تاودان:** فرۆکەیەك فرێ پشتی بڕینا دووراتیا $1\,350\,\text{m}$ ل سەر ڕێرەوی: ئەوێ فرۆکێ ژ خالا ڕاوەستاندنێ ب تاودانەکا نەگۆڕ بڕێڤەچۆ بۆ دەمێ 30 چرکەیان بەری بفڕت. لەزا وێ چەند بوو ل دەمێ فڕی؟

6 **لەز و تاودان** تەپەیەك بەرەڤ ئەڤراز هەلدا ژ سەر ڕووێ ئەردی ب لەزەکا بنەرەت بڕێ وێ $30\,\text{m/s}$ بوو.

أ چەند دەم بۆ تەپێ دڤێت هەتا بگەهتە بلندترین خالا دشیاندا؟

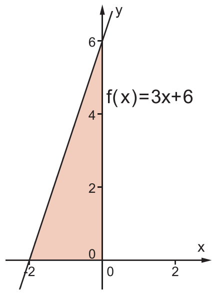
ب ئەڤ بلنداهیا چەندە؟

ج کەنگی لەزا تەپێ دبیتە نیڤا لەزا وێ یا بنەرەت؟

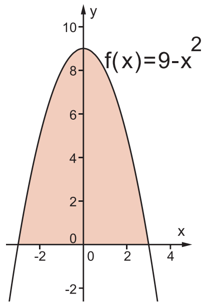
د بلنداهیا تەپێ دبیتە چەند دەمێ لەزا وێ دبیتە نیڤا لەزا بنەڕەت؟

ل هەردوو ڕاهێنانێن 7 و 8، تەمامکارییا سنووردار بۆ هەژمارتنا ڕووبەرێ سیبەرکری بنڤیسە:

7



8



ل هەردوو ڕاهێنانێن 9 و 10 ، ئەوێ دەڤەرا تەمامکارییا سنووردار ڕووبەرێ وێ دنوێنت بکێشە:

9 $\int_0^5 \left(5-|x-5|\right)dx$

10 $\int_{-4}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx$

11 ئەڤێن ل خوارێ هەژماربکە، بۆ زانین $\int_2^6 f(x)dx=10$ و $\int_2^6 g(x)dx=3$.

أ $\int_2^6 [f(x)+g(x)]dx$

ب $\int_2^6 [f(x)-g(x)]dx$

ج $\int_2^6 [2f(x)-3g(x)]dx$

د $\int_2^6 5f(x)dx$

12 ئەڤێن ل خوارێ هەژماربکە، بۆ زانین $\int_0^3 f(x)dx=4$ و $\int_3^6 f(x)dx=-1$.

أ $\int_0^6 f(x)dx$

ب $\int_6^3 f(x)dx$

ج $\int_4^4 f(x)dx$

د $\int_3^6 -10f(x)dx$

ژ راهێنانا 13 هەتا 16، دەڤەرا ئەڤ تەمامکارییە رووبەرێ وێ دنوێنت بکێشە، و ئەڤێ رووبەری بهەژمێرە.

13 $\int_0^3 (2x+1)dx$

14 $\int_0^1 (x-x^3)dx$

15 $\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)dx$

16 $\int_3^4 (x^2-9)dx$

ژ راهێنانا 17 هەتا 20، تەمامکارییا بێسنوور بهەژمێرە:

17 $\int (x^2+1)^3 dx$

18 $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+3}} dx$

19 $\int \sin^3 x \cos x dx$

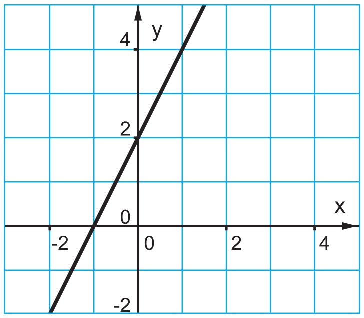
20 $\int \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}} d\theta$

21 بەهایێ ناڤەند بۆ نەخشەیا $f(x)$ ل ماوەیێ I بهەژمێرە:

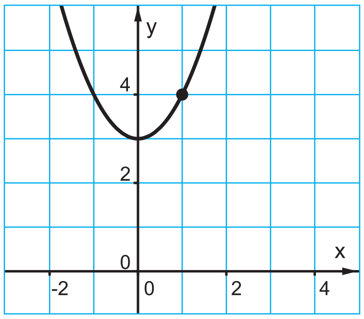
أ $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ $I=[0,4]$

ب $f(x)=a\sqrt{x}$ ؛ $I=[0,a]$

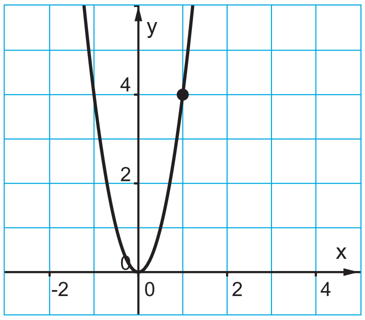
22 **بنڤیسە**: کیژ ئەڤانێن ل خوارێ دبیتە روونکرنا نەخشەیا، کو $f'(x)=2x$ و $f(1)=4$ ساخدکەت.



(ج)



(ب)



(أ)

بەشێ 5

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

1 هەکە $\int_a^b f(x)dx = a+2b$، دێ بەهایێ تەماکارییێ $\int_a^b [f(x)+3]dx$ بیتە:

أ $a+2b+3$ ب $3b-3a$ ج $4a-b$

د $5b-2a$ هـ $5b-3a$

2 بەهایێ k چەندە کو $\int_2^k x^2dx=0$.

أ -2 ب 0 ج 2

د -2 هـ -2

3 کێژ ڤانێن ل خوارێ یەکسانە $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$ ؟

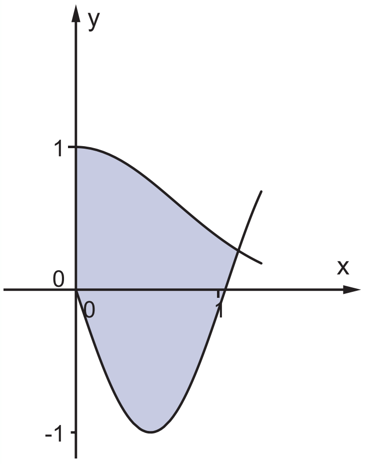
أ 0 ب 1 ج $f'(x)$

د $f(x)$ هـ نە چو ژوانن

4 کێژ ئەڤانێن ل خوارێ یەکسانە رووبەرێ دەڤەرا سنووردار ب چەماوەیێ هەردوو نەخشەیان $y=x^2$ و $y=-x$ و هەردوو راستەهێلان $x=0$ و $x=3$.

أ 2 ب $\frac{9}{2}$ ج $-\frac{9}{2}$

د 13 هـ $\frac{27}{2}$



5 R رووبەرێ دەڤەرا سنووردار ب چەماوەیێن هەردوو نەخشەیان $y=e^{-x^2}$ و هەردوو راستەهێلان $x=-1$، $x=1$ دبیتە:

أ 1.139 ب 1.445 ج 1.869

د 2.114 هـ 2.340

6 کێژ ڤانێن ل خوارێ دبیتە رووبەرێ دەڤەرا سنووردار ب چەماوەیێن هەردوو نەخشەیان $f(x)=e^x$، $g(x)=\frac{1}{x}$ و هەردوو راستەهێلان $x=1$ و $x=2$.

أ $e^2-e-\ln 2$ ب $\ln 2-e^2+e$ ج $e^2-\frac{1}{2}$

د $e2-e-\frac{1}{2}$ هـ $\frac{1}{2}-\ln 2$

بەشێ

6

برگە یێن قوچەکی   Conics

بەشێ شەشێ

وانە

1–6 برگەیێن قوچەکی

2–6 پۆلینکرنا برگەیێن قوچەکی

ئەزموونا نیڤقابەشی

3–6 هاوکێشێن دووجایی ب دوو گۆڕاوان.

پێداچوون

بەرهەڤکرن بۆ ئەزموونێ

هەسارێن کومەلا هەسارێن رۆژێ لدور رۆژێ دزڤرن د چەند خولگەیاندا کو شێوەیێ برگێ ناتەمام وەردگرن. رۆژ تێدا رولێ تیشکوی وەردگریت، پتریا ڤان خولگەیان ل سەر شێوەیێ نیمچە بازنێنە. خولەگەیا، بلوتو ژ وانێ دی کێمتریا بازنەییە، هەروەسا عەتار. داهندەك خولگە ب شێوەیێ برگەیێ نەتەمامێ و درێژن وەك خولگەیێ ستێرە بچووك ئیکار Icarus ، کو ئەو ستێرەکا بچووکە پانیا وێ پیچەکێ زێدەتر ژ 1,5 km ، ئەو ل دۆر رۆژێ دزڤریت هەر 409 رۆژ ێن ئەردی جارەکێ.

ئەرێ تۆیێ ئامادەی؟

زاراڤ

1 هەر دەستەواژەیەکا ل ستوونا ڕەخێ ڕاستێ دگەل شروڤەکرنا وێ یا گونجای ل ستوونا ڕەخێ چەپێ گرێدە.

1. بازنە
2. برگەیێ هاوتا
3. لەتکەرێ گۆشێ
4. دەرکنارێ ئاسۆیی

أ. ڕاستەهێلەکە گۆشێ دابەشدکەت بۆ دوو گوشەیێن جووت.
ب. ڕاستەهێلەکە بازنەیێ دابەشدکەت بو دوو پارچێن جووت.
ج. کومەلەکا خالایە دروتەختی دا کو هەمووان هەمان دووبر هەیە ژخالەکا دیارکری.
د. وێنەیێ ڕۆنکرنێ بۆ نەخشەیا دووجایی.
ه. ڕاستەهێلەکێ ئاسویی یە ورێنەیێ ونکرنا نەخشەی لێ نێزیك دبیت دەمێ x بەرەڤ $\pm\infty$ دچیت

بازنە

ژ ڕاهێنانان 2 هەتا 5 ، چەق و نیف تیرەیێ بازنێ دیاربکە.

2 $x^2+y^2=49$

3 $x^2+(y+1)^2=25$

4 $(x-5)^2+y^2=15$

5 $(x-2)^2+(y+3)^2=36$

ژ ڕاهێنانا 6 هەتا 9 ، هاوکێشا بازنێ بنڤیسە

6 چەق: $(0, 3)$، نیڤتیرە $\sqrt{5}$

7 چەق: $(0, 0)$، نیڤتیرە 8.

8 چەق: $(5, 0)$، نیڤتیرە 13

9 چەق: $(5, -3)$ ، نیڤتیرە $\sqrt{2}$

یاسایا دووریێ

ژ ڕاهێنانا 10 هەتا 12 ، دووریا ناڤبەرا دوو خالا بینەدەر

10 $(0, 2)$ و $(4, 5)$.

11 $(3,-5)$ و $(-2,-10)$.

12 $(-5, 1)$ و $(3, 6)$.

ژ ڕاهێنانا 13 هەتا 16 ، دوورییا ناڤبەرا خالێ و ڕاستەهێلێ هەژماربکە.

13 خال: $(3, 5)$، ڕاستەهێل $y=-5$

14 خال: $(-7, -9)$، ڕاستەهێل $x=2$

15 خال: $(3, 3)$، ڕاستەهێل $x+y=1$

16 خال: $(-2, 3)$ ، ڕاستەهێل $y=-2x+5$

تەمامکرنا دووجایێ

ژ ڕاهێنانا 17 هەتا 20 ، برێ تمامبکە دا ببیتە دووجاییا تەمام

17 $3x^2+6x$

18 $5y^2+20y$

19 x^2+x

20 y^2-3y

1-6 بڕگەیێن قووچەکی
Conic Sections

ئارمانج

- بڕگەیێن قووچەکی پێناسەدکەن.
- هاوکێشەیا بڕگەیێ هاوتا دنڤیسین و پێکهاتێن وێ دیاردکەن.
- هاوکێشا بڕگەیێ نەتەمام دنڤیسین و پێکهاتێن وێ دیار دکەن.
- هاوکێشا بڕگەیێ زێدە دنڤیسیت و پێکهاتێن وێ دیار دکەت.
- چەماوەیێ بڕگەیێن قووچەکی وێنەدکەن.

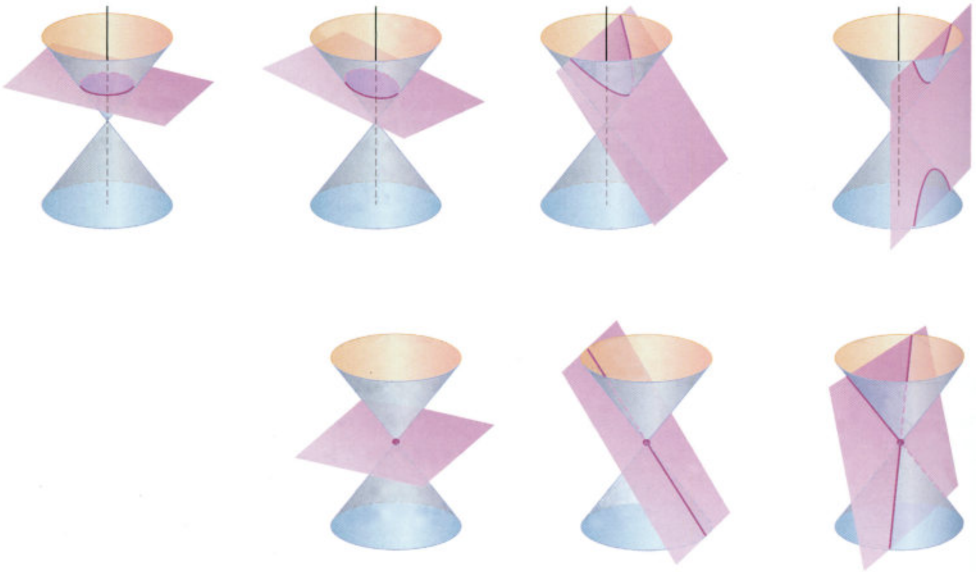
زاراڤ
Vocabulary

Parabola	بڕگەیێ هاوتا
Ellipse	بڕگەیێ نەتەمام
Hyperbole	بڕگەیێ زێدە
Focus	تیشکو
Directrix	دەلیل
Vertex	سەر
Focal axis	تەوەرێ تیشکویی
Major axis	تەوەرێ مەزن
Minor axis	تەوەرێ بچووک
Real axis	تەوەرێ ڕاستی
Cojugate axis	تەوەرێ ئاوڵ

ڕێڕەوێن هەسار و هەیڤی وتەنێن دی (هەتا ئەلکترونێ) بڕگەیێن قوچەکی پێکدئینن. کو لڤینا وان دهێتە دیارکرن ب هێزەکا بەروڤاژی دگەل دووجاییا دووریيا وان. تونزانی کو ڕێڕەوێ تەنەکی لڤۆك دبیتە بڕگەیەکی قوچەکی دیارکری هەتا زانیاری دەربارەی لەزا وی وهێزا ئەوی تەنی برێڤە دبەت بدەست تە نکەڤیت. دڤی بەشیدا دێ فێری پێکڤە گرێدانا ناڤبەرا بڕگەیێن قووچەکی وهاوکێشەیێن دووجایی ب دوو گۆڕاوان بی، هەروەسا دێ فێری ژێك جوداکرنا بڕگەیێن قوچەکی بی ل دووڤ جیاوازییا چەقێن وان Eccentricity.

بڕگەیێن قوچەکی

زانایێن یۆنانی لسەر دەمێ ئەفلاتونی بڕگەیێن قووچەکی پێناسەدکرن کو ئەو ل سەر شێوەیێ هێلێن چەماوە ببنە پەیدابن ژ ئەنجامێ بڕینا قووچەکەکی جووتك ب ڕووتختەکی. بەلێ ئەڤرۆ زانایێن بیرکاریێ بڕگەیێن قووچەکی پێناسەدکەن بکارئینانا یاسایا دووریێ د ڕووتەختێ پۆتانێدا.



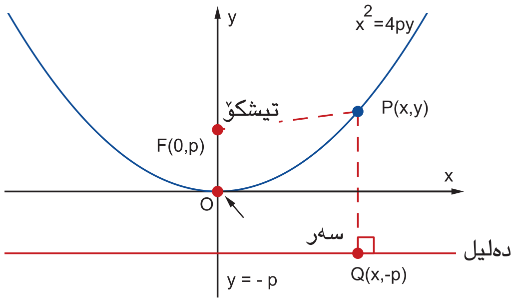
گەلەك ڕێك هەنە ژبۆ پێناسەکرنا بڕگەیێن قوچەکی. ئەم دشێین وەسا پێناسەبکەین کو ئەو ژ ئەنجامێ بڕینا قووچەکەکی چووتك ب ڕوتەختەی دروست دبیت. وەکی ئەوا یونانیا گۆتی، و ئەم دشێین بشێوەیێ جەبری پێناسەبکەین، کو ئەو پێکدهێت ژ نواندنا وێنەیێ ڕونکرنێ یا هاوکێشەیا پلە دوو یا دووگۆڕاو

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

هەروەسا تو دشێی ب ڤی شێوەی پێناسە بکەی، کو ئەوکومەلەکا خالێن ڕووتەختیە ئەوێن مەرجەکی ئەندازەی دیارکری ساخدکەن. ساناهیترین نموونە ل سەر ڤێ ڕێکێ پێناسا بازنێیە کو ئەو کومەلەکا خالایە د ڕووتەختی دا ئەوێن هەمان دووری هەبن ژ خالەکا دیارکری.

برگەيێ هاوتا

ل پولا دەهێ تويێ فێربوی، کو وێنەيێ روونکرنێ بۆ نەخشەيەکا دووجايی دبيتە برگەيێ هاوتا. دڤێ وانێدا دێ فێری سيفەتەکا ئەندازەی بی، دا پێناسەکا ئەندازەی بۆ برگەيێ هاوتا دياربکەی، برگەيێ هاوتا ئێکە ژ برگەيێن قووچەکی يێن بنەرەت، وسيفەتا وێنە دانە هەيە وەسادکەت کو ئەوێ بوارەکی فرەهـ بۆ بکارئينانێ هەبيت.



برگەيێ هاوتا Parabola

برگەيێ هاوتا: کومەلەکا خالايە دروتەختەکيدا کو هەمان دووريێ هەنە ژ خالەکا ديارکری کو دبێژنێ (تيشکو) و ژ راستەهێلەکێ تێرا نابوريت دبێژنێ (دەليل)، خالا ل ناڤەراستا تيشکو و دەليلی دبێژنێ سەرێ برگەيێ. ئەو راستەهێلێ د تيشکوی و سەرێ برگەيرا دبوريت دبێژنێ تەوەرێ برگەيێ هاوتا. هەکە تو بەرێ خو بدەيە وێنەيێ سەری کو برگەيێ هاوتا ديارکەت، دێ بوتە دياربيت کو يێ هاوجێيە دگەل تەوەرێ خو کو ئەودبيتە تەوەرێ هاوجێ بوونێ.

هەکە سەرێ برگێ هاوتا خالا $(h,\ k)$ بيت و هاوکێشەيا دەليلێ وی $y = k - p$ بيت، دێ پوتانێ تيشکوی بيتە $(h,\ k + p)$. دووريا ناڤبەرا خالا $P(x,\ y)$ وتيشکوی دبيتە $\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2}$، و دووريا ناڤبەرا P، ودەليلی دبيتە $\sqrt{(y-(k-p))^2}$.

هەکە P دانەيێ برگەيێ هاوتابيت دێ:

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2} = \sqrt{(y-(k-p))^2}$$

$$(x-h)^2 + (y-(k+p))^2 = (y-(k-p))^2$$

$$(x-h)^2 + y^2 - 2y(k+p) + (k+p)^2 = y^2 - 2y(k-p) + (k-p)^2$$

$$(x-h)^2 + 2y(k-p) - 2y(k+p) + (k+p)^2 - (k-p)^2 = 0$$

$$(x-h)^2 - 4(y-k)p = 0$$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

تو دشێی ل بەرامبەر بسەلمينی کو خالا $P(x,\ y)$ پەيوەنديا $(x-h)^2 = 4(y-k)p4p(y-k)$ ساخ دکەت و دکەڤيتە سەر وێ برگەيێ هاوتا ئەوێ سەرێ وی $(h,\ k)$ و دەليلێ وێ $y = k - p$ بيت.

هاوکێشەيا برگەيێ هاوتا

شێوێ گشتی: هاوکێشەيا برگەيێ هاوتا کو سەرێ وی $(h,\ k)$ و دەليلێ راستەهيلێ $y = k - p$ دبيتە $(x-h)^2 = 4p\ (y-k)$، دڤی بارێدا تەوەرێ برگەيێ دبيتە راستەهێلێ ستوونێ $x = h$ و تيشکو دبيتە خالا $(h,\ k + p)$ بەلێ هەکە سەرێ وێ $(h\ ,k)$ و هاوکێشا دەليلێ وی $x = h - p$ بيت،شێوێ گشتی يێ هاوکێشا وی دێ بيتە $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ دڤی بارێدا تەوەرێ برگەيێ دبيتە راستەهێلی ئاسۆيی $y = k$ و تيشکۆيێ وی دێ بيتە خالا $(h + p,\ k)$ بيت.

نموونـــــه 1 دیارکرنا پێکهاتێن برِگەیێ هاوتا

پێکهاتیێن برِگەیێ هاوتا $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$ بینەدەر (تیشکو وسەرو دەلیل وتەوەری وێ).

شیکار

ل دەستپێکێ هاوکێشەیا برِگەیێ هاوتا ب شێوێ گشتی بکارئینانا تمامکرنا دووجا بنڤیسە.

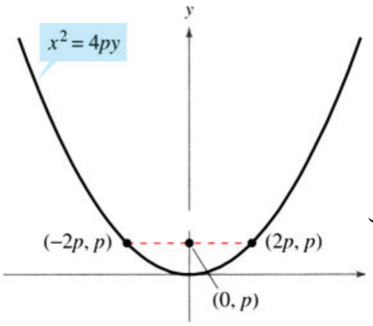
$$y=-\tfrac{1}{2}x^2-x+\tfrac{1}{2} \Rightarrow y=-\tfrac{1}{2}\left(x^2+2x+1\right)+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2} \Rightarrow (x+1)^2=-2(y-1)$$

بەراوردکرنا وێ دگەل شێوێ گشتی یێ وێ بکە دەمێ وێ تەوەرێ ستونی هەبیت، دەردکەڤیت $h=-1,\ k=1,\ p=\frac{-1}{2}$ ژ ڤێ بۆمە دەردکەڤیت کو تیشکویێ برِگەیێ هاوتا دبیتە خالا $(h,\ k+p)=\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$ و خالا سەرێ برِگەیێ $(h,\ k)=(-1,\ 1)$ و هاوکێشەیا دەلیلی دبیتە $y=k-p=1.5$ وتەوەرێ وێ دبیتە ڕاستەهێلێ $x=h=-1$

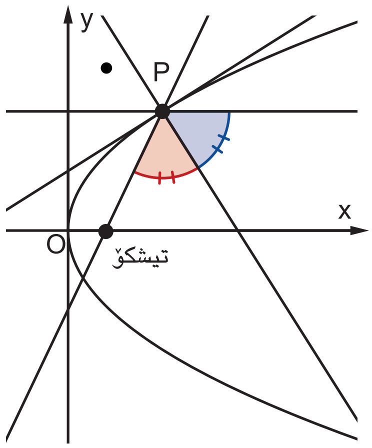
خالا چاڤدێرییێ

1. پێکهاتێن ڤی برگەیێ هاوتا بینەدەر. $2x+y^2+2y-1=0$

ئێك ژ سیفەتێن برگیێ هاوتا کو زۆر دهێتە بکارئینان (**سیفەتێ وێنەدانەوەیە**)، زانایێن فیزیایێ دبێژنە ڕوویەکی (تیشکدەر) هەکە ئەو گۆشاپێکدهێت ژ ئەنجامێ کەفتنا تیشکەکی ل سەروویە کی دگەل لێکەفتی وی ل وێ خالێ، یا جووت بیت دگەل وێ گوشەیا تیشك پەیدادکەت پشتی وێنەدا، وە وی دگەل ڤی لێکەوفتی، دبێژنە یا ئێکێ گوشا فێکەتنێ (زاویە السقوط) ودبێژنە یا دوییێ گوشەیا وێنە دا نەوە. ڕوییێ قودیکا ڕوناهییێ یا مال بساناهیترین نموونەیە لسەر ڕوییێن تیشکدەر.



چەند جورێن دی یێن ڕوویێن تیشکدەر هەنە وەکی سێلان (الصحون) ئەوێن پەخشێ تەلفزیۆنێ ژ هەیڤێن دەستگرد وەردگرن، ژ ئەنجامێ دەوردانا برِگەیەکی هاوتا ل دور تەوەرێ وێ. ئەڤ ڕوییێن تیشکدەر سیفەتەکێ گرنك هەنە، ئەو وان تیشکێن دکەڤنە سەروی بشێوەکێ تەریب بۆ تەوەرێ وەردگرت و ڤەدگەرینن ب مەرجەکی ئەو تیشکە د تێشکۆییێ برگەیێ هاوتا ڕاببوریت. هەروەسا هەموو ئەو تیشکێن کو تیشکو بەلاڤ دکەت (پەخش دکەت) بۆ ئاراستێ وی ڕوویێ تیشکدەر تەریب دگەل تەوەرێ برِگەیێ هاوتا بەلاڤ دەبن.

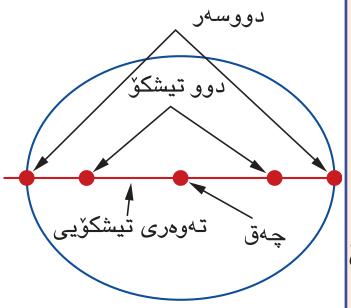


سیفەتێن وێنەدانەوە بۆ برِگەیێ هاوتا

ستوونا ل سەر لێکەفتێ برگەیێ هاوتا ل خالەکا وی وەك خالا P دبیتە لە تکەرێ وێ گۆشا سنووردای ب ڕاستهێلەکی دڤێ خالێ ڕا و تیشکۆیێ برگەیێ هاوتارا دبوریت و ڕاستە هێلێ تەریب دگەل تەوەرێ وی و د خالا P ڕا دبۆریت.

برگەیێ نەتمام

زانایێ پۆلۆنی(نیکۆلاس کۆبرنیکس) Nicolas Copernics گۆت هەسارو ئەرد ل دۆر رۆژێ دزڤرن ب خولگەیێن بازنەی سەنتەرێ وان دبیتە رۆژ. بەلێ زانایێ ئەلمانی یۆهان کیبلر بیر دۆزا کوبرنیکس دروستکر، ودیارکر کو هەسار ل دۆر ئەردی دزڤرن ب خولگەیێن ل سەر شێوەیێ برگەیێ نەتمام و رۆژ دکەڤتە دتیشکۆیەکی وێ دا. رۆنکرنا لڤینا هەساران دبیت بکارئینان برگەیێ نەتمام. ل ڤی بەشی دێ دەست ب خواندنا جورێ دووێ یێن برگەیێن قووچەکی کەین، پێناسا برگەیێ نەتمام دبێژیت ئەودبیتە کۆ مەلەکا خالان د رووتەختیدا مەرجەکی دیارکری ساخدکەن. ل پێناسا برگەیێ نەتمام دێ دووتیشکویان بکارئینین ل جهێ تیشکویەکی ل برگەیێ هاوتا.



برگەیێ نەتمام

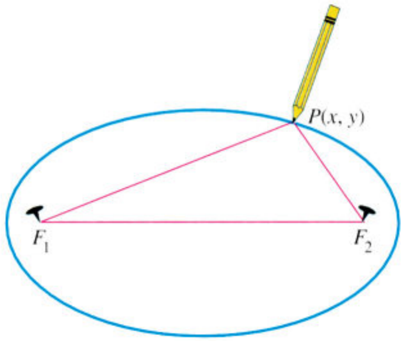
برگەیێ نەتمام: کۆمەلەکا خالێن رووتەختینە کو سەرجەمێ هەردوو دووریێن هەرخالەکێ ژ وان دووخالێن دیارکری (تیشکو) دبیتە بەهایەکی نەگۆڕ.

دبێژنە ڤان هەردوو خالان **دووتیشکۆیێن** برگەیێ نەتمام. دبێژنە ئەوی راستەهێلێ دهەر تیشکۆیان رادبوریت تەوەرێ تیشکویی. تەوەرێ تیشکوی برگەیێ نەتمام ل دوو خالان دبرت دبێژنێ هەردوو سەرێن برگەیێ نەتمام.

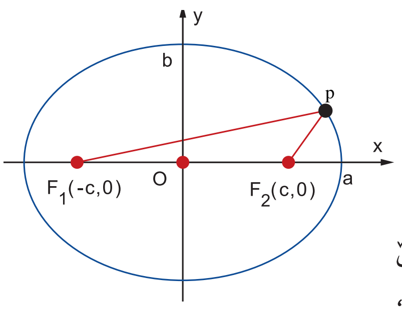
ئەو پارچە راستەهێلێ ناقبەرا هەردوو سەران دگەهینت دبێژنێ تەوەرێ مەزن، ودبێژنە ناڤەراستاوی چەقێ برگەیێ نەتمام. وئەو راستەهێلی ستوون دگەل تەوەرێ تیشکۆێ لنك چەقێ برگەیێ نەتمام. ل دوو خالان دبرت، دبێژنێ دوو سەریك بچووك بۆ برگەیێ نەتمام، ئەو راستەهێلێ ناقبەرا هەردوو سەرێن بچووك دگەهینیت دبێژنێ تەوەرێ بچووك

لەبیرا تەبیت

a و b و c ب پەیوەندیا پێکڤە $c^2 = a^2 + b^2$ دگرێداینە پێ سەلمینراوا فیساگورس



بکارئینانا پێناسا برگەیێ نەتمام وساناهیترین رێکە بۆ وێنەکرنا وێ ب زانینا هەردوو تیشکۆیێن وێ. داڤەکا دەزی بکاربینە کو درێژیا وێ یەکسانی سەرجەمێ دوو دووریێن خالەکا برگەیێ نەتمام بیت ژ هەردوو تێشکوێین وێ. هەردوو سەرێن دەزی ل هەردوو تیشکویا F_1 و F_2 بچەسپینە ب دوو دەمبووسان، پاشی پێنفیسەکێ ب وی دەزی گرێدە وبلڤینە، دێ وێنەك بدەست تەکەڤیت ئەو دبیتە کومەلەکا خالان کو سەرجەمێ هەردوو دووریێن هەر خالەکێ ژوان ژ هەردووتیشکویان یەکسانە درێژیا وێ داڤادەزی، وئەڤە دبیتە ئەو برگەیێ نەتمامێ داخوازکری.



هەکە هەردوو تیشکو ئەڤ خالەبن $F_2(c, 0) F_1(-c, 0)$ دێ $PF_1 + PF_2 = 2a$ پۆتانێ خالا $P(x, y)$ ل سەر برگەیێ نەتمام ڤێ پەیوەندیێ ساخکەن:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

بۆ سادەکرنا ڤێ هاوکێشەیێ، هەر رەگەکی د رەخەکی هاوکێشەییدا دانە وهەردوو رەخان دووجابکە، پاشی ئەو رەگێ دمینێت جارەکا دی دانە رەخەکی و هەردوو رەخان دووجابکە، ل دوماهیێ ئەڤ هاوکێشە دێ بدەست تەکەڤیت.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

ل لایەکی دی، تو دشێی تێبینیا ئەڤا ل خواریّ بکەی: هەکە پۆتانیّ خالا $P(x, y)$ هاوکێشەیا سەری ساخبکەت، دیّ ئەڤ خالە ڤیّ پەیوەندییّ ساخکەت $PF_1 + PF_2 = 2a$ خالا $P(x, y)$ دکەڤتە سەر چەماوەییّ برگەییّ نەتمام هەکە، وبتنیّ هەکە پۆتانیّ ویّ هاوکێشە یا سەری ساخبکەن.

چونکی $PF_1 + PF_2 > F_1F_2$ (لاسەنگەیا سێگۆشەی بۆ سێگۆشا PF_1F_2) پاشی دیّ $2a > 2c$ ودیّ $a > c$ و ژڤی دەرئەنجام دکەین کو $a^2 - c^2$ ژمارەکا مووجەبە ل هاوکێشەیا سەری هەکە دانیین وەك رەگیّ دووجای ژمارا $a^2 - c^2$ دیّ هاوکێشە بیتە $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ئەڤە **شێوەییّ سادەیە** بۆ هاوکێشەیا برگەییّ نەتمام هەکە چەقیّ ویّ خالا بنەرەت بیت. ل ڤیّ هاوکێشەییّ دیاردبیت کو چەماوەییّ برگەییّ نەتمام ییّ هاوجێیە دگەل هەر دوو تەوەران وخالا بنەرەت، وئەو دکەڤنە دناڤ لاکێشەکا سنووردراردا ب ڕاستە هێلێن $x = a$ $x = -a$ $y = b$ $y = -b$. چەماوەییّ برگەییّ نەتمام دبیتە لێکەفت بۆ ڤان ڕاستەهێلان ل چار خالان:

- هەردوو سەر $(a, 0)$، $(-a, 0)$.
- هەردوو سەرێن بچووك $(0, b)$، $(0, -b)$

لێکەفتێن برگەییّ نەتمام لنك ڤان خالان ستوونن دگەل هەردوو تەوەرێن بۆتانی، بەلیّ هەکە چەقیّ ویّ نەکەڤتە دخالا بنەرەت دا، دیّ هاوکێشاویّ ل سەر ڤیّ شێوەیی بیت:

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ هەکە تەوەریّ تیشکویی ئاسۆیی بیت.

$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ هەکە تەوەریّ تیشکویی ستوونیّ بیت. $a > b$ و ل بیراتەبیت چەقیّ ویّ دبیتە (h, k)

هاوکێشەیا برگەییّ نەتمام

شێوەییّ گشتی بو هاوکێشەیا برگەییّ نەتمام

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ هەکە تەوەریّ تیشکوی ئاسۆیی بێت.

$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ هەکە تەوەریّ تیشکوی ستوونی بێت.

دڤیّ هاوکێشێدا a نیڤا تەوەریّ مەزنەو b نیڤا تەوەری بچووکە، (h, k) چەقە.

پێکهاتێن برگەییّ نەتمام.

- دووریا دناڤبەر تیشکو و چەقیدا: c
- هەردووسەر $(h \pm a, k)$ هەگە تەوەریّ تیشکویی ئاسویی بێت. و $(h, k \pm a)$ هەکە ستوونی بێت.
- هەر دوو سەرێن بچووك $(h, k \pm b)$ هەکە تەوەریّ تیشکوی ئاسویی. و $(h \pm b, k)$ هەکە ستوونی بیت.
- هەردوو تیشکو $(h \pm c, k)$ هەکە تەوەریّ تیشکوی ئاسویی بیتر و $(h, k \pm c)$ هەکە ستوونی بیت.

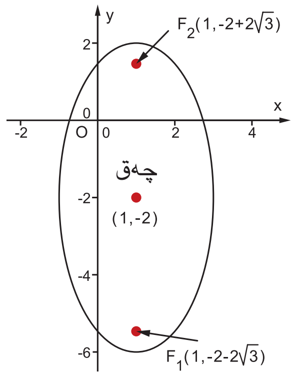
نموونـــــه 2

دیارکرنا پێکهاتێن برگەیێ نەتمام

پێکهاتێن برگەیێ نەتمام $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$ بینەدەر

شیکار

هاوکێشا برگەیێ نەتمام بگۆهورە بو شێوەیێ گشتی ب تمامکرنا دووجا بۆ x و y



$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$$

$$4x^2 - 8x + y^2 + 4y = 8$$

$$4\left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 + 4y + 4\right) = 8 + 4 + 4$$

$$4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

دقێ هاوکێشێدا دەردکەڤیت کو

$a^2 = 16$ ، $b^2 = 4$ ، $c^2 = a^2 - b^2 = 12$ ، $h = 1$ ، $k = -2$.

نیڤا تەوەرێ مەزن $a = \sqrt{16} = 4$ نیڤا تەوەرێ بچووک $b = \sqrt{4} = 2$

چەق $(h, k) = (1, -2)$ دووریا ناڤبەرا تیشکو وچەقی $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

هەردوو تیشکۆ: $(h, k \pm c) = (1, -2 \pm 2\sqrt{3})$

هەردوو سەرێن تەوەرێ بچووک: $(h \pm b, k) = (1 \pm 2, -2) = \begin{cases}(3, -2)\\(-1, -2)\end{cases}$

هەردوو سەرێن تەوەرێ مەزن: $(h, k \pm a) = (1, -2 \pm 4) = \begin{cases}(1, 2)\\(1, -6)\end{cases}$

زێرنەکە

$a > b$

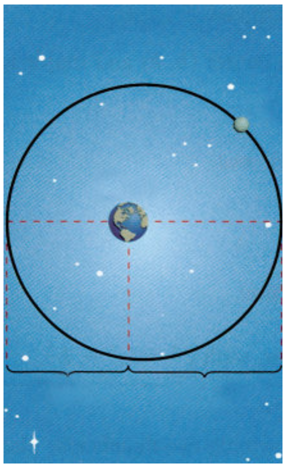
خالا چاڤدێریێ

2. پێکهاتێن برگەیێ نەتمام $2x^2 + 3y^2 + 4x + 6y - 1 = 0$ دیاربکە.

نموونـــــه 3

خولگەیێ هەیڤێ

خۆلگەیێ هەیڤێ لدور ئەردی دبیتە برگەیەکێ نەتمام، ئێک ژ تیشکوێن وی چەقێ ئەردییە، درێژیا تەوەرێ مەزن 768 800 km ودرێژیا تەوەرێ بچووک 767 640 km ، ئەرێ دوورترین خال ونێزیکترین خال ژ چەقێ ئەردی چەندە کو هەیڤ تێرا دبوریت.



شیکار

بهایێ a و b بینەدەر

$$2a = 768\,800 \Rightarrow a = 384\,400$$

$$2b = 767\,640 \Rightarrow b = 383820$$

بهایێ c هژماربکە $c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 21108$

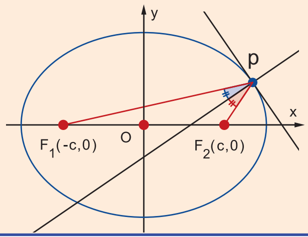
دوورترین خال کو هەیف تێرا دبوریت $a + c \approx 405\,508$ km دوورە ژ چەقێ ئەردی.

نێزیکترین خال کو هەیف تێرا دبۆریت $a - c \approx 363292$ km دوورە ژ چەقێ ئەردی.

خالا چاودێریێ

3. دوریا تێشکویا دوویێ ل خولگەیێ هەیڤێ ژ چەقێ ئەردی چەندە؟

سیفەتێ تیشکدانا بڕگەیێ نەتمام

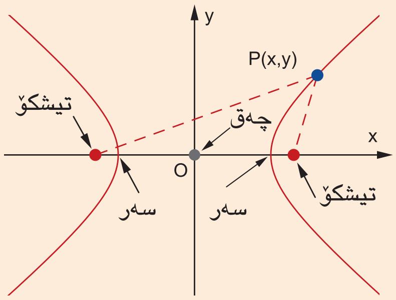


ستوون ل سەر لێکەفتێ بڕگەیێ نەتمام ل خالا P کو خالەکە ژ خالێن برگەی دبیتە لەتکەرێ وێ گوشەیا پێکدهێت ب وان هەردوو ڕاستەهێلێن دوێ خالێ وهەردوو تیشکویان ڕادبورن.

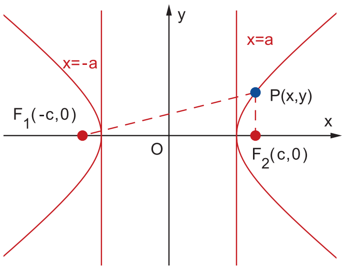
بڕگەیێ زێدە Hyperbola

پێناسا برگێ زێدە وەکی پێناسا برگێ نەتمامە. هەروەك بڕگەیێ نەتمام پێکدهێت ژ کومەلەکا خالان دروتەختەکیدا کو سەرجەمی هەردوو دووریان ژ دوو خالێن دیارکری برەکی نەگورە. هەروەسا بڕگەیێ زێدە پێکدهێت ژ کومەلەکا خالان دروتەختەکیدا کو بهایێ ڕووتێ جوداهیا دنافبەرا هەردوو دووریێن واندا ژ دوو خالێن دیارکری برەکی نەگۆڕە.

بڕگەیێ زێدە



بڕگەیێ زێدە: کومەلەکە خالانە د ڕوتەختەکیدا کو بهایێ ڕووتێ جوداهیا هەر دوو دووریێن هەرخالەکێ ژ دوو خالێن دیارکری برەکی نەگۆڕە، هەر ئێکی ژ ئەڤان هەردوو خالان دبێژنێ تیشکو، ئەو ڕاستەهێلێ د هەردوو تیشکویان ڕادبوریت د بێژنێ **تەوەرێ تێشکویی**. ئەو چەماوەیێ بڕگەیێ زێدە ل دووخالا د بڕت دبێژنێ هەردوو **سەرێن بڕگەیێ** زێدە. و دبێژنە وی پارچە ڕاستەهێلی ناڤبەرا هەردوو سەران دگەهینت تەوەرێ ڕاستی، وناڤەراستا وی دبیتە چەقێ بڕگەیێ زێدە. هەر وەسا دبێژنە وی ڕاستەهێلی ستوون دگەل تەوەرێ تیشکویی لدەڤ چەقێ تەوەرێ ئاول بۆ بڕگەیێ زێدە. بڕگەیێ زێدە یێ جودایە ژ بڕگەیێ نەتمام وبرگەیێ هاوتا، کو ئەو پێکدئێت ژ دوو لقێن هاوچێ دگەل چەقی و دگەل تەوەرێ ئاول.



هەکە هەردوو تیشکوییێن بڕگەیێ زێدە ئەف خالە بن $F_1(-c, 0)$ ، $F_2(c, 0)$، و $|PF_1 - PF_2| = 2a$ دێ پۆتانێ خالا $P(x, y)$ ڤێ پەیوەندیێ ساخکەن.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

بۆ سادەکرنا ڤێ هاوکێشەیێ، هەر ڕەگەکی دانە ڕەخەکی وێ، ودووجابکە، پاشی ڕەگێ دمینیت جارەکا دێ دووجابکە، لدوماهیێ دێ ئەڤ هاوکێشەیە بدەست تەکەڤیت

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

ئەڤ هاوکێشە وەکی هاوکێشەیا بڕگەیێ نەتمامە، $a < c$ چونکی $2a$ کێمترە ژ $2c$ چونکی ئەو جوداهیا ناڤبەرا دوو لایێن سێگوشا PF_1F_2 دنوێنت، ل لایەکی دی تو دشێی ئەڤێ تێبینیێ بکەی: هەکە خالا $P(x, y)$ هاوکێشەیا سەری ساخبکەت دگەل $0 < a < c$ ئەوێ ڤێ $|PF_1 - PF_2| = 2a$ ساخکەت. هەکە تو دانیێ وەك ڕەگێ دووجایێ مووجەبی $c^2 - a^2$، دێ $c^2 - a^2 = b^2$ و ئەو هاوکێشە دێ بیتە، $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، ئەڤە شێوەیێ سادەیە بۆ هاوکێشەیا بڕگەیێ زێدە .

هەکە ئەم بەراوردیێ بکەین ل ناڤبەرا دوو هاوکێشەیێن سادەیێن بڕگەیێ نەتمام و بڕگەیێ زێدە دێ دیاربیت ئەو وەك هەڤن بتنێ د دوو تشتاندا نەبیت.

(یائێکێ) هاوکێشەیا بڕگەیێ نەتمام نیشانا کومکرنێ + بخوڤەدگرت بەلێ هاوکێشەیا بڕگەیێ زێدە نیشانا لێدەرکرنێ - بخوڤەدگرت.

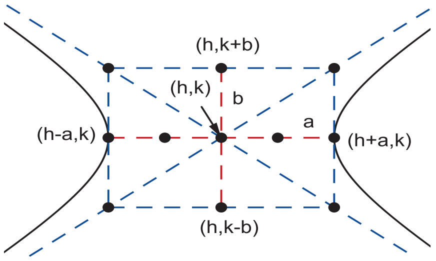
(یا دوویێ) $c^2 = a^2 + b^2$ د هاوکێشەیا بڕگەیی نەتمام دا، بەلێ $c^2 = a^2 - b^2$ دهاوکێشەیا بڕگەیێ زێدەدا ئەڤ هاوکێشە دیاردکەت کو بڕگەیێ زێدە یێ هاوجێیە دگەل هەردوو تەوەرێن پوتان کو ئەو دبنە تەوەرێ تیشکوی و تەوەرێ ئاول، و یێ هاوجێیە دگەل خالا بنەرەت. بڕگەیێ زێدە تەوەرێ ل دوو خالێن $(-a, 0)$ $(a, 0)$ دبڕت کو ئەو دبنە سەرێن وێ بڕگەیێ زێدە. لدوماهیکێ دوو لێکەفتێن بڕگەیێ زێدە ل نك سەرێن وێ دبنە دووراستەهێلێن ستوون دگەل تەوەرێ تیشکویی.

بەلێ هەکە چەقێ بڕگەیێ زێدە نەخالا بنەرەت بیت، دێ هاوکێشە یاوی ل سەرڤی شێوەیێ ل خوارێ بیت.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ هەکە تەوەرێ تیشکویی ئاسۆیی بیت.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$ هەکە تەوەرێ تیشکویی ستوونی بیت.

دەمێ خالا (h, k) چەقێ بڕگەیێ زێدە دبیت.



هەردوو دەرکنار

بڕگەیێ زێدە دوو دەرکنار هەنە ئەودبنە:

$y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$ $\frac{b}{a}$ دەمێ تەوەرێ تیشکۆیی ئاسوویی بیت و $y = k \pm \frac{b}{a}\frac{a}{b}(x-h)$ دەمێ تەوەرێ تیشکوی ستوونی بیت. هەردوو دەرکنار هاریکارن بو وێنەکێشانا بڕگەیێ زێدە وهەروەسا دا بزانی کو هەردوو دەرکنار ئێکو دوو د چەقێ وێ دا دبڕن، وهەردوو تیرەیێن لاکێشەیا چەقێ وێ دبیتە چەقێ بڕگەیێ زێدە بخۆڤە دگرن، وهەردوو دووریێن وێ لاکێشێ دبنە $2a$ و $2b$.

هاوکێشەیا بڕگەیێ زێدە

شێوەیێ گشتی یێ هاوکێشەیا بڕگەیێ زێدە دبیتە:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ هەکە تەوەرێ تیشکویی ئاسویی بیت.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$ هەکە تەوەرێ تیشکویی ستوونی بیت.

دڤێ هاوکێشێ دا (h, k) چەقێ بڕگەیێ زێدەیە و a نیڤا تەوەرێ ڕاستیە و $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ دووریيە لناڤبەرا چەقێ وتێشکویی.

پێکهاتێن بڕگەیێ زێدە ئەڤەنە:

- هەردوو سەر: $(h \pm a, k)$ هەکە تەوەرێ تیشکۆیی ئاسۆیی بێت و $(h, k \pm a)$ هەکە ستونی بێت.
- هەردوو تیشکو $(h \pm c, k)$ هەکە تەوەرێ تیشکویی ئاسویی بیت و $(h, k \pm c)$ هەکە ستونی بێت.
- هەردوو دەرکنار: $y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$ هەکە تەوەرێ تیشکویی ئاسۆیی بیت و $y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$ هەکە ستونی بێت.

لاکێشەیا $2a \times 2b$ کو چەقێ وێ دکەڤتە دخالا بنەڕەت دا هاریکاریێ دکەت بۆ وێنەکێشانا بڕگەیێ نەتمام

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ و بڕگەیێ زێدە $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ تە تێبینیا هندێ کریە کو بڕگەیێ نەتمام ب تمامی

دکەڤیتە دناڤ وێ لاکێشەییدا، بەلێ بڕگەیێ زێدە ب تمامی دکەڤیتە دەرڤەی وێ لاکێشێ. چونکی

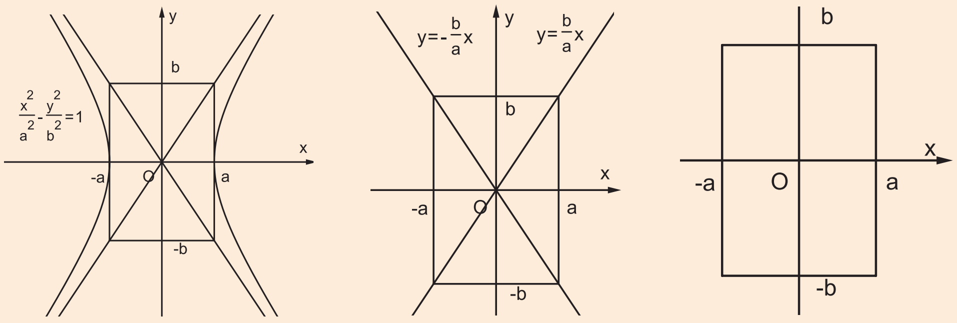
هاوکێشەیا $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ دیاردکەت کو $\frac{x^2}{a^2}\geq 1$ و $x \geq +a$ یان $x \leq -a$، تێبینیێ بکە کو

هەردوو بڕگەیان دوو لێکەفت لنك هەردوو سەرێن وان هەنە، کو هەردوو دبنە دوو لایێن بەرامبەر

دوێ لاکێشێ دا.

چەوا دێ بڕگەیێ زێدە وێنەکەی

1. خالێن $(\pm a, 0)$ و $(0, \pm b)$ دیاربکە و لاکێشا سنوردار ب وان خالان وێنەبکە.
2. هەردوو دەرکناران ب درێژکرنا هەردوو تیرەیێن لاکێشەیێ وێنەبکە.
3. لاکێشێ و هەردوو دەرکناران وەك هاریکار بکاربینە بۆ وێنەکرنا بڕگەیێ زێدە.



نموونـــــە 4

هەردوو دەرکناران بکاربینە بو وێنەکێشانا بڕگەیێ زێدە

وێنەیێ بڕگەیێ زێدە $4x^2 - y^2=16$ بکێشە.

شیکار

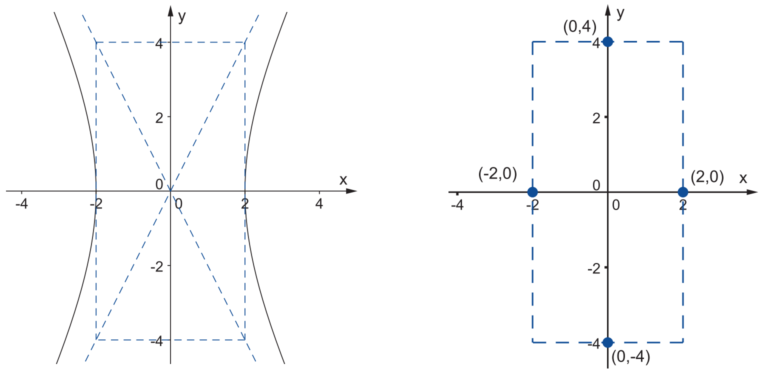
ل دەستپێکێ هاوکێشەیا بڕگەیێ زێدە ل سەر شێوەگێ گشتی بنڤیسە.

$$4x^2 - y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$$

ژ ڤێ بومە دەردکەڤیت کو تەوەرێ تیشکوی یێ ئاسۆیی یە و چەقێ بڕگەیێ خالا بنەڕەتە و

هەردوو دووریێن لاکێشەیێ $2a = 4$ $2b = 8$

نوکە لاکێشەیێ وێنەبکە.



هەردوو تیرەیێن وێ لاکێشەیێ وێنەبکە ودرێژبکە هەتا هەردوو دەرکنارێن بڕگەیێ بدەست تە بکەڤن.

نوکە تو دشێی بڕگەیێ زێدە ب شێوەیێ گونجای وێنە بکەی.

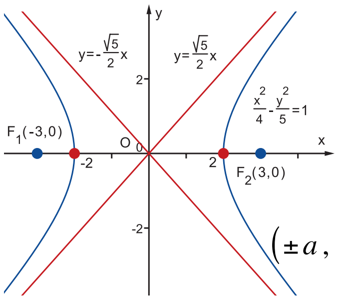
خالا چاڤدێریێ

4. وێنەیێ بڕگەیێ زێدە $y^2 - 4x^2 = 16$ بکێشە.

تو دشێی پێکهاتێن برگەیێ زێدە بکارئینانا هاوکێشەیا وێ دیاربکەی، کو ئەو دبنە هەردوو سەر و هەردوو تیشکۆ وهەردوو دەرکنار. ل پێش ڤێ دڤێت بزانی ئەرێ تەوەرێ تیشکۆیی ئاسۆییە یان ستوونیە.

نموونە 5

دیارکرنا پێکهاتێن برگەیێ زێدە، هەکە هەردوو تیشکۆ ل سەر تەوەرێ x بن



پێکهاتێن برگەیێ زێدە $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ هەژماربکە:

شیکار

$a^2=4$ ، $b^2=5$ ، $c^2=a^2+b^2=9$

دووریا دناڤبەرا چەق و تیشکۆیێ دا $c=3$

هەردوو تیشکۆ $(\pm c,0)=(\pm 3,0)$ هەردوو سەر $(\pm a,0)=(\pm 2,0)$

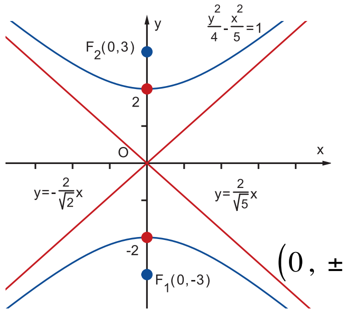
هەر دوو ڕاستەهێلێن دەرکناران $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$ چەق $(0,0)$

خالا چاڤدێریی

5. پێکهاتێن برگەیێ زێدە $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ بینەدەر.

نموونە 6

دیارکرنا پێکهاتێن برگەیێ زێدە، هەکە هەردوو تیشکۆ ل سەر تەوەرێ y بن.



پێکهاتێن برگەیێ زێدە دیار بکە $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$

شیکار

$a^2=4$ ، $b^2=5$ ، $c^2=a^2+b^2=9$

دووریا ناڤبەرا چەق وتیشکۆیی $c=3$

هەردوو تیشکۆ $(0,\pm c)=(0,\pm 3)$ هەردوو سەر $(0,\pm a)=(0,\pm 2)$

هەردوو هێلێن دەرکناران $y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$ چەق $(0,0)$

خالا چاڤدێریی

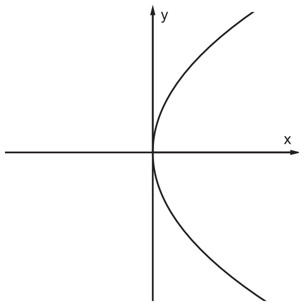
6. پێکهاتێن برگەیێ زێدە $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$ هەژماربکە

1–6 ڕاهێنان

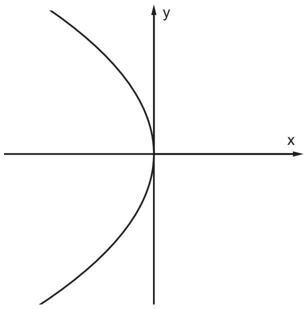
ژ ڕاهێنانا 1 هەتا 4، برگەیێ قووچەکی دگەل ئەوێ هاوکێشەیا وی دنوێنت گرێدە:

$x^2=2y$ ، $x^2=-6y$ ، $y^2=8x$ ، $y^2=-4x$

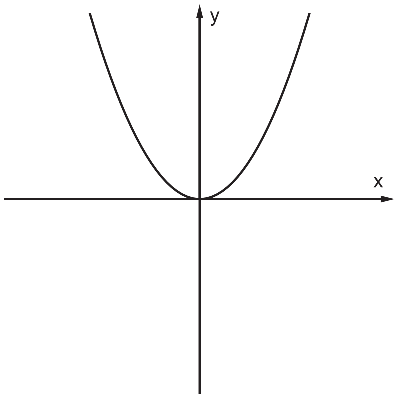
1



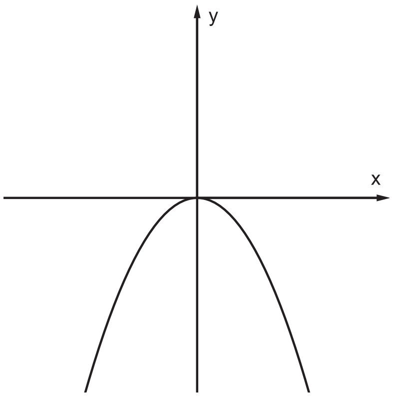
2



3



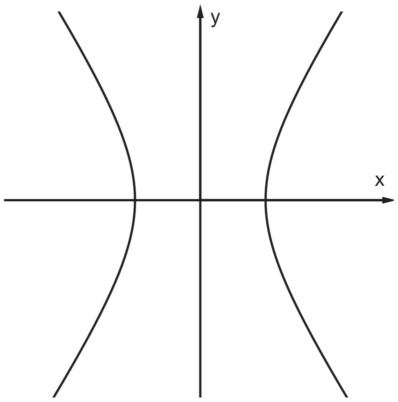
4



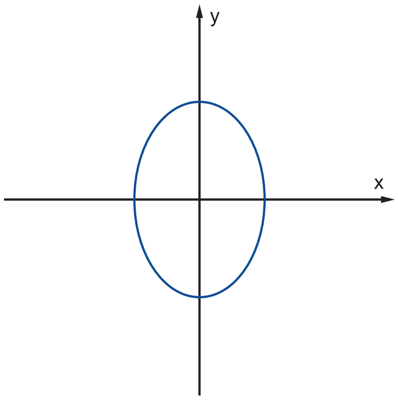
ژ ڕاهێنانا 5 هەتا 8 ،بڕگەیێ قووچەکی دگەل ئەوێ هاوکێشەیا وی دنوێنت گرێدە:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \text{ ، } \frac{x^2}{2}+y^2=1 \text{ ، } \frac{y^2}{4}-x^2=1 \text{ ، } \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$$

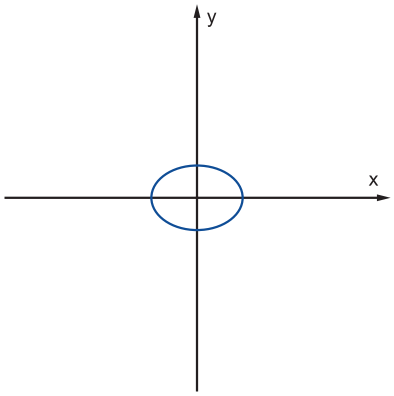
5



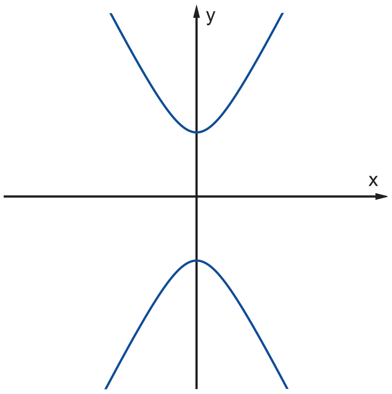
6



7



8



ژ ڕاهێنانا 9 هەتا 13 ، تیشکو وسەرو دەلیلی بۆ ڤان بڕگەیێن هاوتا بینە دەر، وێنەیێن وان بکێشە.

9 $y^2=12x$

10 $y^2=-6x$

11 $(x+3)+(y-2)^2=0$

12 $x^2+4x+4y-4=0$

13 $y^2+4y+8x-12=0$

ژ ڕاهێنانا 14 هەتا 17 ، هاوکێشەیا ڤان برگەیێن هاوتا بینەدەر

14 سەر : $(1, 2)$ تیشکو: $(3, 2)$

15 سەر : $(0, 4)$ دەلیل: $y=-2$

16 تیشکۆ: $(2, 2)$ دەلیل: $x=-2$

17 سەر : $(2, 4)$ هەردوو ئێکو دوو برینێن ئاسۆیی: $(0, 0)$ ، $(4, 0)$.

ژ ڕاهێنانا 18 هەتا 21 ، پێکهاتێن ڤان بڕگەیێن نەتمام بینە دەر و وێنەیێن وان بکێشە:

18 $5x^2+7y^2=70$

19 $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$

20 $9x^2+4y^2+36x-24y+36=0$

21 $9x^2+25y^2-36x+150y+36=0$

ژ ڕاهێنانا 22 هەتا 25 ، هاوکێشەیا بڕگەیێ نەتمام بینەدەر

22 چەق : $(0, 0)$ تیشکۆ: $(2, 0)$ سەر: $(3, 0)$

23 هەردوو $(3, 1)$ و$(3, 9)$ ، تەوەرێ بچووک: 6

24 هەردوو تیشکو: $(0, \pm 5)$ تەوەرێ مەزن 14

25 چەق : $(1, 2)$ تەوەرێ تیشکویی ستوونیە، و دهەردوو خالێن$(1, 6)$ و$(3, 2)$ ڕادبوریت.

ژ ڕاهێنانا 26 هەتا 29 ، پێکهاتێن ڤان بڕگەیێن زێدە بینە دەر و وێنەیێن وان بکێشە:

26 $y^2-\frac{x^2}{4}=1$

27 $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{1}=1$

28 $9x^2-y^2-36x-6y+18=0$

29 $x^2-9y^2+2x-54y-81=0$

ژ ڕاهێنانا 30 هەتا 33 ،هاوکێشا ڤان بڕگەیێن زێدە دیاربکە:

30 هەردوو سەر: $(\pm 1, 0)$ هەردوو دەرکنار $y=\pm 3x$.

31 هەردوو سەر: $(2, \pm 3)$ د خالا $(0, 5)$ ڕا دبۆریت.

32 چەق : $(0, 0)$ تیشکو: $(0, 4)$، سەر:$(0, 2)$.

33 هەردوو سەر: $(2, \pm 3)$، هەردوو تیشکۆ:$(2, \pm 5)$.

دەربارێ چەمکان

34 هەرئێکی: بڕگەیێ هاوتا و بڕگەیێ نەتمام و بڕگەیێ زێدە پێناسە بکە.

35 هاوکێشەیا وی بڕگەیێ هاوتا کو سەرێ وی خالا(h, k) بیت ل سەر شێوەیێ گشتی بنڤیسە.

36 هاوکێشەیا وی بڕگەیێ نەتمام کو چەقێ وی(h, k)بیت ل سەر شێوەیێ گشتی بنڤیسە.

37 هاوکێشەیا وی بڕگەیێ زێدە کو چەقێ وی(h, k) بیت ل سەر شێوەیێ گشتی بنڤیسە.

38 هاوکێشەیا هەردوو دەرکنارێن وێ بڕگەیێ زێدە کو چەقێ وی(h, k) بیت بنڤیسە.

39 ب شێوازێ خو سیفەتێ وێنەدا نەوەبۆ بڕگەیێ هاوتا بنڤیسە.

40 بڕگەیێ هاوتا$y^2=8x$ دوو یەکان بەرەڤ خوارێ ویەکەیەکێ بەرەڤ ڕەخێ ڕاستێ هاتە ڕاکێشان بۆ پەیدابوونا بڕگەیێ هاوتا$(y+2)^2=8(x-1)$

أ سەرێ بڕگەیێ هاوتا یێ بنەرەت وتیشکو و هاوکێشەیا دەلیلێ وی بینەدەر.

ب سەرێ بڕگەیێ هاوتایێ نوی وبۆتانێ تیشکو دیاربکە ودەلیلێ وی وێنەبکە.

ج وێنەیێ هەردوو بڕگەیان (یێ نوی و بنەڕەت) بکێشە.

2-6 پۆلینکرنا برگەیێن قووچەکی

Classifying Conics

ئارمانج

- پولینکرنا برگەیێن قووچەکی ل دووڤ جوداهیاچەقی،
- برگەیێن قووچەکی ب تیشکو ودەلیلی دهێنە پێناسەکرن.

زاراڤ

Vocabulary

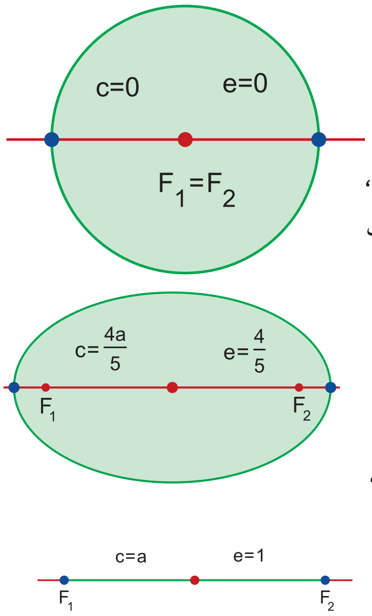
جوداهیا چەقی	Eccentricity
تیشکو	Focus
(دەلیل)	Directrix

هەر برگەیەکی قوچەکی دگەل ژمارەیەکێ دهێتە گرێدان دبێژنێ (**جوداهیا چەقی**). بهایێ جوداهیا چەقی جورێ برگەیێ دیار دکەت، ئەرێ ئەو برگەیە بازنە یان برگەیێ نەتمام یان برگەیێ زێدەیە. هەروەسا پێکهاتێن وێ دیاردکەت ل هەردوو بارەیێن برگەیێ نەتمام و برگەیێ زێدە. دێ دەست ب برگەیێ نەتمام کەین، هەرچەندە دووری ل ناڤبەرا چەقێ وتیشکویەکی وێ c دیار نابیت ل هاوکێشەیا.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$$

تو دێ دیارکەی بکارئینانا $c=\sqrt{a^2-b^2}$ هەکە بەهایێ a یێ نەگۆڕبیت و c بهێتە گۆهورین دماوەیێ $[0,\ a]$دا، دێ شێوەیێ برگەیێ نەتمام هێتە گۆهۆڕین وەك ل وێنەیێ بەرامبەر دیاردبیت، دێ ئەو برگە بیتە بازنە دەمێ $c=0$ $(a=b)$ و دێ درێژبیت ب زێدەکرنا بەهایێ c و دێ بیتە پارچە ڕاستەهێل دەمێ $c=a$

ڕێژەیا c بۆ a بۆ وەسفکرنا شێوەیێن جیاوازێن برگەیێ نەتمام بکاردهێت، ئەڤ ڕێژەیا دبێژنێ جوداهیا چەقی.



ب زێدە بوونا بهایێ e ، برگەیێ نەتمام دهێتە گۆهۆڕین ژ بازنێ بۆ پارچەڕاستەهێلێ

جوداهیا چەقی	
جوداهیا چەقی بۆ برگەیێ نەتمام $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$ دبیتە	$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

نموونـــــە 1

ڤەدیتنا سەرێن برگەیێ نەتمام

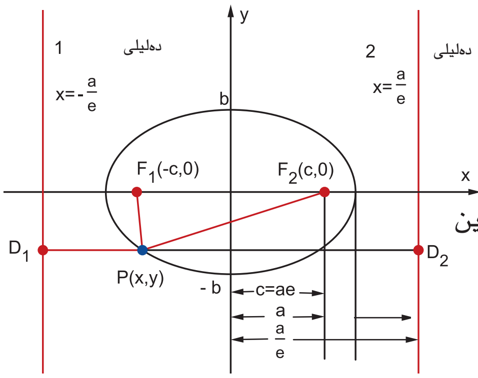
پوتانێن هەردوو سەرێن برگەیەکێ نەتمام بینە دەر کو جوداهیا چەقی 0.8 و هەردوو تیشکوێێن وێ $(0,\ \pm 7)$ بێت.

شیکار

پۆتانێن هەردوو سەرێن وێ $(0,\ \pm a)$ ژبەرکو $e=\frac{c}{a}$ ڤێجا $e=\frac{c}{a}$ $=8.75$ $\frac{7}{0.8}=$ $a=\frac{c}{e}$ لەوا هەردوو سەر دبنە $(0,\ \pm 8.75)$

خالا چاڤدێریێ

1. پۆتانێن سەرێ برگەیەکی نەتمام کو جوداهیا چەقی 0.75 و هەردوو تیشکوێێن وێ $(0,\ \pm 6.5)$ بیت بینە دەر.



برگەیێ هاوتا ئێك تیشكو وئێك دەلیل هەیە. بەلێ برگەیێ نەتمام دوو تیشكو و دوو دەلیل هەنە، هەردوو دەلیل ستوونن ل سەر تەوەرێ تیشكویی وئەوی دبرن ل دووریا $\pm\frac{a}{e}$ ژ چەقێ وێ، هەر خالەكێ وەك P ژ خالێن برگەیێ هاوتا ل سەر دەلیلی ئەڤ سیفەتە هەیە: $PF = 1 \times PD$ كو ، نێزیكترین خالە ژ خالێن دەلیلی بۆ P .

ئەڤ پەیوەندیە د برگەیێ نەتمام دبیتە $PF_1 = e \times PD_1$ ، $PF_2 = e \times PD_2$ كو جۆداهیا چەقییە بۆ برگەیێ نەتمام، F_1، F_2 هەردوو تیشكۆنە، D_1، D_2 دووخالن ل سەرهەردوو دەلیلێن برگەیێ نەتمام ونێزیكترین خالن بۆ P.

ل هەردوو هاوكێشەیان $PF_1 = e \times PD_1$ و $PF_2 = e \times PD_2$ دڤێت تیشكو ودەلیل لئێك رەخێ برگەیێ نەتمام بن

دەلیلێ $x = -\frac{a}{e}$ دگەل تیشكوییێ F_1 و دەلیلێ $x = \frac{a}{e}$ دگەل تیشكۆیێ F_2 بكاربینە.

جوداهیا چەقی بۆ برگەیێ زێدە $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ و $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$.

تێبینی بكە كو جوداهیا چەقی بۆ برگەیێ نەتمام و زێدە دبیتە رێژا دوویا ل ناڤبەرا هەردوو تیشكویان بۆ دووریا ل ناڤبەرا هەردوو سەران، چونكی $e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a}$.

جوداهیا چەقی = $\frac{\text{دووریا ل ناڤبەرا هەردوو تیشكویان}}{\text{دووریا ل ناڤبەرا هەردوو سەران}}$

دووریا ل ناڤبەرا هەردوو تێشكۆیێن برگەیێ نەتمام كێمترە ژ دووریا ل ناڤبەرا هەردوو سەرێن وێ. لەوا جوداهیا چەقی كێمترە ژ 1 ێ. بەلێ دووریا ل ناڤبەرا هەردوو تیشكوییێن برگەیێ زێدە پترە ژ دووریا ل ناڤبەرا هەردوو سەرێن وێ لەوا جوداهیا چەقی مەزنترە ژ 1 ێ.

نموونــــە 2

ڤەدیتنا جوداهیا چەقی

جوداهیا چەقی بۆ برگەیێ زێدە $9x^2 - 16y^2 = 144$ بینەدەر.

شیكار

ل دەستپێكێ هاوكێشەیا برگەیێ زێدە ل سەر شێوەیێ گشتی بنڤیسە.

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

ژ ڤێ دەردكەڤیت كو $a = 4$، $b = 3$.

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ و $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.

خالا چاڤدێریی

2. جوداهیا چەقی بۆ برگەیێ زێدە $16x^2 - 9y^2 = 144$ بینەدەر.

وەکی دبڕگەیێ نەتمام دا، هەروەسا دبڕگەیێ زێدەدا هەردوو ڕاستەهێل $x = \pm\frac{a}{e}$ دبنە دەلیل و $PF_1 = e \times PD_1$ ،$PF_2 = e \times PD_2$ کو P خالەکە ژ خالێن بڕگەیێ زێدە، F_1 و F_2 هەردوو تیشکۆنە، و D_1 و D_2 نێزیکترین دوو خالن ل سەر هەردوو دەلیلان بۆ P. ل بڕگەیێ زێدە هاوکێشەیێن هەردوو دەلیلان دبنە: $x = \pm\frac{a}{e}$

پێناسەیا ئێکگرتی بۆ بڕگەیێن قووچەکی

ژ بۆ تەمامکرنا شێوەی دەربارەی بڕگەیێن قووچەکی، جوداهیا چەقی یا بڕگەیێ هاوتا ب $e = 1$ پێناسە دکەین.

جوداهیا چەقی یا بڕگەیێ هاوتا

جوداهیا چەقی یا بڕگەیێ هاوتا دبیتە $e = 1$

هەکە ئەم پێداچونەکێ بکەین ل سەر وان پەیوەندیێن هەرسێ بڕگەیێن قووچەکی ساخدکەن، دێ شێین پێناسەیەکا ئێکگرتی بۆ وان دیاربکەین بکارئینانا تیشکۆ و دەلیل وجوداهیا چەقی

پێناسەیا ئێکگرتی یا بڕگەیێن قوچەکی

هەکە F خالەك بیت ل سەر ڕوتەختی، و d ڕاستەهێلەك بیت ژ ڕاستەهێلێن وی و e ژمارەکا ڕاستی نەیا سالب بیت، دێ بڕگەیێ قووچەکی خودان تیشکویێ F و دەلیل d و جوداهیا چەقی e بیتە کومەلا خالێن P ئەوێن ڤێ ساخدکەن:
$PF = e \times PD$ یان $\frac{PF}{PD} = e$.

بڕگەیێ قووچەکی دێ بیتە.

- بڕگەیێ هاوتا دەمێ $e = 1$.
- بڕگەیێ نەتمام دەمێ $e < 1$.
- بڕگەیێ زێدە دەمێ $e > 1$.

بکارئینانا هاوکێشەیا $e = \frac{PF}{PD}$ نەیا بساناهییە چونکی پۆتان تێدا نینن. هەکە تو هەولبدەی بگۆهۆڕی بکارئینانا پوتانان چەند ئەنجامێن جودا دێ بۆ تە دیاربن ل سەر شێوەیێ وان ل دووڤ بهایێ e.
بەلێ ئەو کرداره زۆرا بساناهییە د سیستەمێ پۆتانێن جەمسەریدا، کو زانایێن فەلەکی ئەو بکاردئینان بەری پتر ژ 300 سالان.

هەکە تو تیشکو و دەلیلی ئاول بۆ وێ بزانی د بڕگەیەکی زێدەدا کو چەقێ وێ خالا بنەڕەت بیت و تیشکو ل سەر تەوەرێ x بیت، تودێ شێی بهایێ جوداهیا چەقێ e هەژماربکەی، پاشی تودێ شێی هاوکێشەیەکا پۆتانی پێ $PF = e \times PD$ بۆ وێ دیاربکەی، وەك ل نموونەیا ل خوارێ دیاردبیت. تو دشێی ئەوی کاری ئەنجام بدەی بۆ بڕگەیەکی نەتمام چەقێ وی خالا بنەڕەت وتیشکویێ وۆی ل سەر تەوەرێ y بیت.

نموونـــــه 3 بکارئینانا تیشکو و دەلیلی

هاوکێشەیا پۆتانی بۆ بڕگەیێ زێدە بینەدەر هەکە چەقێ وێ ل خالا بنەڕەت بیت وتیشکۆیەکی وێ ل خالا $(3, 0)$ ودەلیل ڕاستەهێلی $x = 1$ بیت.

شیکار

ژبەرکو چەقێ وێ خالا بنەڕەتە وتیشکویەکێ وێ $(3, 0)$ لەوا $c = 3$ هاوکێشەیا دەلیلی

بەلێ $x = \frac{a}{e} = 1$ $\quad a = e \quad e = \frac{c}{a} = \frac{3}{e} \quad e^2 = 3$

و ژڤێ دیاردبیت کو $e = \sqrt{3}$.

ل ڕەخەکی دی، تودشێی پەیوەندییێ ب پۆتانان بگۆهۆڕی وەك ل خوارێ دیاردبیت $PF = e \times PD$

$$PF = e \times PD$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{3}|x-1|$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 3(x^2 - 2x + 1)$$

$$2x^2 - y^2 = 6$$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$$

خالا چاڤدێریێ

3. هاوکێشەیا پۆتانی بو وی برگەیێ نەتمام بینەدەر کو چەقێ وی خالا بنەڕەت وتیشکویەکێ وی $(3, 0)$ و دەلیلێ وی ڕاستەهێل $x = 4$ بێت.

2–6 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا 1 هەتا 4 ، جوداهیا چەقی و هەر دوو تیشکو و هەردوو دەلیلێن برگەیێ نەتمام هەژماربکە

1 $16x^2 + 25y^2 = 400$ 2 $2x^2 + y^2 = 2$ 3 $3x^2 + 2y^2 = 6$ 4 $6x^2 + 9y^2 = 54$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 5 و 6 ، جوداهیا چەقی بینەدەر، پاشی هاوکێشەیا گشتی یا برگەیێ نەتمام بینەدەر کو چەق وێ خالا بنەڕەت بیت ب زانینا تیشکو و دەلیلی

5 تیشکو: $(\sqrt{5}, 0)$، بەلگەیێ $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$.

6 تیشکو: $(-4, 0)$، بەلگەیێ $x = -16$.

7 برگەیێ نەتمام وێنەبکە هەکە جوداهیا چەقی $\frac{4}{5}$ بیت، ڕێیا کارێ خو ڕۆنبکە.

8 سەرەیێن برگەیەکی نەتمام ئەڤەنە $(1, 1)$، $(3, 4)$، $(1, 7)$، $(-1, 4)$ وێنەیێ برگەی نەتمام بکێشە، هاوکێشەیا گشتی بینەدەر، هەردوو تیشکویان وجوداهیا چەقی هەژماربکە وهاوکێشەیا هەردوو دەلیلان بنڤیسە.

9 هاوکێشەیا برگەیەکی نەتمام بینەدەر کو جوداهیا چەقی $\frac{2}{3}$ بیت وئێك ژ تیشکوییێن وی $(4, 0)$ و دەلیلی وێ $x = 9$ بیت.

ژ ڕاهێنانا 10 هەتا 13، جوداهیا چەقی و هەردوو تیشکویان وهەردوو دەلیلێن برگەیێ زێدە هەژماربکە.

10 $9x^2 - 16y^2 = 144$ 11 $y^2 - x^2 = 8$

12 $8x^2 - 2y^2 = 16$ 13 $8y^2 - 2x^2 = 16$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 14 و 15، هاوکێشەیا گشتی یا برگەیێ زێدە بینەدەر ب زانینا جوداهیا چەقی و هەردوو سەران یان هەردوو تیشکۆیان.

14 جوداهیا چەقی 3 : هەردوو سەرێن ستوونی $(0, \pm 1)$.

15 جوداهیا چەقی 3 : هەردوتیشکو $(\pm 3, 0)$

16 هاوکێشەیا ئەوی برگەیێ زێدە هەژماربکە کو جوداهیا چەقی $\frac{3}{2}$ وتیشکویەك $(1, -3)$ و دەلیل $y = 4$ بیت.

17 بەهایێن a و b و c بینەدەر هەکە برگەیێ نەتمام $4x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ د خالا $(-1, 2)$ ڕا ببۆریت وتەوەرێ x لێکەفت بیت بۆ وێ ل خالا بنەڕەت، جیاوازیا چەقی بۆ ڤێ برگەیێ نەتمام چەندە؟

18 هاوکێشەیا وی برگەیێ زێدە بینەدەر کویێ پێکهاتی بیت ژوان خالێن ڕوتەختەی و بهایێ ڕووتی جوداهیا ل ل ناڤبەرا هەردوو دوورییێن هەر خالەکێ ژ هەردوو خالێن $(2, 2)$،$(10, 2)$ دبیتە بهایێ نەگۆڕ 6 .

بـەشێ 6

ئەزموونا نیڤا بەشی

1-6 برگەیێن قووچەکی

1 تیشکۆ وسەر و دەلیلێ برگەیێ هاوتا دیاربکە، پاشی درووتەختێ پۆتانیدا وێنەبکە.

أ $y^2-4x=0$ ب $x=2(1-y^2)$ ج $x^2-2x+2y+3=0$

2 پوتانێن چەقی و هەر دوو تیشکویان و جوداهیا چەقی یا برگەیێ نەتمام بینە دەر، پاشی وێنەیێ وی بکێشە

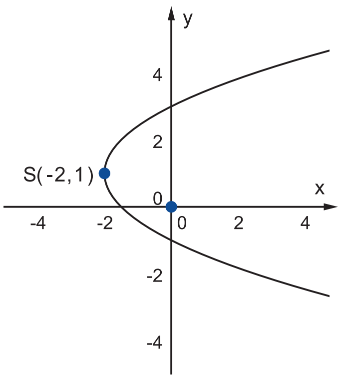
أ $x^2+4y^2=1$ ب $4x^2+y^2-8x-12=0$

3 پوتانێن چەقی و هەر دوو تیشکویان و درێژیا تەوەرێ مەزن یێ برگەیێ زێدە هەژماربکە، پاشی وێنەیێ وی بکێشە

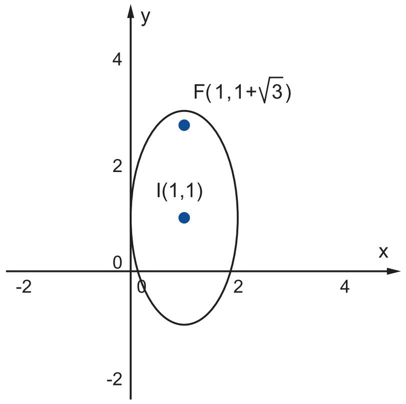
أ $x^2-y^2=4$ ب $4(y-1)^2-x^2=1$

4 هاوکێشەیا ڤان برگەیێن قووچەکی ل سەر شێوەیێ گشتی بنڤیسە.

أ



ب



5 هاوکێشەیا برگەیێ نەتمام ل سەر شێوەیێ گشتی بنڤیسە دەمێ چەقێ وی $I(3,1)$ بیت وئێك ژ سەرێن وی و $A(6,1)$ وئێك ژ دەلیلێن وی ڕاستەهێلێ $x=7$ بیت.

6 هاوکێشەیا برگەیێ زێدە ل سەرشێوەیێ گشتی بنڤیسە دەمێ چەقێ وی خالا بنەڕەت بیت و ئێك ژ سەرێن وی $A(3,0)$ و جوداهیا چەقی $\frac{5}{3}$ بیت.

2-6 پۆلینکرنا برگەیێن قووچەکی

7 M خالەکە درووتەختێ پوتاندا ل دووڤ ڤێ پەیوەندیێ $|MA-MB|=1$ دلڤیت، دەمێ $A(0,-1)$، $B(0,3)$ بیت، جۆرێ چەماوەیێ لڤینا ڤێ خالێ دیاربکە و هاوکێشەیا وێ ل سەر شێوەیێ گشتی بنڤیسە.

8 خالا M د ڕووتەختێ پوتاندا دلڤیت ب مەرجەکی دووریا ل ناڤبەرا وێ و خالا بنەڕەت دبیتە دووسێئێکا دووریا لناڤبەرا وێ و ڕاستەهێلێ $x=\frac{5}{2}$. جورێ چەماوەیێ لڤینا وێ خالێ دیاربکە وهاوکێشەیا وێ ل سەر شێوێ گشتی بنڤیسە.

3–6 هاوكێشەیێن دووجای ب دوو گۆڕاوان
Quadratic Equations in 2 Variables

ئارمانج

- ڕزگاربوون ژ ڕادیێ ئێكدووبڕینێ ب دەوردانا هەردوو تەوەرێن پۆتانی
- دیاركرنا نواندنێن ڕونكرنێن جۆراو جۆر بۆ هاوكێشەیێن دووجای ب دوو گۆڕاوان.
- بكارئینانا تاقیكرنا جۆداكەری بۆ پۆلینكرنا هاوكێشەیێن دوو جای ب دوو گۆڕاوان.

زاراوەكان
Vocabulary

چەماوەیێن دووجای
Quadratic Curves

جۆداكەر
Discriminant

چەماوەیێن دووجای

دێ دڤێ وانەیێ دا فێری بابەتەكی گەلەك سەرسورهێنەربی د ئەندازەیا پۆتانیدا. ئەو نواندنا وێنەیێ ڕونكرنێیە بۆ هاوكێشەیا دووجای ب دوو گۆڕاوان ئەوا دهێتە نڤیسین ل سەر شێوەیێ:

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ كو A و B و C و D و E و F ژمارەیێن ڕاستینە وهەموونە یەكسانن سفر. زۆربەی جاران ئەڤ چەماوە دبیتە بڕگەیێ قووچەكی، بەلێ ل هندەك بارەیێن كێم دبیتە خالەك یان دوو ڕاستەهێلێن تەریب یان كومەلەكا بەتال.

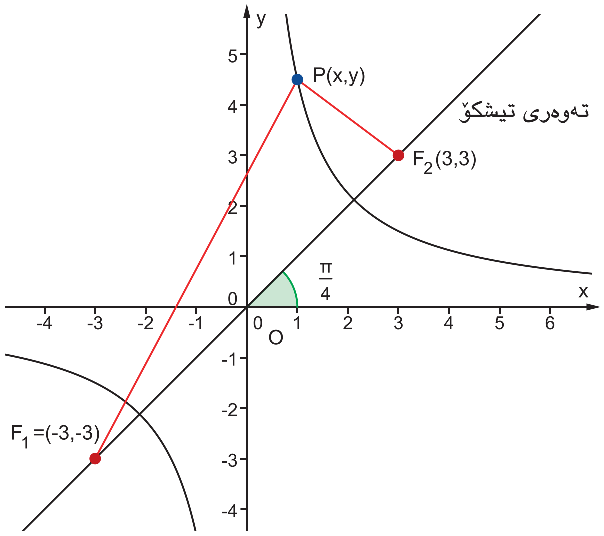
دبێژنە وان چەماوەیێن هاوكێشەیێن دووجای ب دوو گۆڕاوان دنوینن چەماوەیێن دووجای.

بێگومان تەیا پرسیاركری دەربارەی ڕادەیێ Bxy، كوپێشتر ئەو بەرچاڤێ تەنەكەفتییە دهاوكێشەیێن بڕگەیێن قوچەكیدا. دبێژنەڤی ڕادەی ڕادەیێ ئێكو دووبڕینێ. نەبوونا ڕادەیێ ئێكو دوو بڕینێ ڤەدگەرێت بۆ وێ چەندێ چونكی تەوەرێن برگەیێن قووچەكی بەردەوام د تەریب بوون دگەل هەردوو تەوەرێن پۆتانی دابینی كا دێ چ ڕوودەت دەمێ ئەڤ هەردوو تەوەرە نەدتەریب بن دگەل هەردوو تەوەرێن بۆتانێ، دێ هاوكێشەیا بڕگەیێ زێدە نڤیسین دەمێ $a=3$ و هەردوو تیشكو $F_1(-3,-3)$ و $F_2(3,3)$ بن.

ئەڤ بڕگەیێ زێدە دبیتە كۆمەلا خالێن $P(x,y)$ ئەوێن ڤێ پەیوەندییێ ساخدكەن $|PF_1-PF_2|=2a=2(3)=6$

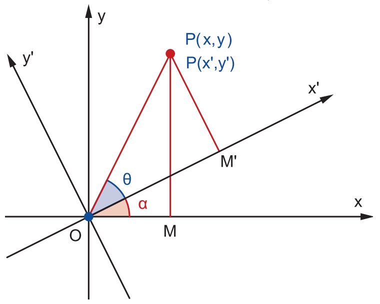
ئەڤە ل سەر شێوەیێ پۆتانی دبیتە: $\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}-\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=\pm 6$

هەكە ڕەگەكی جودابكەی بۆ ڕەخەكی، پاشی هەردوو ڕەخان دووجابكەی، پاشی ئەوی ڕەگی مایی جودابكەی، وجارەكا دی دووجابكەی، پشتی سادەكرنێ دێ ئەڤە بدەست تەكەڤیت $2xy=9$



هەردوو هێلێن دەركنارێن بڕگەیێ زێدە ل دووڤ هاوكێشەیا نوێ دبنە هەردوو تەوەرێن پۆتانی. بەلێ تەوەرێ تیشكویێ گۆشەكێ دگەل ئاراستەیێ مووجەبێ تەوەرێ x دروست دكەت، پیڤانا وێ دبیتە $\frac{\pi}{4}$ ڕادیان

دەوردانا (زڤراندنا) هەردوو تەوەرێن پۆتانی ژبو ڕزگاربوونێ ژ ڕادەیێ Bxy



بۆ ڕزگاربوون ژ ڕادەیێ ئێکدوبڕێنێ. ئەوێن دبوارێ بیرکاریێدا کاردکەن ڕادبن ب زڤراندنا تەوەرێن پۆتانی لدور خالا بنەڕەت ژبۆ بدەست کەفتنا ڕوتەختەکێ نوی بوهندێ کو هاوکێشەیا چەماوەی چو ڕادەیێن ئێکدووبڕینێ تێدانەمینن لدووف وێنەیێ بەرامبەر تو دشێی بنڤیسی:

$$x = OM = OP\cos(\theta+\alpha) = OP\cos\theta\cos\alpha - OP\sin\theta\sin\alpha$$

$$y = PM = OP\sin(\theta+\alpha) = OP\cos\theta\sin\alpha + OP\sin\theta\cos\alpha$$

چونکی $OP\cos\theta = OM' = x'$ و $OP\sin\theta = M'P = y'$ دێ:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

لەورا ئەم دشێین پەیوەندیا ل سەری ل سەر شێوەیێ ڕێزکریێ ل خوارێ دەرببرین وەکی تو ل پولا یازدێ فێربوی.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

نموونــــە 1

ڕزگاربوون ژ ڕادەیێ ئێکدوو برینێ

هاوکێشەیا برگەیێ زێدە $2xy = 9$ د ڕوتەختێ پۆتانی یێ نوی دا بنڤیسە ئەوێ پەیدادبیت ژ ئەنجامێ زڤراندنا هەردوو تەوەرێن پۆتانی ل دۆر خالا بنەڕەت ب گۆشەیا ڕادەیان $\frac{\pi}{4}$

شیکار

ژ $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ دەردکەڤیت $x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$ و $y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ ئەڤان ل جهێن x و y دانە دهاوکێشەیا $2xy = 9$ دا.

دەردکەڤیت کو: $2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) = 9$

یان $\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{9} = 1$ دبیتە هاوکێشا برگەیێ زێدە دروتەختێ پۆتانی یێ نوی دا

خالا چاڤدێریێ

1. هاوکێشەیا برگەیێ زێدە $xy = 1$ دروتەختێ پۆتانی یێ نوی دا بنڤیسە ئەوێ پەیدا دبیت ژ ئەنجامێ زڤراندنا هەردوو تەوەرێن پۆتانی ل دۆر خالا بنەڕەت ب گۆشەیا $\frac{\pi}{4}$ ڕادیان.

هەکە ڤەگەرێین بۆ هاوکێشەیا دووجایی یا ب دوو گوڕاوان و ل جهێ x و y بەهایێن α و x' و y' دانێین دێ ئەڤ شێوەیێ هاوکێشا ل خوارێ بدەست مەکەڤیت دروتەختێ پوتانی یێ نویدا.

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

هاوکولکەیێن نوێ و هاوکولکەیێن کەڤن ب ڤان پەیوەندیێن ل خوارێ پێکڤە دهێتە گرێدان.

$$A' = A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha$$
$$B' = B\cos 2\alpha + (C - A)\sin 2\alpha$$
$$C' = A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$$
$$D' = D\cos\alpha + E\sin\alpha$$
$$E' = -D\sin\alpha + E\cos\alpha$$
$$F' = F$$

ژ بو ڕزگاربوونێ ژ ڕادەیێ $B'x'y'$ ، تو دشێی بتنێ α هەلبژێری کو $B'=0$، وئەڤا ل خوارێ دێ بدەست تەکەڤیت:

دیارکرنا گۆشەیا دەوردانێ (زڤڕاندنێ) α

- هەکە $A=C$، هەلبژێرە $\alpha=\frac{\pi}{4}$ دائەڤە بدەستەبکەڤیت، $B'=B\cos 2\alpha=B\cos\frac{\pi}{2}=0$
- هەکە $A\neq C$، α هەلبژێرە بمەرجەکی $\tan 2\alpha=\frac{B}{A-C}$.

نموونـــــە 2

ڕزگاربوون ژ ڕادەیێ ئێکدوبرینێ

گۆشەیا دەوردانێ α بینەدەر بمەرجەکی هاوکێشەیا $2x^2+\sqrt{3}xy+y^2-10=0$ دروتەختێ پۆتانێ یێ نوی دا ڕادێ ئێکو دوو برینێ تێدانەبیت، هاوکێشا چەماوەیی دروتەختێ پۆتانێ یێ نوی دا بینەدەر.

شیکار

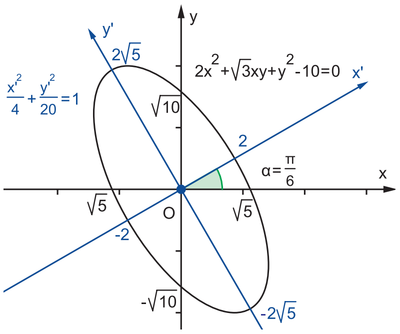
$A=2$ ، $B=\sqrt{3}$ ، $C=1$ ب لجهدانانێ $\tan 2\alpha=\frac{B}{A-C}=\frac{\sqrt{3}}{2-1}=\sqrt{3}$ ژڤێ دیاردبیت کو $2\alpha=\frac{\pi}{3}$ و $\alpha=\frac{\pi}{6}$

هاوکولکەیێ هاوکێشەیا چەماوەی دروتەختێ پۆتانێ یێ نویدا ئەڤەیە $A'=\frac{5}{2}$ و $B'=0$

و $C'=\frac{1}{2}$ و $D'=E'=0$ و $F'=-10$ ئەڤەژێ دێ ڤێ دەتەمە $\frac{5}{2}(x')^2+\frac{1}{2}(y')^2-10=0$

یان $\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{20}=1$

ئەڤە چەماوەیێ برگەیێ نەتمامە هەردوو تیشکوێن وی دکەڤنە سەر تەوەرێ y'



خالا چاڤدێرییێ

2. گۆشەیا دەوردانێ α بینەدەر دەمێ هاوکێشەیا چەماوەیی $xy-x-y+1=0$ د ڕوتەختێ پۆتانێ یێ نوی دا ڕادەی ئێکودو برینێ تێدا نەبیت، وهاوکێشەیا چەماوەیی دروتەختێ پۆتان یی نویدا بنڤیسە.

نواندنا وێنەیێن ڕونکرنێن دشیاندا بۆ هاوکێشەیا دووجای ب دوو گۆڕاوان:

چونکی ل هەمی دەمان ئەم دشێین ڕادەیێ ئێکودو برینێ لابدەین، ڤێجا ئەم دشێین $B=0$ دانێن، و هاوکێشەیا دووجای یا ب دوو گوڕاوان بڤی شێوەی بنڤیسین: $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.

ئەڤ هاوکێشە ئێك ژڤان بارێن ل خوارێ دنوێنت:

1. بازنە: دەمێ $A=C\neq 0$ (دووبارێن نەرێك هەنە خال و کومەلا بەتال).

2. برگەیێ هاوتا: دەمێ ئێك ژ گوراوان دوو جابیت و ئەوێ دی ژ پلا ئێکێ بیت.

3. برگەیێ نەتمام: دەمێ A و C هەمان نیشان هەبن [دوویارین نەرێك هەنە: خال و کومەلا بەتال]

4. برگەیێ زێدە A و C دوو نیشانێن جودا هەبن [بارکی نەرێك هەیە: دوو ڕاستەهێلێن ئێکودووبڕ]

5. ڕاستەهێل: دەمێ $A=C=0$ وب کێماسی ئێك ژ هەردوو کۆلکەیێن D و E نەسفر بیت.

6. ڕاستەهێلەك یان دوو ڕاستەهێل: هەکە دشیاندابیت ڕەخێ چەپێ یێ هاوکێشێ شیتەل بکەن ل سەر شێوەیێ ئەنجامێ لێکدانا دوو کولکەیێن هێلی. خشتەیێ ل خوارێ هندەك نموونەیان دیاردکەت.

	A	B	C	D	E	F	هاوکێشە	تێبینی
بازنە	1	0	1	0	0	-4	$x^2+y^2=4$	$F<0$ ؛ $A=C$
برگەی هاوتا	0	0	1	-9	0	0	$y^2=9x$	دووجایە د y دا و هێلییە د x دا .
برگەی نەتمام	4	0	9	0	0	-36	$4x^2+9y^2=36$	$F<0$ ، $A\neq C$ ، $AC>0$
ئێك راستەهێل	1	0	0	0	0	0	$x^2=0$	تەوەرێ y
دوو ڕاستەهیلێن ئێکدوویڕ	0	1	0	1	-1	-1	$xy+x-y-1=0$	شیتەل دبیت بۆ $(x-1)(y+1)=0$ $y=-1$ ، $x=1$
دوو ڕاستەهێلێن تەریب	1	0	0	-3	0	2	$x^2-3x+2=0$	شیتەل دبیت بۆ $(x-1)(x-2)=0$ $x=2$ ، $x=1$
خال	1	0	1	0	0	0	$x^2+y^2=0$	خالا بنەڕەت
کومەلا بەتال	1	0	0	0	0	1	$x^2=-1$	کومەلا بەتال

تاقیکرنا جوداکەری Discriminant Test

دگەل وێ چەندێ کو هندەك برگەیێن قووچەکی چێدبیت بارەکی نەرێك هەبن. بەلێ ئەو چەماوەیێ هاوکێشەیا $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ دبیتە.

- برگەیێ هاوتا دەمێ جوداکەر یەکسانی سفر بیت.
- برگەیێ نەتمام دەمێ جوداکەر یێ سالب بیت
- برگەیێ زێدە دەمێ جوداکەر یێ مووجەب بیت.

جوداکە
B^2-4AC

نموونـــــە 3

تاقیکرنا جوداکەری

جۆرێ ڤێ چەماوەی دیار بکە کو نواندنا هەر ئێکێ ژڤان هاوکێشەیان دکەت.

أ $3x^2-6xy+3y^2+2x-7=0$ **ب** $x^2-xy+y^2-1=0$ **ج** $xy-y^2-5y+1=0$

شیکار

أ $B^2-4AC=(-6)^2-4(3)(3)=36-36=0$ برگەیێ هاوتایە.

ب $B^2-4AC=(1)^2-4(1)(1)=1-4=-3<0$ برگەیێ نەتمامە.

ج $B^2-4AC=(1)^2-4(0)(-1)=1>0$ برگەیێ زێدەیە.

خالا چاقدێریێ

3. جۆرێ چەماوەیێ هەر هاوکێشەیەکێ دنوێنت دیاربکە:

أ $2x^2-4xy+2y^2+2x-7=0$ ب $2x^2+xy+y^2-5=0$

ج $x^2-xy-y^2-5y+1=0$

3-6 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا 1 هەتا 8 ، جوداکەری بکاربینە بۆ دیارکرنا جورێ چەماوەیێ هەر هاوکێشەیەکێ وی دنووینت.

1 $x^2-3xy+y^2-x=0$

2 $3x^2-7xy+\sqrt{17}y^2=1$

3 $x^2+2xy+y^2-y+2=0$

4 $x^2+4xy+4y^2-3x=6$

5 $xy+y^2-3x=5$

6 $3x^2-5xy+2y^2-7x-14y=-1$

7 $x^2-3xy+3y^2+6y=7$

8 $6x^2+3xy+2y^2+17y+2=0$

9 **بنڤیسە:** ئەرێ تو دشێی چ بێژی دەربارەی وی وێنەیێ ڕونکرنێ ئەوێ هاوکێشەیێ $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ دنوێنت، هەکە $AC<0$ ؟ بەلگەیان بۆ بەرسڤا خو بینە.

10 **بنڤیسە:** ئەرێ برگەیەکێ قووچەکی هەیە یێ ڕێك ل $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ ئەڤ سیفەتە هەبن.

أ هاوجێ بیت دگەل خالا بنەرەت.

ب دخالا $(1, 0)$ را ببۆریت، بەلگەیان بۆ بەرسڤا خۆ بینە.

11 أ جۆرێ برگەیێ قووچەکی بۆ $xy+2x-y=0$ چییە؟

ب وێ هاوکێشێ بکاربینە دا بهایێ y پێ x بنڤێسی. ئەوێ هاوکێشەیا بدەست تەکەفتی کو y نەخشەیەکا ڕێژەییە پێ x بنوێنە.

ج پۆتانێن دوو خالێن برگەیێ قووچەکی هەژماربکە کوتێدا لێکەفتێ یێ ستوون بیت دگەل ڕاستەهێلێ $y=-2x$

12 **نیشانا AC** دروستیا هەر دەستەواژیەکێ دەربارەی چەماوەیێ $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ بسەلمینە یان دژە نموونەیەکێ بینە بۆ سەلماندنا نەدروستیا دەستەواژەیێ.

أ هەکە $AC>0$ دێ چەماوەبیتە برگەیێ نەتمام.

ب هەکە $AC=0$ دێ چەماوەبیتە برگەیێ هاوتا.

ج هەکە $AC<0$ دێ چەماوەبیتە برگەیێ زێدە.

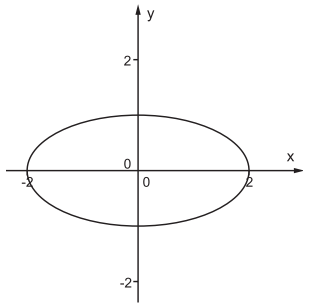
بەرهنگاری «بوتیرۆانێن»

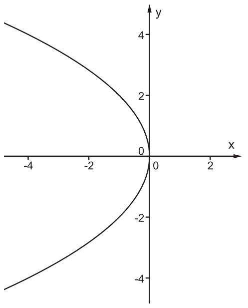
13 **ڕووبەرێ برگەیێ نەتمام** هەکە $B^2-4AC<0$ دێ وێنەیێ ڕۆنکرنێ یێ هاوکێشەیا $Ax^2+Bxy+Cy^2=1$ برگەیێ نەتمام ئەوێ تەوەرێ وێ یێ مەزن $2a$ وتەوەرێ بچووك $2b$ یەکسانە πab بسەلمینەکو ڕووبەرێ برگەیێ نەتمام یەکسانە $\frac{2\pi}{\sqrt{4AC-B^2}}$.

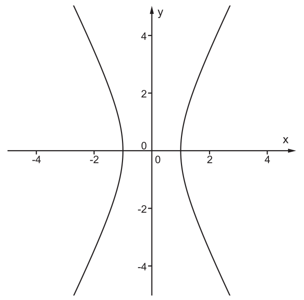
بەشێ 6

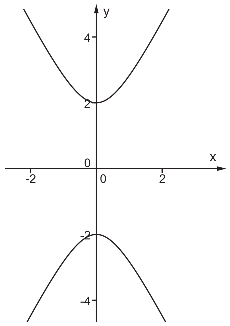
پێداچوونا بەشی

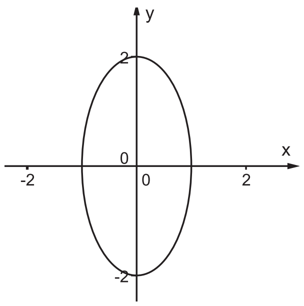
ژ ڕاهێنانا 1 هەتا 6 ، وێنەیێ ڕۆنکرنێ یێ هەرهاوکێشەکێ دیاربکە

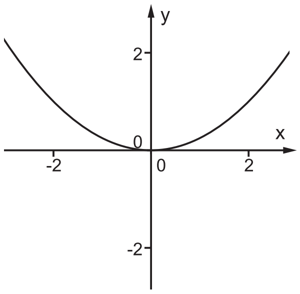
أ


ب


ج


د


ه


و


1 $4x^2+y^2=4$

2 $4x^2-y^2=4$

3 $y^2=-4x$

4 $y^2-4x^2=4$

5 $x^2+4y^2=4$

6 $x^2=4y$

ژ ڕاهێنانا 7 هەتا 10 ، هاوکێشەیێ شێتەل بکە و وێنەیێ ڕونکرنێ یێ وێ بکێشە.

7 $16x^2+16y^2-16x+24y-3=0$

8 $3x^2-2y^2+24x+12y+24=0$

9 $3x^2+2y^2-12x+12y+29=0$

10 $y^2-12y-8x+20=0$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 11 و 12 ، هاوکێشەیا برگەیێ هاوتا بینە دەر.

11 سەر $(0, 2)$ دەلیل $x=-3$

12 سەر $(4, 2)$ تیشکۆ $(4, 0)$

ل هەردوو ڕاهێنانێن 13 و 14 ، هاوکێشەیا برگەیێ نەتمام بینە دەر.

13 هەردوو سەر: $(-3, 0)$ $(7, 0)$
چەق: $(0, 0)$ $(4, 0)$

14 چەق: $(0, 0)$
دوو خالێن $(1, 2)$ و $(2, 0)$ د بۆرێت.

ل هەردوو ڕاهێنانێن 15 و 16 ، هاوکێشەیا برگەیێ زێدە بینەدەر.

15 هەردوو سەر: $(-4, 0)$ و $(4, 0)$
هەردوو تیشکۆ: $(-6, 0)$ و $(6, 0)$

16 هەردوو تیشکۆ: $(0, -8)$ ، $(0, 8)$
هەردوو دەرکنار: $y=-4x$ و $y=4x$.

17 هاوكێشەیا لێكەفتیێ برگەییێ هاوتا $y = x^2 - 2x + 2$ وستوون بیت دگەل ڕاستەهێلێ $y = x - 2$ بینەدەر.

18 هاوكێشەیا لێكەفتی برگەییێ هاوتا $3x^2 + y = x - 6$ وستوون بیت دگەل ڕاستەهێلی $2x + y = 5$ بینەدەر.

19 سێلێن وەرگر: پارچەكا سێلەكا مەزن یا وەرگر ل سەر شێوەییێ برگەییێ هاوتایە، هاوكێشەیا وێ $y = \frac{x^2}{200}$ $-100 \le x \le 100$
نەخشەسازی ئامیرێ وەرگر دانا د تیشكۆیێ برگەیی هاوتا دا. پۆتانێ تیشكۆیێ دیاربكە؟

20 جوداهیا چەقی بۆ هەر برگەیەكی قووچەكی هەژماربكە، وجۆرێ وێ دیاربكە.

أ $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

ب $4x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0$

ج $25x^2 - 10x - 200y - 199 = 0$

د $9x^2 + 9y^2 - 36x + 6y + 34 = 0$

ژ ڕاهێنانا 21 هەتا 24 ، هاوكێشەیا برگەییێ قووچەكی ل سەر شێوەییێ گشتی بنڤیسە.

21 جوداهیا چەقی: 0.7 هەردوو تیشكو: $(0, \pm 2)$

22 هەردووسەر: $(\pm 5, 0)$ جوداهیا چەقی: 1.5

23 برگەی هاوتا: تیشكۆ: $(1, 1)$ سەر: $(0, 1)$

24 برگەی نەتمام: تیشكۆ $(-3, 0)$ دەلیل: $x = -9$،

ژ ڕاهێنان 25 هەتا 28 ، جۆرێ برگەییێ قوچەكی دیاربكە وپێكهاتێن وێ بینەدەر.

25 $16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0$

26 $16x^2 - 25y^2 + 96x - 256 = 0$

27 $4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0$

28 $x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0$

ژ ڕاهێنانێن 29 هەتا 34 ، جوداكەری بكاربینە بۆ دیاركرنا جۆرێ چەماوەییێ هاوكێشەییێ.

29 $3x^2 - 18xy + 27y^2 - 5x + 7y + 4 = 0$

30 $2x^2 - \sqrt{15}xy + 2y^2 + x + y = 0$

31 $2x^2 + 4xy - y^2 - 2x + 3y - 6 = 0$

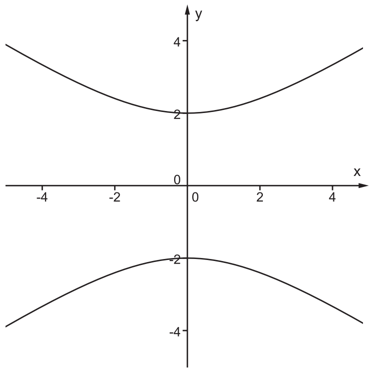
32 $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 10 = 0$

33 $xy + y^2 - 3x - 5 = 0$

34 $3x^2 + 12xy + 12y^2 + 435x - 9y + 72 = 0$

بەشێ 6

بەرهەڤکرن بۆ ئەزموونێ



1 کیژ ڤان دبیتە هاوکێشەیا وێنەیێ بەرامبەر؟

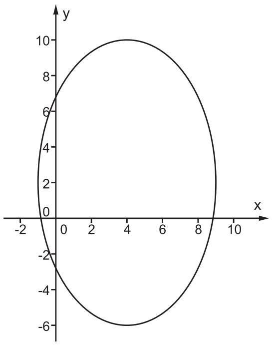
أ $9x^2 - 4y^2 = 36$ ب $4x^2 + 9y^2 = 36$

ج $9y^2 - 4x^2 = 36$ د $9x^2 + 4y^2 = 36$

2 کیژ ڤان خالان دبیتە خالا ئێکودوو برینا هاوکێشەیا $4x^2 + 25y^2 = 100$ دگەل تەوەرێ x ؟

أ $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ ب $(4, 0)$ و $(-4, 0)$.

ج $(5, 0)$ و $(-5, 0)$ د $(10, 0)$ و $(-10, 0)$.



3 کیژ ڤان دبیتە هاوکێشەیا وێنەیێ بەرامبەرە؟

أ $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{64} = 1$ ب $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} = 1$

ج $\frac{(x-1)^2}{20} + \frac{(y-1)^2}{150} = 1$ د $\frac{x^2}{175} + \frac{y^2}{225} = 1$

4 کیژ ڤان برگەیێن زێدە مەزنترین دووری هەیە دناڤبەرا هەردوو تیشکویاندا؟

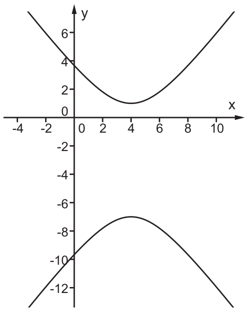
أ $\frac{(x-6)^2}{36} - \frac{(y+2)^2}{81} = 1$ ب $\frac{(x+22)^2}{45} - \frac{(y-36)^2}{125} = 1$

ج $\frac{(y+115)^2}{49} - \frac{(x-225)^2}{100} = 1$ د $\frac{(y-59)^2}{90} - \frac{(x+76)^2}{95} = 1$

5 کیژ ڤان دبیتە هاوکێشەیا دەرکنارێ برگەیێ زێدە $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

أ $y = -\frac{2}{3}x$ ب $y = \frac{3}{2}x$

ج $y = -\frac{9}{4}x$ د $y = \frac{9}{4}x$



6 کیژ ڤان دبیتە هاوکێشەیا وێنەیێ بەرامبەر؟

أ $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+4)^2}{9} = 1$ ب $\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$

ج $\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$ د $\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$

7 درێژیا تەوەرێ بچووك یێ برگەیێ نەتمام $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{121} = 1$ چەندە:

أ 7 ب 11 ج 14 د 22

8 کیژ ڤان برگەیێن هاوتا یێ ڤەکرییە بەرەڤ رەخێ چەپێ؟

أ $16y-4x^2=12$

ب $16y+4x^2=12$

ج $16x-4y^2=12$

د $16x+4y^2=12$

9 کیژ ڤانێن ل خوارێ دبیتە تەوەرێ هاوجێ بۆ برگەیێ هاوتا $x-4=\frac{1}{8}(y+2)^2$ ؟

أ $x=0$ ب $y=-2$ ج $x=4$ د $y=8$

10 کیژ ڤان برگەیێن ل خوارێ دەلیلێ وی دبیتە $y=4$ ؟

أ $y+3=\frac{1}{4}(x-1)^2$

ب $y-5=\frac{1}{4}(x+2)^2$

ج $x-5=\frac{1}{4}(y+4)^2$

د $x+3=\frac{1}{4}(y-2)^2$

11 لێکەفتێ برگەیێ هاوتا $y=ax^2$ ل $x=p$ تەوەرێ x دەبڕیت ل:

أ $x=\frac{p}{2}$ ب $x=\frac{p^2}{2}$ ج $x=\frac{ap}{2}$ د $x=\frac{ap^2}{2}$

12 لارێ لێکەفتێ چەماوەیەکی ل خالا (x, y) یەکسانە $\frac{x}{y}$ بۆ هەر خالەکا ل سەر چەماوەیێ، جۆرێ ڤی چەماوەیێ چییە؟

أ بازنە ب برگەیێ هاوتایە ج برگەیێ نەتمام د برگەیێ زێدەیە

13 کیژ ئەڤێن لخوارێ دبیتە تیشکویێ برگەیێ هاوتا $y^2+4y-8x+36=0$ ؟

أ $(-2, 6)$ ب $(6, -2)$ ج $(2, -2)$ د $(4, -2)$

14 ئەو کیژ چەماوەیە ئەوێ هاوکێشەیا وی $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$ بیت.

أ بازنە ب برگەیێ هاوتا ج برگەیێ نەتمام د برگەیێ زێدە

بەشێ

7

ژمارەیێن ئاوێتە و ئەندازە

Complex Numbers And Geometry

بەشێ حەفتێ

وانە

1–7 شێوەیێن جودا بۆ ژمارەیا ئاوێتە

2–7 ژمارەیێن ئاوێتە و ئەندازە

پێداچوون

بەرهەڤکرن بۆ ئەزموونێ

شێوەیێن پەیدابووین

شێوەیێن پەیدابووین ئەو شێوەنە کو پەیدا دبن ل دویڤ ئێك، دەستپێکرن ژ خالەکا دیارکری یان ژ شێوەیەکێ دیارکری.

ژمارەیێن ئاوێتە بکاردئینن بۆ پێکئینانا شێوەیێن پەیدابووین وەك ئەوی شێوەیێ ل وێنەی دیارکری.

ئەرێ تو یێ ئامادەیی؟

زاراڤ

1 هەر دەستەواژەیەکا ل ستوینا ڕەخێ ڕاستێ دگەل شرۆڤکرنا وێ ل ستوونا ڕەخێ چەپێ گرێدە:

1. ژمارەیا ئاوێتە	أ. ژمارەیەکە ل سەر شێوەیێ $\frac{a}{b}$ دنڤیسن، کو a ، b دوو ژمارەیێن تەواون و $b \neq 0$.
2. ڕاکێشان	ب. ژمارەکە ل سەر شێوەیێ $A(x, y)$ و دگۆهوریت بۆ $A'(kx, ky)$.
3. وێنەدانەوە	ج. ژمارەیەکە ل سەر شێوەیێ $a + ib$ ، کو a ، b ژمارەیێن ڕاستینە و $i^2 = -1$.
ل دۆر ڕاستەهێلەکی	د. جهگوهۆڕکەکا ئەندازەییە، هەموو خالێن ڕووتەختی ب هەمان دووری و ب هەمان ئاراستەی ڕادکێشیت.
4. ژمارەیا ڕێژەی	
5. هاوڕێژەیا	هـ. دوورییە ل ناڤبەرا خالەکێ ل سەر تەوەرێ ژماران و خالا بنەڕەت.
ئەندازەیی	و. جهگوهۆڕکەکا ئەندازەییە، هەر خالەکێ وەك A دگوهۆڕیت بۆ خالا A' ب مەرجەکی $\overline{AA'}$ تەوەرێ ڕاستەهێلی بیت.

جهگوهۆڕکێن ئەندازەیی

ژ ڕاهێنانا 2 هەتا 9 ، پۆتانێ وێنەیێ خالا $A(1, 1)$ دیار بکە ب جهگوهۆڕکا دیارکری:

2 وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ x .

3 وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ y .

4 وێنەدانەوە ل دۆر ڕاستەهێلێ $y = x$.

5 ڕاکێشان ب ئاڕاستەبرێ $\vec{u}\,\langle 2, -3\rangle$

6 هاوڕێژەیەکا ئەندازەی چەقێ وێ خالا بنەڕەت و ڕێژەیا وێ $\frac{1}{2}$ بیت.

7 دەوردان ل دۆر خالا بنەڕەت ب گۆشەیا 135°.

8 دەوردان ل دۆر خالا بنەڕەت ب گۆشەیا -90° .

9 وێنەدانەوە ل دۆر ڕاستەهێلێ $x = 2$ پاشی دەوردان ل دۆر خالا بنەڕەت ب گۆشەیا 90° .

هاوکێشەیێن دووجایی

ژ ڕاهێنانا 10 هەتا 13 ، جۆرێ ڕەگێن هاوکێشەیا دووجایی و ژمارا وان دیار بکە.

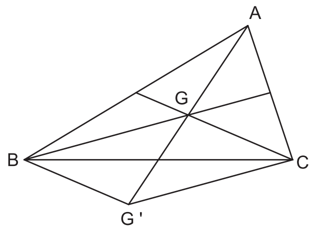
10 $2x^2 + 5x - 9 = 0$

11 $x^2 + x + 1 = 0$

12 $-3x^2 + 5x - 11 = 0$

13 $2x^2 + 8x + 8 = 0$

ئاراستەبڕ



14 ل وێنەیێ بەرامبەر، G خالا ئێکودووبڕینا ناڤەڕاستێن سێگۆشەیا ABC دنوێنیت، و G' دبیتە وێنەیێ G ب وێنەدانەوە ل دۆر ناڤەڕاستێ $\overline{BC}$. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ هەژمار بکە.

1–7 شێوەیێن جودا بۆ ژمارەیا ئاوێتە

Various Forms of a Complex Number

ئارمانج

- هەژمارکرنا ڕووتێ ژمارەیە ئاوێتە و گۆشەیا جەمسەری.
- نڤیسینا ژمارەیا ئاوێتە ل سەر شێوەیێ جەبری و سێگۆشەی و جەمسەری.

زاراڤ

Vocabulary

بەهایێ ڕووتێ Value Absolute

گۆشەیا جەمسەری Argument

شێوەیێ جەبری Algebraic Form

شێوەیێ سێگۆشەیی Trigonometric Form

شێوەیێ جەمسەری Polar Form

تو ل پۆلا یازدێ فێربوویی کو شیکارکرنا هاوکێشەیێن دووجایی خودان جوداکەرێ سالب پێدڤی ب جۆرەکێ نوییێ ژماران هەیە، ئەو **ژمارەیێن ئاوێتەنە**. هەروەسا تو فێربوویی کو ژمارەیەکا ئاوێتە ل سەر شێوەیێ $z = x + iy$ ب رێیەکا بتنێ دهێتە نڤیسین، کو x و y دوو ژمارەیێن ڕاستینە و i ژمارەیەکا خەیالییە $i^2 = -1$ ساخ دکەت.

ژ ڤێ دەرئەنجام دکەین کو هەر ژمارەیەکا ئاوێتە $z = x + iy$ جووتەکێ ڕێکخستی وەک (x, y) دیار دکەت کو ژ دوو ژمارەیێن ڕاستی پێکدهێت، و ب خالەکێ د ڕووتەختێ پۆتانێ دا وەک $M(x, y)$ دهێتە نواندن. دبێژنە ڤێ خالێ خالا ژمارەیا ئاوێتە z و دنڤیسین M_z. ل ڕەخەکێ دی هەر خالەک د ڕووتەختێ پۆتانێ دا وەک $A(a, b)$ جۆتەکێ ڕێکخستی (a, b) پێکهاتی ژ دوو ژمارەیێن ڕاستی دیار دکەت و ئەو ژمارەیا ئاوێتە $u = a + ib$ پێکدئینن، و دبێژنە ڤێ ژمارەیێ ژمارەیا خالا ئاوێتە A، و ل سەر شێوەیێ z_A دنڤیسین.

شێوەیێ جەبری

شێوەیێ جەبری بۆ ژمارەیا ئاوێتە z ب شێوەیێ $z = x + iy$ دنڤیسین، x و y دوو ژمارەیێن ڕاستینە و i ژمارەیەکا خەیالییە ئەڤێ $i^2 = -1$ ساخ دکەت. تو ل پۆلا یازدێ فێربوویی کو ژمارەیا ئاوێتە z ب ڤی شێوەیێ بتنێ ب ئێک ڕێکێ دهێتە نڤیسین. دبێژنە ژمارەیا ڕاستی x **بەشێ ڕاستی بۆ** z و دنڤیسن $R(z)$، و دبێژنە ژمارەیا ڕاستی y **بەشێ خەیالی بۆ** z و دنڤیسین $I(z)$.

هەر ژمارەیەکا ئاوێتە $z = a + ib$ ژمارەیەکا ئاولێ هەیە $\bar{z} = a - ib$ ($\bar{z}$ **ئاولێ ژمارەیە ئاوێتە** z)ە.
بەرێ خۆ بدێ کو هەردوو ژمارەیان z و $\bar{z}$ هەمان بەشێ ڕاستی هەنە ئانکو $R(\bar{z}) = R(z)$، و نیشانێن هەردوو بەشێن خەیالی بەرۆڤاژی ئێکودوونە ئانکو $I(\bar{z}) = -I(z)$.

نموونــــە 1 دیارکرنا بەشێ ڕاستی و بەشێ خەیالی بۆ ژمارەیا ئاوێتە

ژمارەیا ئاوێتە $z = \dfrac{1-2i}{1+2i}$ ل سەر شێوەیێ جەبری بنڤیسە، و بەشێ ڕاستی و بەشێ خەیالی دیاربکە.

شیکار

$$z = \frac{1-2i}{1+2i} = \frac{(1-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$ سەرەیی و ژێرەیی دگەل ئاولێ ژێرەیێ لێکبدە دا ژ i ل ژێرەیی ڕزگاربی.

$$z = \frac{1-2i-2i+4i^2}{1-4i^2} = \frac{1-4i-4}{1+4} = \frac{-3-4i}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

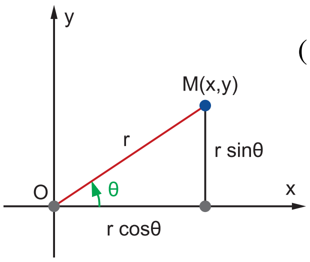
بەشێ ڕاستی z دبیتە $R(z) = -\frac{3}{5}$ و بەشێ خەیالی $I(z) = -\frac{4}{5}$.

خالا چاڤدێرییێ

1. ژمارەیا $z = (2-3i)(5i-4)\big(-7(i-1)\big)$ ل سەر شێوەیێ جەبری بنڤیسە، و بەشێ ڕاستی و خەیالی دیار بکە.

ل گەل شێوەیێ جەبری، ژمارەیا ئاوێتە شێوەیێ سێگۆشەی و شێوەیێ جەمسەری هەیە، و ئەو بکاردئینن بۆ شیکارکرنا گەلەک پرسیاران ب ڕێکێن کورت.

شێوەیێ سێگۆشەیی



ل وێنەیێ بەرامبەر، خالا M خالا ژمارەییا ئاوێتەیە $z = x + iy$ ، $(z \neq 0)$ ئەڤ خالە ژمارەیەکا مووجەب r دیار دکەت، ئەو دبیتە دووری ل ناڤبەرا وی خالێ M و خالا بنەرەت 0 . و هەروەسا ئەڤ خالە ژمارەیەکا دی یا مووجەب دیار دکەت ئەو دبیتە پیڤانا گۆشەیا ئاراستەکری θ (ب رادەیان) ئەوا ئاراستەبرێ OM دگەل بەشێ مووجەبێ تەوەرێ x پێکدئینیت. دبێژنە ژمارەیا ئێکێ رووتێ ژمارەیا ئاوێتە، و هێمایێ $|z|$ بۆ وی بکاردئینن. و دبێژنە ژمارەیا دووێ گۆشەیەکا جەمسەری بۆ ژمارەیا ئاوێتە و هێمایێ $\arg(z)$ بۆ وی بکاردئینن.
تێبینی بکە کو بەهایێ رووتێ ژمارەیا ئاوێتە یێ دیارکرییە بێی ئالۆز، بەلێ دیارکرنا گۆشەیا جەمسەری هندەک ئالۆزەیان دیار دکەت. بۆ نموونە: هەکەر $\frac{\pi}{3}$ پیڤانا گۆشەیەکا جەمسەری بیت بۆ ژمارەیا ئاوێتە z ، دێ $\frac{\pi}{3}+2n\pi$ (کو n ژمارەیەکا تەواوە) بیتە پیڤانەکا دی بۆ z . و ئەڤە رامانا وێ ئەوە، ئەم بەحسێ گۆشەیەکا جەمسەری بۆ ژمارەیا ئاوێتە بکەین، و نە بەحسێ گۆشەیا جەمسەری بکەین بۆ ژمارەیا ئاوێتە.

هەکە تو ڤەگەرییە شێوەیێ ل سەری، تو دشێی بنڤیسی $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ و ل دوماهیێ $z = x+iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

شێوەیێ سێگۆشەی بۆ ژمارەیا ئاوێتە

شێوەیێ سێگۆشەی بۆ ژمارەیا ئاوێتە $z = x+iy$ $(z\neq 0)$ دبیتە $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
کو $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

نموونــــە 2

نڤیسینا ژمارەیا ئاوێتە ل سەر شێوەیێ سێگۆشەیی

ژمارەیا $z = 2+2\sqrt{3}i$ ل سەر شێوەیێ سێگۆشەیی بنڤیسە.

شیکار

دەست ب هەژمارکرنا رووتێ ژمارەیێ بکە.

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$$

گۆشەیەکا جەمسەری هەژماربکە.

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt3}{2} = \sqrt3$ ، $\theta = \frac{\pi}{3}+2k\pi$، چونکی خالا M_z دکەڤیتە چارێکێ ئێکێ ل رووتەختێ پۆتانێ.

شێوەیێ سێگۆشەی بۆ ژمارەیا ئاوێتە z دبیتە $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

خالا چاڤدێریێ

2. ژمارەیا ئاوێتە $z = 2\sqrt3+2i$ ل سەر شێوەیێ سێگۆشەی بنڤیسە.

شێوەیێ سێیێ بۆ نڤیسینا ژمارەیا ئاوێتە شێوەیێ جەمسەرییە (و هندەک جاران دبێژنێ شێوەیێ توانی).

شێوەیێ جەمسەری

ئەوێن د بوارێ بیرکارییێ دا کار دکەن، $e^{i\theta}$ ب ڤی شێوەی دنڤیسن $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ، و ئەڤەژی رێکێ ددەت کو ژمارەیا ئاوێتە $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ل سەر شێوەیێ $z = re^{i\theta}$ بنڤیسن، دبێژنە ڤێ نڤیسینێ **شێوەیێ جەمسەری** بۆ ژمارەیا ئاوێتە z . چێدبیت تو پرسیار بکەی دەربارەی پەیوەندییێ ل ناڤبەرا $e^{i(\theta+\theta')}$ و هەر ئێکێ $e^{i\theta}$ و $e^{i\theta'}$.

ئەرێ ئەڤ پەیوەندییە $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ یا دروستە وەك ل هێزان $a^{x+y} = a^x a^y$؟

بەرسڤ بۆ ڤێ پرسیارێ «بەلێیە» ، و تو دشێی بڤی شێوەی بسەلمینی:

$$\begin{aligned}
e^{i\theta}e^{i\theta'} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\
&= \cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' + i^2\sin\theta\sin\theta' \\
&= \cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\
&= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\
&= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = e^{i(\theta+\theta')}
\end{aligned}$$

شێوەیێ جەمسەری بۆ ژمارەیا ئاوێتە

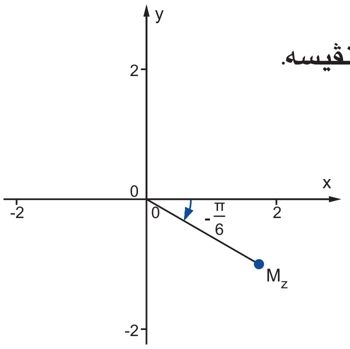
شێوەیێ جەمسەری بۆ ژمارەیا ئاوێتە $z = x + iy$ $(z \neq 0)$ دبیتە $z = re^{i\theta}$

دەمێ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

نموونە 3

نڤیسینا ژمارەیا ئاوێتە ل سەر شێوەیێ جەمسەری

ژمارەیا ئاوێتە $z = \sqrt{3} - i$ ل سەر شێوەیێ جەمسەری بنڤیسە.



شیکار

ل دەستپێکێ رووتێ ژمارێ هەژمار بکە.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

گۆشەیەکا جەمسەری هەژماربکە.

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ، $\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ چونکی خالا M_z دکەڤیتە د چارێکێ چارێ دا ل رووتەختێ پۆتانێ.

شێوەیێ جەمسەری بۆ ژمارەیا ئاوێتە z دبیتە $z = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

خالا چاڤدێرییێ

3. ژمارەیا ئاوێتە $z = -2 + 2i$ ل سەر شێوەیێ جەمسەری بنڤیسە.

سیفەتێن بەهایێ رووت و گۆشەیا جەمسەری بۆ ژمارەیا ئاوێتە

أ $|z| \geq 0$ و $|z| = 0$ هەکە وبتنێ هەکە $z = 0$ ب $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ و $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

ج $|-z| = |z|$ و $|\bar{z}| = |z|$. د $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

أ $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$ ب $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi$

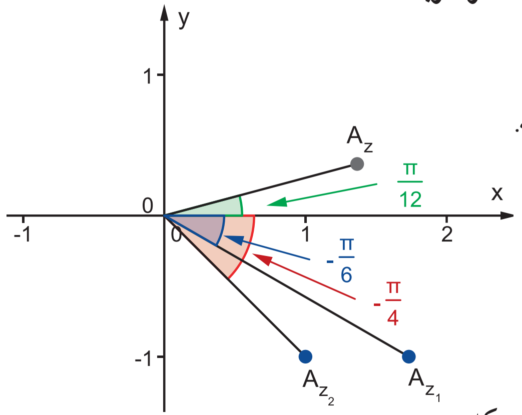
ج $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$ د $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$

نموونـــــه 4 بكارئينانا سيفەتێن بەهايێ ڕووت و گۆشەيا جەمسەرى

بەهايێ ڕووت و گۆشەيا جەمسەرى بۆ هەر ژمارەيەكا ئاويتە ديار بكە.

أ $z_1 = \sqrt{3} - i$ ب $z_2 = 1 - i$ ج $z = \frac{z_1}{z_2}$

پاشى بەهايێ هەر ئێكى ژ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ هەژماربكە.



شيكار

بەهايێ ڕووت بۆ هەر ژمارەيەكێ هەژماربكە.

$$|z_1| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

گۆشەيا جەمسەرى بۆ هەر ژمارەيەكێ هەژماربكە.

$\tan\theta_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \arg(z_1) = \theta_1 = -\frac{\pi}{6} + 2m\pi$ چونكى خالا z_1 دكەڤيتە د چارێكێ چارێدا.

$\tan\theta_2 = -1 \Rightarrow \arg(z_2) = \theta_2 = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$ چونكى خالا z_2 دكەڤيتە د چارێكێ چارێدا.

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = -\frac{\pi}{6} + 2m\pi - \left(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) = \frac{\pi}{12} + 2(m-n)\pi$$

ژمارەيا ئاويتە z ل سەر ڤى شێوەيى دهێتە نڤيسين: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

بۆ هەژماركرنا بەهايێ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$، ژمارە z ل سەر شێوەيێ جەبرى بنڤيسە.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \frac{\left(\sqrt{3}-i\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{3}+1+\left(\sqrt{3}-1\right)i}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i = z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}$$

ڤێجا، $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

خالا چاڤدێرىێ

4. بەهايێ ڕووت و گۆشەيا جەمسەرى بۆ هەر ژمارەيەكا ئاويتە هەژمار بكە.

أ $z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ ب $z_2 = 1 + i$ ج $z = \frac{z_1}{z_2}$

پاشى بەهايێ هەر ئێكى ژ $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$ هەژمار بكە.

سەلمێنراوا 1-7 De Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

ڤێ سەلمێنراوێ مفايەكێ مەزن هەيە بۆ سادەكرنا هندەك ژ بڕەيێن جەبرى. هەروەسا ئەڤ سەلمێنراوە ل سێگۆشەزانێ بكاردهێت چونكى ئەو هاريكاريێ دكەت بۆ سەلماندنا گەلەك هاوئەنجامان.

نموونـــه 5

بجهئینان ل سەر سێگۆشەزانێ

برێ $\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^4$ ل سەر سادەترین شێوە بنڤیسە.

شیکار

$$\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^4=\cos 4\frac{\pi}{12}+i\sin 4\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

خالا چاڤدێریێ

5. برێ $\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)^6$ ل سەر سادەترین شێوە بنڤیسە.

نموونـــه 6

دیارکرنا هاوئەنجامێن سێگۆشەیی

دوو هاوئەنجامان بۆ نڤیسینا $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ پێ $\cos\theta$ و $\sin\theta$ دیار بکە.

شیکار

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3\cos^2\theta(i\sin\theta)+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3$$
$$=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta$$

بەلێ

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

ل دووڤ سەلمێنراوا De Moivre ڤێجا:

$$\cos 3\theta+i\sin 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$$

و دێ:

$$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta \quad \text{و} \quad \cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$$

خالا چاڤدێریێ

6. دوو هاوئەنجامان بۆ نڤیسینا $\cos 2\theta$ و $\sin 2\theta$ پێ $\cos\theta$ و $\sin\theta$ دیار بکە.

ڕەگێن ئێکێ

تو دزانی ئێکێ دوو ڕەگێن دووجای هەنە، 1 و -1 . و ئێکێ ئێك ڕەگێ سێجای هەیە ئەو دبیتە 1، و ئەڤە یا دروستە بۆ کۆمەلا ژمارەیێن ڕاستی، بەلێ هەکە تو بەرفرەه بکەی بۆ کۆمەلا ژمارەیێن ئاوێتە، دێ بینی کو ژمارە ئێك سێ ڕەگێن سێجایی هەنە.

ڕەگێن ئێکێ

دبێژن ژمارەیا ئاوێتە $z=re^{i\theta}$ ڕەگێ ئێکێیە ل پلەیا n ، n ژمارەیەکا تەواوە مووجەبە، هەکە ڤێ $z^n=1$ ساخ بکەت.

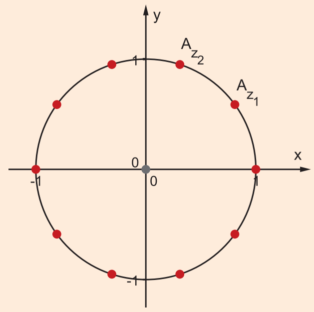
هەکە هاوکێشەیا $z^n=1$ بنڤیسی، بکارئینانا شێوەیێ جەمسەری بۆ هەردوو ژمارەیان z و ۱ دێ ئەڤە بدەست تە کەڤیت $z^n=r^ne^{in\theta}=1=1\times e^{i\times 0}$.

و ئەڤە دەرئەنجام دبیت $\begin{cases} r^n=1 \\ n\theta=0+2k\pi \end{cases}$ پاشی دێ $\begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{2k\pi}{n} \end{cases}$

هەر بەهایەکی بدەیە k دێ ڕەگەك ل پلەیا n دیار بیت.

سەلمێنراوا 7-2 — **ڕەگێن ئێکێ**

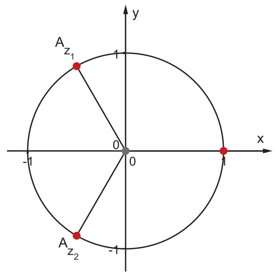
هەکە n هەر ژمارەیەکا تەواوە مووجەب بیت، دێ ژمارە ئێك n ڕەگ ل پلەیا n هەبن. ئەڤ ڕەگەنە سەرێن چەند لایەکی ڕێك پێکدئینن، و هەموو دکەڤنە سەر بازنەیا یەکەیێ.



نموونە 7

ڕەگێن سێجایی بۆ ژمارە ئێك

ڕەگێن سێجایی بۆ ژمارە ئێك هەژماربکە، و خالێن وان د ڕووتەختێ پۆتانی دا دیار بکە.



شیکار

ژمارە ئێك سێ ڕەگێن سێجای هەنە، و ئەڤەنە:

$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ و $z_3 = e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1$.

ئەوێن ل بوارێ بیرکاریێ کار دکەن، هێمایەکێ تایبەت j بۆ ڕەگێ سێجایی $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ بکاردئینن.

تو دشێی ب ساناهی دیار بکەی کو $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2 = \bar{j}$.

خالا چاڤدێریێ

7. ڕەگێن ژمارە ئێك ل پلەیا 4 هەژمار بکە، و خالێن وان د ڕووتەختێ پۆتانی دا دیار بکە.

7–1 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا 1 هەتا 12 ، ژمارەیا ئاوێتە ل سەر شێوەیێ جەبری بنڤیسە.

1. $(1+i)^2$
2. $(1-i)^2$
3. $(1+3i)^2$
4. $(1-3i)^2$
5. $(1+i)^3$
6. $(1-i)^3$
7. $(3+4i)(3-4i)$
8. $(3+2i)^3$
9. $\frac{i-5}{3+5i}$
10. $\frac{3+i}{2-i}+\frac{2-i}{3+i}$
11. $\frac{i-4}{2+5i}+\frac{2+3i}{1-i}$
12. $\frac{4+5i}{2-i}+\frac{1-3i}{1+i}$

ژ ڕاهێنانا 13 هەتا 20 ، ژمارەیا ئاوێتە ل سەر شێوەیێ سێگۆشەیی و شێوەیێ جەمسەری بنڤیسە.

13. $z = 1+i$
14. $z = 1-i$
15. $z = i$
16. $z = 9i$
17. $z = -6$
18. $z = 8$
19. $z = 1+i\sqrt{3}$
20. $z = 1-i\sqrt{3}$

ژ ڕاهێنانا 21 هەتا 25 ، ژمارەیا ئاوێتە ل سەر شێوەی جەمسەری بنڤیسە، بۆ زانین $z = re^{i\theta}$.

21 $\frac{1}{z}$ **22** $\overline{z}$ **23** iz **24** z^3 **25** $\frac{ie^{i\alpha}}{z^2}$

26 هەر ژمارەیەکا ئاوێتە ل سەر شێوەیێ جەمسەری بنڤیسە.

أ $z = \left(1-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$ ب $z = 1+\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}$

27 بسەلمینە کو: $|-z| = |z|$ و $|\overline{z}| = |z|$.

28 بسەلمینە کو: $|z|^2 = z\overline{z}$ ، ڤێ ئەنجامێ بکاربینە دا بسەلمینی کو: $|zz'| = |z||z'|$

29 بسەلمینە کو: $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

30 بسەلمینە کو: $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

31 وان ژمارەیێن ئاوێتە z هەژماربکە ئەوێن ڤێ ساخ دکەن: $|1+z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z|$.

32 وان ژمارەیێن ئاوێتە z هەژماربکە ئەوێن ڤێ ساخ دکەن: $|1-z| = |\overline{z}| = \left|z^2\right|$.

ژ ڕاهێنانا 33 هەتا 36 ، هەر ژمارەیەکا ئاوێتە ل سەر شێوەیێ سێگۆشەیی بنڤیسە دەمێ:

33 $z = \sin\alpha + i\cos\alpha$ **34** $z = \cos\alpha - i\sin\alpha$

35 $z = -\cos\alpha - i\sin\alpha$ **36** $z = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}$

37 بەرسڤا ئەڤێن ل خوارێ بدە هەکە بزانی کو: $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

أ j ل سەر شێوەیێ جەمسەری بنڤیسە، و دەرئەنجام بکە کو ئەڤ ژمارەیا ئاوێتە دبیتە ڕەگێ سێچایی بۆ ژمارە ئێك.

ب j^2 هەژمار بکە، و دیار بکە کو ئەو ڕەگێ سێجایی یێ نەڕاستییە بۆ ژمارە ئێك، و یێ جودایە ژ j .

ج دیار بکە کو $j^{3m} = 1$ و $j^{3m+1} = j$ و $j^{3m+2} = j^2 = \overline{j}$ و $1 + j + j^2 = 0$.

دەربارەی چەمکان

38 لدویڤ ڕاوبۆچوونا تە ژمارە ئێك چەند ڕەگ ژ پلە n هەنە؟ ڕوون بکە.

2-7

ژمارەیێن ئاویتە و ئەندازە
Complex Numbers and Geometry

ئارمانج

- کرداران ل سەر ژمارەیێن ئاوێتە ب ئەندازەیی ڕۆن دکەن.
- پرسیارەکا ئەندازەیی شیکار دکەن بکارئینانا ژمارەیێن ئاوێتە.

زاراڤ
Vocabulary

ژمارەیا خالێ
Affix of the point

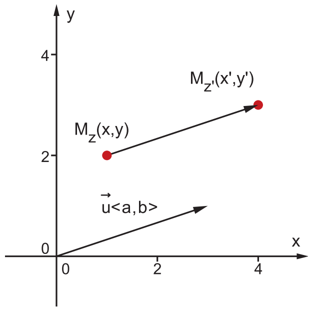
خالا ژمارەیا ئاوێتە
Point of the complex number

ژمارەیا ئاراستەبری
Affix of the vector

ئاراستەبرێ ژمارەیا ئاوێتە
Vector of the complex number

شێوەیێ ئاوێتە Complex form

تو ل وانەیا بۆری فێربوویی کو بەرامبەر یەك هەیە ل ناڤبەرا خالێن ڕووتەختی و ژمارەیێن ئاوێتە، هەر خالەك وەك $M(x,\ y)$ بتنێ ئێك ژمارەیا ئاوێتە $z_M = x + iy$ دیار دکەت ئەو دبیتە ژمارەیا خالا $M(x,\ y)$، و هەر ژمارەیەکا ئاوێتە $z = x + iy$ بتنێ خالا $M_z(x,\ y)$ دیار دکەت، دبێژنێ خالا ژمارەیا ئاوێتە $z = x + iy$. ل ڕەخەکێ دی هەر ئاراستەبرەك وەك $u\langle a,\ b\rangle$ ژمارەیەکا ئاوێتە $z_{\vec{u}} = a + ib$ دیار دکەت، دبێژنێ ژمارەیا ئاراستەبری، و هەروەسا هەر ژمارەیەکا ئاوێتە $z = p + iq$ ئاراستەبرەکی وەك $\vec{v}_z\langle p,\ q\rangle$ دیار دکەت، دبێژنێ ئاراستەبرێ ژمارەیا ئاوێتە $z = p + iq$. بەرامبەریا ل ناڤبەرا ژمارەیێن ئاوێتە ل ڕەخەکی، و خالێن ڕووتەختی و ئاراستەبرێن وان ل ڕەخەکێ دی، هاریکاریێ دکەت، بۆ ئەنجامدانا کرداران ل سەر ژمارەیێن ئاوێتە ب ئەندازەیی. هەروەسا ڕێکێ ددەت بۆ دەربڕینا بارەیێن ئەندازەیی ب جەبری. تو دێ فێری ڤێ بی ل ڤێ وانەیێ.



کۆمکرنا ژمارەیێن ئاوێتە

بلا $u = a + ib$ ژمارەیەکا ئاوێتە بیت و $\vec{u}\langle a,\ b\rangle$ ئاراستەبرێ وی بیت. هەکە تو u دگەل ژمارەیا ئاوێتە $z = x + iy$ کۆم بکەی، دێ ژمارەیەکا ئاوێتە بدەست تە کەڤیت.

$$z' = z + u = (x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i(y + b)$$

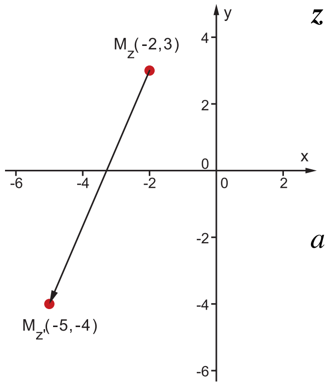
هەکە $M(x,\ y)$ خالا ژمارەیا ئاوێتە z بیت و $M'(x',\ y')$ خالا ژمارەیا ئاوێتە z' بیت دێ بیت، $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ ئەڤە دسەلمینیت کو M'، وێنەیە بۆ خالا M ب ڕاکێشانا ئاراستەبرێ $\vec{u}\langle a,\ b\rangle$.

> **ڕۆنکرنا ئەندازەیی بۆ کۆمکرنا ژمارەیێن ئاوێتە**
>
> کۆمکرنا ژمارەیا ئاوێتە u دگەل ژمارەیا ئاوێتە z خالا ژمارەیا z دگوهۆڕیت ب ڕاکێشانا ئاراستەبرێ $\vec{u}$.

نموونە 1

دیارکرنا ئاراستەبرێ ڕاکێشانێ

ئاراستەبرێ ڕاکێشانێ ئەوێ خالا ژمارەیا ئاوێتە $z = -2 + 3i$ دگوهۆڕیت بۆ خالا ژمارەیا ئاوێتە $z' = -5 - 4i$ دیاربکە.



شیکار

هەکەر $\vec{u}\langle a,\ b\rangle$ ئاراستەبرێ ڕاکێشانێ ئەوێ M_z بۆ $M_{z'}$، دگوهۆڕیت دێ $\begin{cases} -5 = (-2) + a \\ -4 = (3) + b \end{cases}$ و ئەڤە وێ دیار دکەت کو $a = -3$ و $b = -7$.

ئاراستەبرێ $\vec{u}\langle a,\ b\rangle$ دبیتە $\vec{u}\langle -3,\ -7\rangle$.

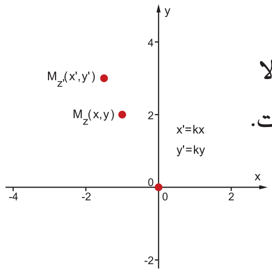
خالا چاڤدێرییێ

1. ئاراستەبرێ ڕاکێشانێ ئەوێ خالا ژمارەیا ئاوێتە $z=6-2i$ دگوهۆڕیت بۆ خالا ژمارەیا ئاوێتە $z'=6+4i$ دیار بکە.

لێکدانا ژمارەیەکا ئاوێتە دگەل ژمارەیەکا ڕاستی

بلا $z=x+iy$ ژمارەیەکا ئاوێتە بیت و k ژمارەیەکا ڕاستی بیت، هەکە z لێکبدەی دگەل k ، دێ ئەڤ ژمارەیا ئاوێتە بدەست تە کەڤیت: $z'=kz=k(x+iy)=(kx)+i(ky)$

هەکە $M_z(x,y)$ خالا ژمارەیا ئاوێتە z بیت و $M'_{z'}(x',y')$ خالا ژمارەیا ئاوێتە z' بیت، دێ:



$$\begin{cases} x'=kx \\ y'=kx \end{cases}$$

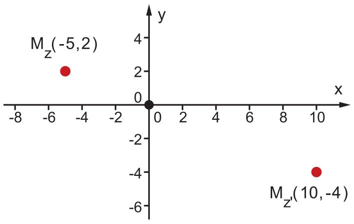
ئەڤە دسەلمینیت کو خالا $M'_{z'}$ دبیتە وێنەیێ خالا M_z ب هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی چەقێ وێ خالا بنەڕەت بیت و ڕێژا وێ k بیت.

ڕۆنکرنا ئەندازەیی بۆ لێکدانا ژمارەیەکا ئاوێتە دگەل ژمارەیەکا ڕاستی

لێکدانا ژمارەیا ئاوێتە z دگەل ژمارەیەکا ڕاستیێ k خالا ژمارەیا z دگوهۆڕیت ب هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی سەنتەرێ وێ خالا بنەڕەت بیت و ڕێژەیا وێ k بیت.

نموونە 2

هەژمارکرنا ڕێژەیا هاوڕێژەیا ئەندازەیی



ڕێژەیا هاوڕێژەیا ئەندازەیی سەنتەرێ وێ خالا بنەڕەت بیت و خالا ژمارەیا ئاوێتە $z=-5+2i$ دگوهۆڕیت بۆ خالا ژمارەیا ئاوێتە $z'=10-4i$ هەژمار بکە.

شیکار

هەکە $M_z(x,y)$خالا ژمارەیا ئاوێتە z بیت و $M'_{z'}(x',y')$ خالا ژمارەیا ئاوێتە z' بیت، و هەکە ژمارەیا ڕاستی k ڕێژەیا هاوڕێژەیا ئەندازەی چەقێ وێ خالا بنەڕەت بیت و M_z بۆ $M'_{z'}$ بگوهۆڕیت، دێ:

$$\begin{cases} 10=k(-5) \\ -4=k(2) \end{cases}$$

ژ ئەڤێ دیار دبیت کو $k=-2$.

خالا چاڤدێرییێ

2. ڕێژەیا هاوڕێژەیا ئەندازەیی چەقێ وێ خالا بنەڕەت بیت وخالا ژمارەیا ئاوێتە $z=6-2i$ بۆ خالا ژمارەیا ئاوێتە $z'=3-i$ دگوهۆڕیت هەژمار بکە.

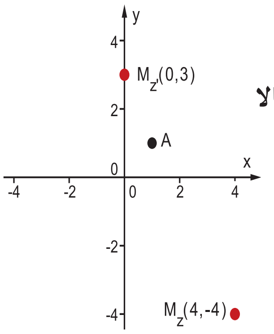
پشتبەستن ب ئەڤا بۆری، گوهۆڕینا خالا M ب هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی چەقێ وێ خالا بنەڕەت بیت و ڕێژەیا وێ ژمارەیا ڕاستی k بیت، ڤەدگەڕیت بۆ لێکدا z_M ، ئانکو ژمارەیا خالا M دگەل ژمارەیا ڕاستی k و دیارکرنا خالا ژمارەیا ئاوێتە $z'=kz$. دبێژنە $z'=kz$ **شێوەیێ ئاوێتە** بۆ ڤێ هاوڕێژەیا ئەندازەی. شێوەیێ ئاوێتە بۆ هاوڕێژەیەکا ئەندازەی چەقێ وێ خالا A و ڕێژەیا وێ ژمارەیا ڕاستی k بیت چییە؟

نڤیسینا ئاوێتە بۆ هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی

نڤیسینا ئاوێتە بۆ هاوڕێژەیا ئەندازەیی چەقێ وێ خالا A و ڕێژەیا وێ ژمارەیا ڕاستی k بیت دبیتە $z'-a=k(z-a)$ دەمێ $a=z_A$ ژمارەیا ئاوێتە بیت بۆ خالا A .

نموونــــه 3

دیارکرنا وێنەیێ خالەکێ ب هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی



وێنەیێ خالا $M(3,-3)$ ب هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی چەقێ وێ خالا $A(1,1)$ بیت و ڕێژەیا وێ ژمارەیا ڕاستی $-\frac{1}{2}$ بیت دیاربکە.

شیکار

هەکە $a = z_A = 1+i$ و $m = z_M = 3-3i$ وێنەیێ M' وێنەیێ M بیت

ب هاوڕێژەیا ئەندازەیی و $m' = z_M$ دێ $m' - a = -\frac{1}{2}(m-a)$

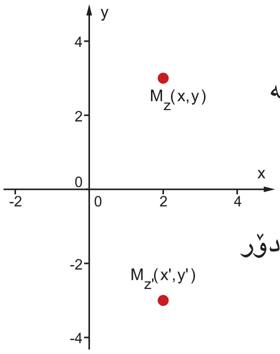
$$m' = -\frac{1}{2}(m-a)+a = -\frac{1}{2}\big(3-3i-(1+i)\big)+(1+i) = 3i$$

وێنەیێ خالا $M(3,-3)$ ب هاوڕێژەیا ئەندازەیی دبیتە خالا $M'(0,3)$.

خالا چاڤدێریێ

3. وێنەیێ پێشتر ل سەری بکاربینە: وێنەیێ خالا $M(4,-4)$ ب هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی چەقێ وێ خالا $A(-1,-1)$ بیت و ڕێژەیا وێ ژمارەیا ڕاستی $-\frac{1}{4}$ بیت دیاربکە.

ژمارەیا ئاوڵێ



ژمارەیا ئاوڵێ بۆ ژمارەیا $z = x+iy$ دبیتە ژمارەیا ئاوڵ $\bar{z} = x-iy$. هەکە $M_z(x,y)$ خالا ژمارەیا ئاوێتە z بیت و $M_{z'}(x',y')$ خالا ژمارەیا ئاوڵ $\bar{z}$ بیت، دێ:

ئەوا $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ ئەڤە دسەلمینیت کو $M_{z'}$ دبیتە وێنەیێ M_z ب وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ x.

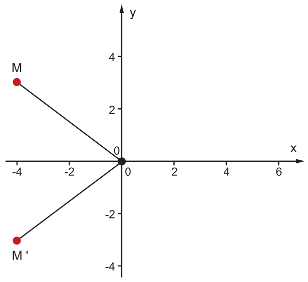
ڕۆنکرنا ئەندازەیی بۆ ژمارەیا ئاوڵ

ڤەگوهاستن ژ ژمارەیا ئاوێتە z بۆ ژمارەیا ئاوڵ $\bar{z}$ ، خالا ژمارەیا z دگوهۆڕیت ب وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ x .

نموونــــه 4

وێنەیێ خالا ژمارەیا ئاوێتە ب وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ x

وێنەیێ خالا ژمارەیا ئاوێتە $z=-5(2-i)-2i(3i+1)$ ب وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ x دیار بکە.



شیکار

ل دەستپێکێ ژمارەیا ئاوێتە ل سەر شێوەیێ جەبری بنڤیسە.

$$z = -5(2-i)-2i(3i+1) = -10+5i-6(i^2)-2i$$

$$z = -4+3i$$

خالا ژمارەیا ئاوێتە z دبیتە $M'_{z'}(-4,-3)$. وێنەیێ ڤێ خالێ ب وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ x دبیتە $M_z(-4,3)$.

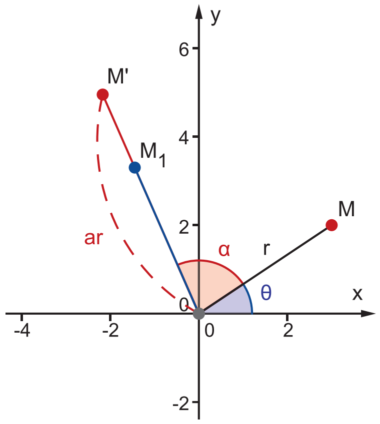
خالا چاڤدێریێ

4. وێنەیێ خالا ژمارەیا ئاوێتە $z = 3(-7i+14)(8-11i)$ ب وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ x دیار بکە.

لێکدانا ژمارەیێن ئاوێتە «بۆ تێروانین»

ڕۆنکرنا ئەندازەیی بۆ لێکدانا دوو ژمارەیێن ئاوێتە ژ ڕۆنکرنێن پێشتر ب ئالۆزترە. دێ ئەم شێوەیێ سێگۆشەی بۆ نڤیسینا ژمارەیێن ئاوێتە بکارئینین چونکی ب ساناهیتر دێ گەهینە ئەنجامی. بلا $u= a^{ia}$ ژمارەیەکا ئاوێتە ڕووتیێ وێ a بیت، و گۆشەیا جەمسەری بیت. هەکە u لێکبدەی دگەل ژمارەیا ئاوێتە $u= a^{ia}$، دێ ئەڤە بدەست تە کەڤیت:

$$z' = zu = re^{i\theta} ae^{i\alpha} = (ra)e^{i(\theta+\alpha)}$$



هەکەر M_z خالا ژمارەیا ئاوێتە z بیت و $M'_{z'}$ خالا ژمارەیا ئاوێتە z' بیت دێ $\begin{cases} r' = ar \\ \theta' = \theta + \alpha + 2k\pi \end{cases}$ دەمێ $z' = r'e^{i\theta'}$

هەکەر ب هویری بەرێ خۆ بدەیە شێوەیێ بەرامبەر، دێ بینی کو جهگوهۆڕکیا M_z بۆ $M'_{z'}$ ل دوو قۆناغان دەرباز دبیت:
جهگوهۆڕکیا M_z بۆ M_1 ب دەوردانەکێ چەقێ وێ خالا بنەڕەت و گۆشەیا وێ $\alpha = \arg(u)$ ، پاشی جهگوهۆڕکیا M_1 بۆ $M'_{z'}$ ب هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی سەنتەرێ وێ خالا بنەڕەت و ڕێژەیا وێ دبیتە $a = |u|$. «ڕووتێ ژمارەیا ئاوێتە u»

ڕۆنکرنا ئەندازەیی بۆ لێکدانا ژمارەیێن ئاوێتە

لێکدانا ژمارەیا ئاوێتە z دگەل ژمارەیا ئاوێتە u دبیتە جهگوهۆڕکیا خالا ژمارە z ب دەوردانەکێ چەقێ وێ خالا بنەڕەت و گۆشەیا وێ دبیتە $\arg(u)$ ، پاشی ب هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی چەقێ وێ خالا بنەڕەت و ڕێژەیا وێ $|u|$ بیت.

نموونــــە 5

جهگوهۆڕکیا خالەکێ بکارئینانا لێکدانا ژمارەیێن ئاوێتە

دیاربکە کو یا دشیانداییە جهگوهۆڕکیا ژمارەیا ئاوێتە $z = 1 + i$ بکەی بۆ خالا ژمارەیا ئاوێتە $z' = 2\sqrt{2}(1 - i)$ ب دەوردانەکێ چەقێ وێ خالا بنەڕەت بیت پاشی ب هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی چەقێ وێ خالا بنەڕەت بیت، گۆشەیا دەوردانێ چەندە؟ و ڕێژا هاوڕێژەیا ئەندازەیی چەندە؟

شیکار

دیارکرنا ژمارەیەکا ئاوێتە وەك u بەسە دا ژمارە z' بدەست تە بکەڤیت ژ ئەنجامێ لێکدانا z دگەل u ، چونکی دڤێت u ڤێ هاوکێشێ $z' = uz$ ساخ بکەت و $z \neq 0$ ، دێ $u = \frac{z'}{z}$.
شێوەیێ جەمسەری بکاربینە بۆ نڤیسینا ژمارەیا ئاوێتە.

$z = re^{i\theta}$ و $z' = r'e^{i\theta}$ ل دەستپێکێ ڕووتێ ژمارێ وگۆشا جەمسەری بۆ هەردوو ژمارەیێن ئاوێتە z و z' هەژمار بکە.

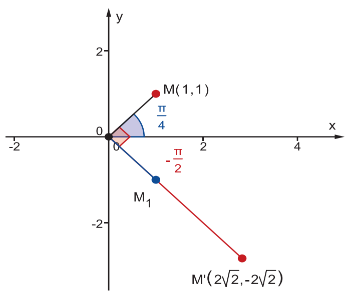
$$|z| = |1 + i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ ؛ } \tan\theta = \frac{1}{1} = 1 \text{ و } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

ئەڤە دیار دکەت کو $\theta = \frac{\pi}{4} + 2m\pi$

$$|z'| = |2\sqrt{2}(1 - i)| = 2\sqrt{2}|1 - i| = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}) = 4 \text{ ؛}$$

$$\tan\theta' = \frac{-1}{1} = -1 \text{ و } 0 \le \theta' \le -\frac{\pi}{2}$$

ئەڤە دیار دکەت کو $\theta' = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$



بەهایێ ڕووتێ u هەژمار بکە $|z'| = |z||u|$ ژ ڤێ دیار دبیت کو $|u| = \frac{|z'|}{|z|} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$
هەروەسا $\arg(z') = \arg(u) + \arg(z)$.

ل دوماهیێ:

$$\arg(u)=\arg(z')-\arg(z)=\theta'-\theta=-\frac{\pi}{4}+2n\pi-\frac{\pi}{4}-2m\pi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

دەمێ $k=n-m$

ڤێجا: گۆشەیا دەوردانێ دبیتە $-\frac{\pi}{2}$ ، و ڕێژەیا هاوڕێژەیا ئەندازەیی دبیتە $2\sqrt{2}$.

خالا چاڤدێریێ

5. دیار بکە کو یا دشیانداپە جهگوهۆڕکیا خالا ژمارەیا ئاویتە $z=1-i$ بکەن بۆ خالا ژمارەیا ئاویتە $z'=\sqrt{2}(1+i)$ ب دەوردانەکێ چەقێ وێ خالا بنەڕەت بیت، پاشی ب هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی چەقێ وێ خالا بنەڕەت بیت. گۆشەیا دەوردانێ چەندە؟ ڕێژەیا هاوڕێژەیا ئەندازەیی چەندە؟

پشتبەستن ب ئەوا پێشتر، تو دشێی جهگوهۆڕکیا خالا M بکەی ب دەوردانەکا چەقێ وێ خالا ب ڕێکا لێکدانا ژمارەیا خالا M دگەل ژمارەکا ئاویتە ڕووتێ وێ 1 بیت. ئانکو بۆ جهگوهۆڕکیا خالا M ب دەوردانەکێ چەقێ وێ خالا بنەڕەت و گۆشەیا وێ θ بیت، ژمارەیا ئاویتە $m=z_M$ «ژمارەیا خالا M » لێکبدە دگەل ژمارەیا ئاویتە $e^{i\theta}$ (ژمارەیا ئاویتە ئەوا ڕووتێ وێ 1 و θ گۆشەیا جەمسەری بیت بۆ وێ)، و خالا ژمارەیا ئاویتە ئەوا پەیدابووی $z'=e^{i\theta}z$ دیار بکە. دبێژنە $z'=e^{i\theta}z$ **شێوەیێ ئاویتە** Complex form بۆ دەوردانەکێ چەقێ وێ خالا بنەڕەت و گۆشەیا وێ θ بیت.

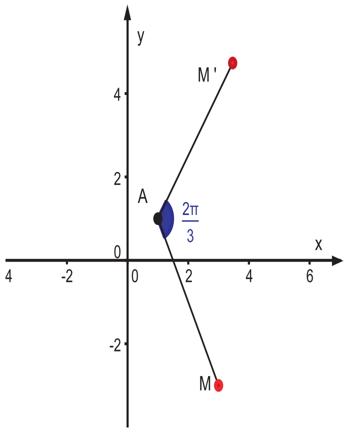
شێوەیێ ئاویتە بۆ دەوردانێ «بۆ تێروانین»

نڤیسینا ئاویتە بۆ دەوردانەکێ چەقێ وێ خالا A بیت و گۆشەیا وێ θ دبیتە: $z'-a=e^{i\theta}(z-a)$
کو $a=z_A$ ژمارەیا ئاویتەیە بۆ خالا A .

نموونـــــە 6

وێنەیێ خالێ ب دەوردانێ

وێنەیێ خالا $M(3,-3)$ ب دەوردانەکێ سەنتەرێ وێ خالا $A(1,1)$ و گۆشەیا وێ $\frac{2\pi}{3}$ بیت چییە؟



شیکار

$a=z_A=1+i$ و $m=z_M=3-3i$ وێنەیێ M ب دەوردانێ

دبیتە خالا $M'=M_{m'}$ کو $m'-a=e^{i\theta}(m-a)$

$$m'=e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(3-3i-(1+i)\right)+(1+i)$$

$$=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)(2-4i)+1+i$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2-4i)+1+i=2\sqrt{3}+i\left(3+\sqrt{3}\right)$$

وێنەیێ خالا $M(3,-3)$ ب دەوردانێ دبیتە خالا $M'=\left(2\sqrt{3},\ 3+\sqrt{3}\right)$.

خالا چاڤدێریێ

6. وێنەیێ خالا $M(4,-4)$ ب دەوردانەکێ چەقێ وێ خالا $A(-1,-1)$ و گۆشەیا وێ $-\frac{\pi}{4}$ بیت دیار بکە.

دشێن مفایی ژ پەیوەندییا ل ناڤبەرا ژمارەیێن ئاویتە و خالێن ڕووتەختێ پۆتانێ ببینن، بۆ شیکارکرنا پرسیارێن ئەندازەیی، یان بۆ بکارئینانا هندەك سەلمێنراوان د بوارێ ئەندازێ دا.

2–7 ڕاهێنان

ژ ڕاهێنانا 1 هەتا 6 ، ژمارەیا ئاوێتە بۆ وێنەیێ خالا M ب جهگوهۆڕکا دیارکری بنڤیسە.

1. $M(2, -1)$ ؛ ڕاکێشانا ئاڕاستەبڕێ $\vec{u}\langle -3, 2\rangle$

2. $M(-3, 5)$ ؛ ڕاکێشانا ئاڕاستەبڕێ $\vec{u}\langle 2, -2\rangle$

3. $M(2, 0)$ ؛ دەوردانەکێ چەقێ وێ خالا بنەڕەت و گۆشەیا وێ $\frac{\pi}{3}$ بیت.

4. $M(2, 1)$ ؛ هاوڕێژەیا ئەندازەیی ڕێژەیا وێ $\frac{3}{2}$ بیت.

5. $M(-1, 3)$؛ وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ x .

6. $M(4, 1)$؛ وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ y

بەشێ 7

پێداچوونا بەشێ

ژ ڕاهێنانا 1 هەتا 5 ، ژمارەیا ئاوێتە ل سەر شێوەیێ جەبری بنڤیسە:

1 $\frac{3+6i}{3-4i}$

2 $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i}$

3 $\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}$

4 ژمارەیەکا ئاوێتە بەهایێ ڕووتێ وێ 2 و گۆشەیا جەمسەری $\frac{\pi}{3}$.

5 ژمارەیەکا ئاوێتە بەهایێ ڕووتێ وێ 3 و گۆشەیا جەمسەری $-\frac{\pi}{6}$.

6 ڤی برِی ل سەر سادەترین شێوە بنڤیسە $(3+2i)(1-3i)$.

7 ژمارەیا ئاوێتە ئەوا ڕووتێ وێ 2 و گۆشەیا وی $\frac{\pi}{3}$ لێکبدە دگەل ژمارەیا ئاوێتە ئەوا ڕووتێ وێ 3 و گۆشەیا جەمسەری $\frac{-5\pi}{6}$.

8 ڤی برِی ل سەر سادەترین شێوەی بنڤیسە $\frac{3+2i}{1-3i}$.

9 ژمارەیا ئاوێتە ئەوا ڕووتێ وێ 2 و گۆشەیا جەمسەری $\frac{\pi}{3}$ دابەشبکە ل سەر ژمارەیا ئاوێتە ئەوا ڕووتێ وی 3 و گۆشەیا وی یا جەمسەری $\frac{-5\pi}{6}$.

10 هەر ژمارەیەکێ ل سەر شێوەیێ جەمسەری بنڤیسە: $u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $v=1-i$ ، پاشی ژمارەیا ئاوێتە $w=\frac{u}{v}$ ل سەر هەمان شێوەیی بنڤیسە.

11 ئەڤێ ژمارەیا ئاوێتە ل سەر شێوەیێ جەبری بنڤیسە $\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$ ، پاشی ل سەر شێوەیێ سێگۆشەی بنڤیسە $\cos\frac{\pi}{12}$ ، $\sin\frac{\pi}{12}$ ، $\tan\frac{\pi}{12}$ ، $\tan\frac{5\pi}{12}$ دەرئەنجام بکە،
دیار بکە کو u دبیتە شیکار بۆ هاوکێشەیا $z^{24}=1$.

بەشێ 7

بەرهەڤکرن بۆ ئەزموونێ

1 بەشێ ڕاستی بۆ ژمارەیا ئاوێتە $z=(2+i)^2$ دبیتە:

أ 2 ب 4 ج 3 د 1

2 بەشێ خەیالی بۆ ژمارەیا ئاوێتە $z=(1-i)^2$ دبیتە:

أ $2-$ ب $1-$ ج 0 د $-2i$

3 ڕووتێ ژمارەیا ئاوێتە $z=4+3i$ دبیتە:

أ 7 ب $\sqrt{7}$ ج 5 د $\sqrt{5}$

4 کیژ پیڤانێن گۆشەیێن ل خوارێ، دبیتە گۆشەیا جەمسەری بۆ ژمارەیا ئاوێتە $z=2-2i$؟

أ $\frac{\pi}{4}$ ب $-\frac{\pi}{4}$ ج $\frac{\pi}{2}$ د $\frac{3\pi}{4}$

5 ژمارەیەکا ئاوێتە ڕووتێ وێ 2 ، و گۆشەیا جەمسەری $\frac{\pi}{3}$. کیژ ڤانێن ل خوارێ دبیتە نڤیسینا z ل سەر شێوەیێ جەبری؟

أ $\sqrt{3}+i$ ب $1+i\sqrt{3}$ ج $2+i\frac{\pi}{3}$ د $\sqrt{3}-i$

6 کۆمەلا شیکارێ بۆ هاوکێشەیا $z^2+z+1=0$ دبیتە: (ل بیرا تە بیت کو $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$.

أ کۆمەلا بەتال.

ب $\left\{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

ج $\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

د $\left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right\}$

7 A خالا ژمارەیا ئاوێتە $a=1+i$ ، و B خالا ژمارەیا ئاوێتە $b=1-i$ کیژ ڤانێن ل خوارێ دبیتە کۆمەلا خالێن M ئەوێن $|z_M-1+i|=|z_M-1-i|$ ساخ دکەت.

أ ڕاستەهێلێ AB .

ب ناڤەڕاستا AB.

ج بازنەیا تیرەیێ وێ $\overline{AB}$.

د تەوەرێ $\overline{AB}$.

8 A ، B ، C سێ خالن ل ڕووتەختێ پۆتانێ ڤێ هاوکێشەیێ ساخ دکەن $z_A=z_C-z_B$. کیژ ڤان یا دروستە؟

أ $OACB$ لاتەریبە، O خالا بنەڕەتە.

ب خالێن A ، B ، C دکەڤنە سەر ئێك ڕێز.

ج A ناڤەڕاستا $\overline{BC}$.

د B ناڤەڕاستا $\overline{AC}$.

9 A خالا ژمارەیا ئاوێتەیە $a=1+i$ و B خالا ژمارەیا ئاوێتەیە $b=3-i$. کیژ ڤان یا دروستە؟

أ $AB=2.82$ ب $AB=0$ ج $AB=\sqrt{10}-\sqrt{2}$ د $AB=2\sqrt{2}$

10 A خالا ژمارەیا ئاوێتەیە $a=1+i$ و B خالا ژمارەیا ئاوێتەیە $b=3-i$. H ناڤەڕاستا $\overline{AB}$ ، $h=z_H$ ، کیژ ڤان یا دروستە؟

أ $h=1-i$ ب $h=2$ ج $h=2-2i$ د $h=-2$

هەندەك زانیارییێن پێدڤی بۆ قوتابی

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin (x + y) = \sin x \cos x + \cos x \sin x$$

$$\sin (x - y) = \sin x \cos x - \cos x \sin x$$

$$\cos (x + y) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$$

$$\cos (x - y) = \cos x \cos x + \sin x \sin x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - \sin^2 x \\ &= \cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$\sin (-x) = - \sin x , \qquad \cos (-x) = - \cos x, \qquad \tan (-x) = - \tan x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos x, \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x$$

$$\sin (\pi - x) = \sin x, \quad \cos (\pi - x) = - \cos x$$