١٢

حکومەتا هەرێما کوردستانێ
وەزارەتا پەروەردێ - ڕێڤەبەریا گشتی یا پرۆگرام و چاپەمەنیان

بیرکاری بۆ هەمووان

پەرتووکا قوتابی
پۆلا دوازدێ ویژەیی

چاپا سێیێ
٢٧١٦ کوردی   ٢٠١٦ زایینی   ١٤٣٧ مشەختی

هەڵسەنگاندنا زانستی
الياس حيدر الياس

وەرگێران و گونجاندن
شكرى حسن سلو
عصام الدين عبيد عمر
مشير الياس عبدالله

پێداچوونا چاپكرنێ
شكرى حسن سلو

پێداچوونا زمانی
طه ياسين طه

سەرپەرشتێ هونەری یێ چاپێ
عثمان پيرداود كواز
سعد محمد شريف صالح

ناڤەڕۆك پەرتووكێ

بەشێ 1 ئامار و ئەگەر 1 Statistics And Probability

1 ڕوونكرنا سمبێلی
Box-and-Whisker Plot 2

2 ئەگەرا مەرجی و ئەگەرا گشتگر
Conditional and Total Probabilities 8

3 نموونەیێن هێلی Linear Models 16

بەشێ 2 جەبر 27 Algebra

1 شیكاركرنا سیستەمێن هێلی ب سێ نەزانراوان
Solving Linear systems in 3 unknowns 28

2 پڕۆگرامێ هێلی Linear Programming 34

3 لێكدانا ڕێزكرییان Multiplying Matrices 40

4 هەڵگەڕاوێ ڕێزكرییان Inverse of a matrix 46

بەشێ 3 نەخشە 51 Functions

1 نەخشەیێن ڕادەدار
Polynomial Functions 52

2 نەخشەیێن گوهۆڕینێ Variation Functions 58

3 نەخشەیێ توانی Exponential Functions 64

4 نەخشەیێ لۆگاریتمی Logarithmic Functions 70

بەشێ 4 ئێك ل دووڤ ئێك Sequences 77

1 ئێك ل دووڤ ئێكێن ژمارەیی
Arithmetic Sequences 78
2 ئێك ل دووڤ ئێكێن ئەندازەیی
Geometric Sequences 85

بەشێ 5 جوداكاری و تەمامكاری Differentiation and Integration 91

1 بجهئینانێن جوداكاریێ د ئابوورێدا
Applications of Differentiation to Economics 92
2 تەمامكاری Integration 100

ئامار و ئەگەر

Statistics and Probability

بەشێ 1

وانە

1. روونکرنا سمبێلی.
2. ئەگەرا مەرجی و ئەگەرا گشتگر.
3. نموونەیێن هێلی.

وانە 1

ڕوونكرنا سمبێلی

Box-and-Whisker Plot

بۆچی؟

تو دشێی ڕوونكرنا سنمبێلی بكاربینی بۆ بەراوردكرنا پرتبوونا پێدایان د دوو كۆمەلێن پێراێندا ئەوێن لێكچوویی، وەك ئاڤەندین (تێكڕا) هەیڤانە بۆ پلەیێن گەرمیێ .

ئارمانج

- هەژمارتنا چوارێكێ ئێكێ و چوارێكێ سێیێ بۆ كۆمەلكا پێداییان .
- هەژمارتنا مەودا و مەودایێ چوارێكێ بۆ كۆمەلكا بێرابیان.
- وێنەكرنا ڕوونكرنا سمبێلی بۆ نواندنا پرتبوونا كۆمەلكا پێداییان.

زاراڤ
Vocabulary

چوارێكێ ئێكێ
First quartile

چوارێكێ سێیێ
Thind quartile

مەودایێ چوارێكێ
Interquartile range

ڕوونكرنا سمبێلی
Box-and- Whisker-Plot

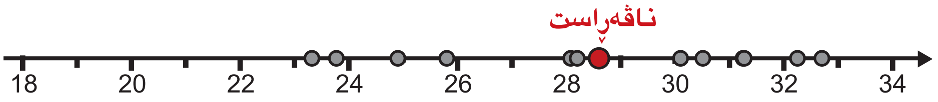
چەمكێ پرتبوونێ

هەردوو خشتەیێن بەرامبەر، تێكڕایێن پلەیێن گەرمیێ ل ماوەیێ 12 مەهان بۆ هەردوو هاڤینگەهێن سەرچنار ل شلێمانیێ و سوولاڤ ل دهۆكێ دیاردكەن. ناڤەندێ بهایێن خشتەیێ ئێكێ دبیتە 27.355 و و ناڤەندێ بهایێن خشتەیێ دووێ دبیتە 28.51 هەكە بهایێن هەردوو خشتەیان ل سەر تەوەرێ ژمارەیان بنوێنین دێ بینین :

تێكڕایێ پلەیێن گەمیێ بۆ هاڤینگەها سەرچنار	
كانوونا دووێ	16.63
شوبات	17.8
ئادار	22.94
نیسان	26.37
گۆلان	32.61
حزیران	35.62
تیرمەه	37.06
تەباخ	36.81
ئەیلول	33.06
چریا ئێكێ	28.34
چریا دووێ	22.5
كانوونا ئێكێ	14.35

تێكڕایێ پلەیێن گەرمیێ بۆ هاڤینگەها سوولاڤ	
كانوونا دووێ	23.32
شوبات	23.77
ئادار	25.8
نیسان	28.08
گۆلان	30.51
حزیران	31.25
تیرمەه	32.7
تەباخ	32.25
ئەیلول	31.27
چریا ئێكێ	30.1
چریا دووێ	28.2
كانوونا ئێكێ	24.9

نواندنا پێدابێن خشتەیێ ئێكێ ل سەر تەوەرێ ژمارەیان



نواندنا پێدابێن خشتەیێ دووێ ل سەر تەوەرێ ژمارەیان

بەرێ خو بدێ كو ناڤەڕاستێ خشتەیێ دووێ 28.51 دەربڕینی ژ بهاییێن كۆمەلا خودكەت بشێوەیەكی باشتر ژ ناڤەڕاستێ خشتەیێ ئێكێ، چنكو زۆربەیی بهاییێن خشتەیێ ئێكێ د دوورن ژ ناڤەڕاستێ وی، لەورا ئەم دشێین بێژین كو بهاییێن خشتەیێ ئێكێ پتر د پرتبووینە ژ بهاییێن خشتەیێ دووێ.

ئامارناس پیڤەر و ئامیرێن روونكرنێ یێن گەلەك هویر بكاردئینن بۆ دەربرینا پەرتبوونا كومەلەكا پێداییان. تو ل پۆلا یازدێ فێربوویی چەوا هندەك پیڤەرێن پرتبوونێ بهەژمێری و بكاربینی وەك مەودا ولێكنەچوون ولادانێ پیڤانەیی .

ل ئەڤێ وانەیێ دێ فێربی چەوا هندەك بهایێن دی بهەژمێری و بكاربینی، دگەل نواندنا پرتبوونێ ب وێنەیێ روونكرنێ.

چالاكی

هەژمارتنا چواریكیان

خشتەیێ ل خوارێ تیكرایێن هەیڤانە یێن باران بارینێ (ب ملیلێتەر) ل باژێرەكی دیاردكەت ل ماوەیێ 12 مەهان.

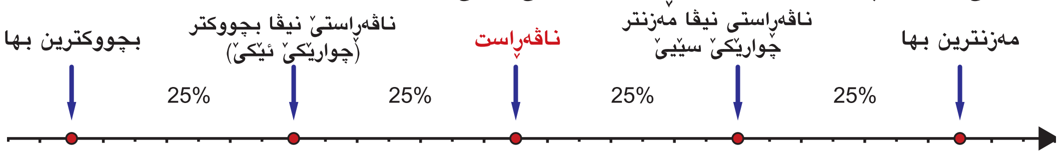
مەھ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
تێكرا	48	57	71	89	124	76	58	56	86	89	58	46

1. ناڤەڕاستێ وان تێكرایان بهەژمێرە، رێژەیا سەدی بۆ وان پێداییێن كێمتر ژ ناڤەڕاستی چەندە؟ رێژەیا سەدی بۆ وان پێداییێن زێدەتر ژ ناڤەڕاستی چەندە؟

2. ناڤەڕاستێ كۆمەلا پێداییێن كێمتر ژ ناڤەڕاستی بهەژمێرە، رێژەیا سەدی بۆ وان پێداییێن كێمتر ژ ئەڤی ناڤەڕاستێ بوو چەندە؟

3. ناڤەڕاستێ كۆمەلا پێداییێن زێدەتر ژ ناڤەڕاستێ بهەژمێرە، رێژەیا سەدی بۆ وان پێداییێن زێدەتر ژ ئەڤی ناڤەڕاستێ نویی چەندە؟

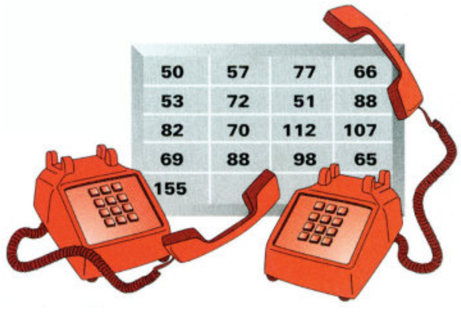
تو دشێی ئەڤا ل چالاكیا بۆری تو پێرابووی بنوێنی وەكی ل خوارێ.



ئامارناس دبێژنە ناڤەڕاستێ نیڤا بچووكتر چوارێكێ ئێكێ و هێمایێ Q_1 بۆ وی بكاردئینن و ناڤەڕاستێ نیڤا مەزنتر دبێژنێ چوارێكێ سێیێ و هێمایێ Q_3 بۆ وی بكاردئینن، لێ چوارێكێ دووێ Q_2 ئەو بتنێ دبیتە ناڤەڕاستێ هەموو كۆمەلا پێداییان. ئامارناس دبێژنە $Q_3 - Q_1$ مەودایێ چوارێكێ و هێمایێ IQR بۆ وی بكاردئینن، و هەر بهایەك د كۆمەلا پێداییاندا كو كێمتر بیت ژ $Q_1 - 1.5 \times IQR$ یان زێدەتر بیت ژ $Q_3 + 1.5 \times IQR$ دبێژنێ بهایێ پەرگر(قیمة متطرفة).

نموونە 1

وێنەیێ بەرامبەر ژمارەیا تێلەفوونكرنێن بنگەهێ ئاگرفەمرێندا باژێرێ دهوكێ ل ماوەیێ 17 رۆژان وەرگرتین دیاردكەت، بشێوەیەكێ هەرمەكی هاتبوونە هەلبژاردن.



أ مەزنترین بها و بچووكترین بها و ناڤەڕاست و چوارێكێ ئێكێ و چوارێكێ سێیێ و مەودا و مەودایێ چوارێكێ بۆ كۆمەلا پێداییان ل وێنەیێ بەرامبەر بهەژمێرە.

ب بهایێن بەرگر ، هەكە د كۆمەلێدا هەبوون بهەژمێرە.

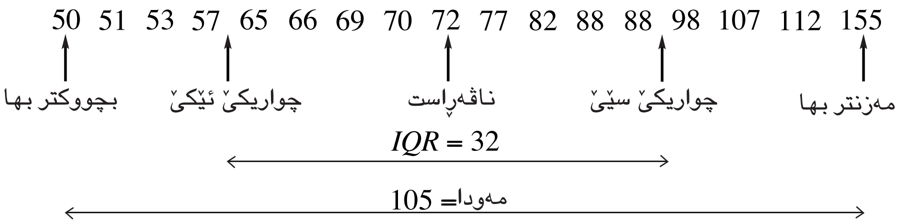
شیكار

أ بهایان بەرەڤ ژوور رێزبكە:

50 51 53 57 65 66 69 70 72 77 82 88 88 98 107 112 155

ژمارەیا پێدایيان د کۆمەلێدا 17، ئەو ژمارەیەکا کتە، لەوڕا ناڤەڕاست دبیتە بهایێ نەهێ ئانکو $Q_2 = 72$، چوارێکێ ئێکێ دبیتە ناڤەڕاستێ کۆمەلا 70 ،69 ،66 ،65 ،57 ،53 ،51 ،50 ، چونکی ژمارەیا ئەڤان جووتە (8) لەوڕا چوارێکێ ئێکێ (نا ڤەڕاستێ نیڤا بچووکتر) دبیتە تێکڕایێ ئەوان هەردوو بهایێن دکەڤنە دناڤەڕاستێدا ئانکو 57 و 65 ئانکو، $Q_1 = \frac{57+65}{2} = 61$ ل ڕەخەکی دی پێدایێن. نیڤا مەزنتر دبنە107، 98، 88، 88، 82 ، 77، 155، 112. و ژمارەیا وان پێدایيان هەروەسا جووتە (8) ، لەورا ناڤەڕاستێ ئەڤێ کومەلێ دبیتە تێکرایێ ئەوان هەردوو بهایێن دکەڤنە د ناڤەڕاستێدا ئانکو 88 و 98 ، $93 = \frac{88+98}{2} = Q_3$.

مەزنترین بها دبیتە 155 و بچووکترین بها دبیتە 50 مەودا دبیتە $155 - 50 = 105$ و مەودایێ چوارێکێ دبیتە $93 - 61 = 32$ دتو دشێی ئەوا پێگەهشتی ل سەر شێوەیێ ل خوارێ پۆختەبکەی:



ب بۆ هەژمارتنا بهایێ پەڕگر، ئەڤانە بهژمێرە $Q_1 - 1.5 \times IQR$ $Q_3 + 1.5 \times IQR$.

$$Q_3 + 1.5 \times IQR = 93 + 1.5 \times 32 = 141 \text{ و } Q_1 - 1.5 \times IQR = 61 - 1.5 \times 32 = 13$$

بهایەك نینە کێمتربیت ژ 13، لێ ئێك بها هەیە (155) مەزنترە ژ 141، ئەڤە ئەوێ ئێکێ دیاردکەت کو ئێك بهایێ پەڕگر هەیە ئەوژی 155.

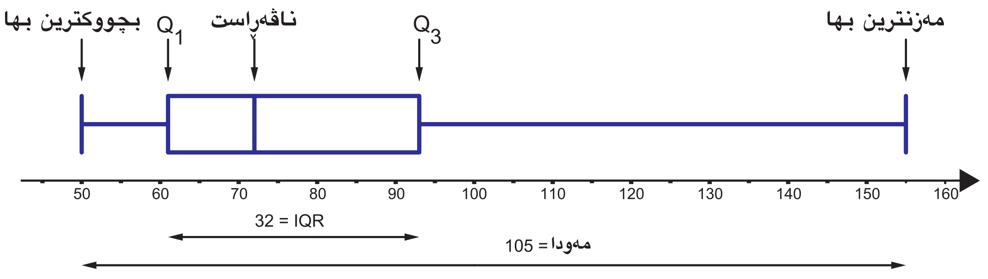
هەولبدە مەزنترین بها و بچووکترین بها و ناڤەڕاست و چوارێکێ ئێکێ و چوارێکێ سێێ ومەودا و مەودایێ چوارێکی بۆ کۆمەلا پێدایێن خشتەیی ل خوارێ بهەژمێرە.

50	31	34	24	37	35	2	34	31	9	7	4
83	78	69	60	57	52	13	8	2	36	33	11

هزرکرنا ڕەخنەگر ئەرێ تو دشێی هەبوونا بهایێ پەڕگر د نموونەیا 1 دا روونبکەی؟

ڕونکرنا سمبێلی

ڕوونکرنا سمبێلی وێنەیەکی ڕوونکرنێیە چاوانیا پرتبوونا بهاییان د کۆمەلەکا پێدایيان دا دیاردکەت، ئەڤێ ل خوارێ ڕوونکرنا سمبیلییە بۆ کۆمەلا پێدایێن نموونەیا 1 ێ.



بەرێ خو بدێ کو ڕوونکرنا سمبیلی ب پێنج بهایێن ئامارەیی دیاردبیت: مەزنترین بها و بچووکترین بها و ناڤەڕاست و چوارێکێ ئێکێ و چوارێکێ سێێ.

هزرکرنا ڕەخنەگر کیژ بەشێ ڕوونکرنا سمبیلی 50% ژ پێداییان دنوێنت؟

پێنگاڤێن دروستکرنا ڕوونکرنا سمبێلی	
پێنگاڤ 1	ڕیزکرنا بهایان بەرەڤ ژوور و هەژمارتنا ناڤەڕاستی و چوارێکێ ئێکێ و چوارێکێ سێیێ.
پێنگاڤ 2	وێنەکرنا تەوەرێ ژمارەیان کو هەردوو بهایان مەزنتر و بچووکتر تێدا دیارکری بن.
پێنگاڤ 3	وێنەکرنا لاکێشەیەکێ ژبهایێ Q_1 بۆ بهایێ Q_3 یادرێژکری بیت.
پێنگاڤ 4	وێنەکرنا پارچە ڕاستە هێلەکی ئەوێ لاکێشەیێ دابەش دکەت لنك ناڤەڕاستی.
پێنگاڤ 5	وێنەکرنا پارچە ڕاستە هێلەکی ئاسۆیی ژ Q_1 درێژکر بیت هەتا بچووکترین بها، و وێنەکرنا پارچە ڕاستە هێلەکی ستوون لنك بچووکترین بها، پاشی وێنەکرنا پارچە ڕاستە هێلەکی ئاسۆیی ژ Q_3 درێژ کر دبیت هەتا مەزنترین بها و وێنەکرنا پارچە ڕاستە هێلەکی ستوون لنك مەزنترین بها.

نموونە 2

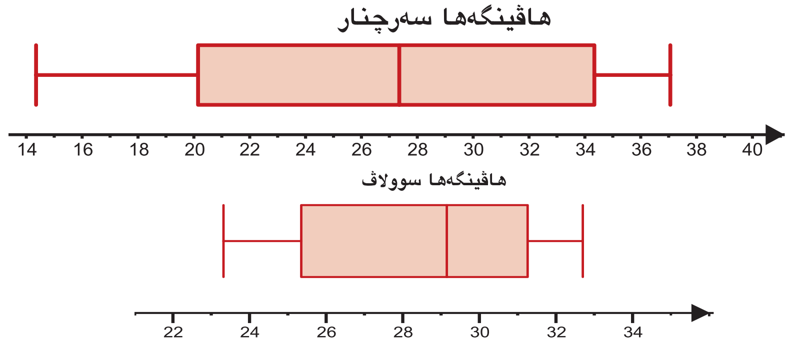
ڤەگەڕاندن بۆ نموونە یال دەستپێکا وانەیێ هاتی، ڕوونکرنا سمبیلی بۆ تێکراییێن پلەیێن گەرمیێ بۆ هەرئێك ژهەردوو هاڤینگەهان سۆلاڤ وسەرچنار بکێشە، پاشی بکارئینانا هەردوو ڕوونکرنێن سمێلی و بەراوردیێ لناڤبەرا هەردوو کۆمەلان بکە.

شیکار

ل دەستپێکێ هەر پێنج بهایان بۆ هەر کۆمەلەکێ بهەژمێرە ئەڤ ئەنجامێن ل خوارێ دێ بدەست تە کەڤن

	سوولاڤ	سەرچنار
بچووکترین بها	23.32	14.35
چوارێکێ ئێکێ	25.35	20.15
ناڤەڕاست	29.15	27.36
چوارێکێ سێیێ	31.26	34.34
مەزنترین بها	32.70	37.06

پاشی ڕوونکرنا سمبێلی بۆ هەر کۆمەڵەیەکێ بکێشە.



درێژبوونا لاکێشەیێ و هەردوو سمبێلان ل ڕوونکرنا سوولاڤێ دیاردکەت کو پلەیێن گەرمیێ ل هاڤینگەها سوولاڤێ پتر دهێتە گوهۆڕین ژ پلەیێن گەرمیێ ل هاڤینگەها سەرچنار کو لاکێشەیا وێ و هەردوو سمبێل کێمتر درێژبووینە. بەراودی لناڤبەرا هەردوو ڕوونکرنێن سمبیلی دیاردکەت کو نزمترین تێکرایێ پلەیێن گەرمیێ ل هاڤینگەها سوولاڤ، بلندترە ژ نرمترین تێکرایێ پلەیێن گەرمیێ ل سەرچنار و بلندترین تێکراییێ پلەیێن گەرمیێ ل هاڤینگەها سوولاڤ کێمترە ژ بلندترین تێکرایێ پلەیێن گەرمیێ ل هاڤینگەها سەرچنار.

هەولبدە مەودایێ چوارێکی یێ تێکراییێن پلەیێن گەرمیێ ل هاڤگەها سەرچنار و سۆلاڤ بهەژمێرە، چ بدەست تە دکەڤیت ژهەردوو بهایان؟

هزرکرنا ڕەخنەگرا ئەرێ چێدبیت ڕوونکرنا سمبیلی ئێك سمبێل بتنێ هەبیت؟ بێی سمبێل بیت؟ بەرسڤا خو ڕوونبکە؟

ڕاهێـــــنـــــــان

بەردەوامبوون د بیرکارییدا

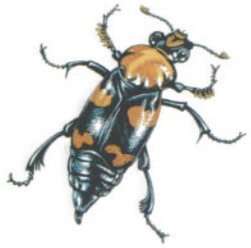
1 جیاوازییێ ل ناڤبەرا هەژمارکرنا ناڤەڕاستی و چوارێکێ ئێکێ وچوارێکی سێیێ ل کۆمەلەکا 20 بهایی و ل کۆمەلەکا 15 بهایی دیاربکە.

2 ڕوونکرنا سمبیلی چ بۆ تە دیاردکەت دەربارەیی کۆمەلەکا پێداییان ؟

3 دوو کۆمەلێن پێداییان دروستبکە کو ناڤەڕاستیێ هەرئێك 7 بێن و چوارێکێ ئێکێ $Q_1 = 5$ وچوارێکێ سێیێ $Q_3 = 11$ بیت.

ڕاهێنانێن ئاڕاستەکری

4 ژینگەه خشتەیێ ل خوارێ درێژییێن 24 زیندەوەران(ب ملیمتەر) ژ جۆرەکی دیارکری ژ زیندەوەران دیاردکەت.



28	30	38	34	36	31	28	25
32	34	27	29	30	26	33	35
29	38	31	25	29	31	25	37

أ بچووکترین بها و مەزنترین بها و ناڤەڕاست و چوارێکێ ئێکێ وچوارێکی سێیێ و مەودا و مەودایێ چوارێکێ بۆ ئەڤان پێداییان بهەژمێرە.

ب ل دویڤ بهایێ پەڕگر بگەڕە هەکە دناڤ کۆمەلێدا هەبوو دیاربکە.

5 کومبوون: خشتەیێ بەرامبەر ڕێژەیا سەدی دیاردکەت بۆ ئافرەتین کاردکەن ل هندەك وەلاتێن پێشکەفتی ل هەردووسالێن 1980 و 1992.

وەلات	1980	1992
ئوستراليا	36.4	42.1
کەنەدا	39.7	45.5
فەرەنسا	39.5	43.8
ئەڵمانیا	38.0	42.0
یابان	38.4	40.5
سوید	45.2	48.3
بەریتانیا	40.4	44.9
ولاتە یەککگرتوەکان	42.4	45.7

أ ناڤەڕاستیێ و چواریکێ یەکەم وچواریکی سێیێ بۆ پێداییێن هەرسالەکێ بهەژمێرە.

ب ڕوونکرنا سمبیلی بۆ پێداییێن هەر سالەکێ بکێشە.

ج بەراوردییێ بکە لناڤبەرا هەردوو ڕوونکرنان .

ڕاهێنان و بجهئینان

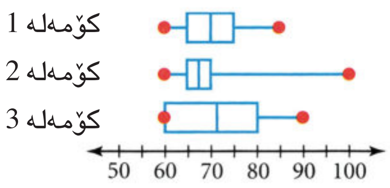
بۆ هەر کۆمەلەکا پێداییان، بچووکترین بها و مەزنترین بها و ناڤەڕاست و چواریکێ ئێکێ و چواریکێ سێیێ و مەودا و مەودایێ چواریکێ بهەژمێرە، پاشی ڕوونکرنا سمبیلی بۆ هەر کۆمەلەکێ وێنەبکە.

6 42، 45 ،56، 48 ،59 ،60 ،51 ،54 ،44 ،51 ،50 ،44 ،42 ،49 ،56.

7 22 ،50 ،78 ،22 ،77 ،93 ،27 ،86 ،14.

8 8 ،2 ،8 ،2 ،8 ،3 ،2 ،2 .

3 کۆمەلێن قوتابیان ڕابوون ب ئەنجامدانا ئەزموونەکێ، ڕوونکرنێن سمبێلی بکاربینە بۆبەرسڤدانا پرسیاران ژ 9 هەتا 12.



9 کیژ کۆمەلێ بلندترین نمرەیێن مەزن هەبوو؟

10 کیژ کۆمەلێ مەزنترین مەودا هەبوو؟

11 کیژ کۆمەلێ ناڤەڕاست هەبوو؟

12 کیژ کۆمەلێ مەزنترین مەودایێ چوارێکی هەبوو؟

13 خشتەیێ ل خوارێ درێژیێن 24 زیندەوەران ژ جۆرەکی دیارکری ژ زیندەوەران ب سانتیمەتران دیاردکەت.

3.0	2.6	3.3	3.5	2.8	3.0	3.8	3.4	3.6	3.1	2.8	2.5
2.9	3.8	3.1	2.5	2.9	3.1	2.5	3.7	3.2	3.4	2.7	2.9

أ مەزنترین بها و بچووکترین بها و ناڤەڕاست و چوارێکێ ئێکێ و چوارێکێ سێێ و مەودایێ چوارێکی بۆ وان پێداییان دیاربکە.

ب ئەرێ ئەو کۆمەلە بهایێن پەرگر بخۆڤە دگریت؟ هەکە بەرسڤاتە بەلێ بوو ئەوان بهایان دیاربکە؟

لێنێرینەک بۆ پاش

14 ناڤەڕاست و باو بۆ ئەڤان پێدایان بهەژمێرە. 2، 16، 4، 11، 14، 8، 17، 19، 13، 19، 9، 15، 8، 13، 17.

15 مەودا و لادانا پیڤانەی بۆ ئەڤان پێدایان بهەژمێرە. 12، 73، 11، 96، 45، 21، 16، 98، 13.

لێنێرینەک بۆ پێش

16 شیرین ل پۆلا یازدێیە و خوشکا وێ شلێر ل پۆلا دووازدێیە،هەلبژاتن ل هەر پۆلەکێ هاتە ئەنجادان بۆ دیاریکرنا نوونەرێ پۆلێ، ئەگەرا هەلبژاردنا شرینێ وخوشکا وێ شلێرێ چەندە، هەکە 30 قوتابی ل پۆلا یازدێ و 25 قوتابی ل پۆلا دوازدێ هەبن؟

ل بیرا تە بیت

هەکە هەرئێک ژ A و B دوو ڕوودوانێن دتاقیکرنەکا هەرمەکیدا هینکێ دێ A، B دوو ڕووداڼێن جودابن ل دەمێ
$P(A∪B) = P(A) + P(B)$ و
$P(A∩B) = ø$
هەکە A، B جودانەبن دێ،
$P(A∪B)=P(A)+P(B)+P(A∩B)$

وانەیا 2

ئەگەرا مەرجی و ئەگەرا گشتگر

Conditional and Total Probabilities

بۆچی؟ شیروڤەکرنێن رامیاریی دشێن پشتبەست بن ب پێدانێن دیمۆگرافی و ئەگەران بۆ پێشبینیکرنا ئەنجامێن هەلبژارتنان.

ئارمانج

- هەژمارتنا ئەگەرا روودانەکێ بزانین هەکە کو روودانەکا دی روودابیت.
- دیارکرنا مەرجێ سەربەخۆیا دوو روودانان و بکارئینانا وی.
- دیارکرنا یاسایا ئەگەرا گشتگر و بکارئینانا وی .

زاراڤ
Vocabulary

ئەگەرا مەرجی
Conditional probability
ئەگەرێن سەربەخۆ
Independent events
ئەگەرا گشتگر
Total Probability

ئەگەرا مەرجی

ل گەلەك تاقیکرنێن هەرەمەکی تە پێتڤاتی ب دیارکرنا ئەگەرا روودانا A هەیە ل دەمێ روودانەکا دی B هاتبیتە روودان، وەکی تو بزانی کو کەسەك ب هەرەمەکی هاتبیتە هەلبژاردن ئەوی دەنگێ خودابیتە لیستەیا 725 ئەو ژ پارێزگەها سلێمانیێ بیت، هەکە B روودانا ((ئەو کەسێ هاتیە هەلبژاردن ژ پارێزگەها سلێمانیێ بیت)) و A ((ئەوی کەسێبێت دەنگێ خو دابیتە لیستەیا 725))، ئەوێن ل بوارێ بیرکاریێ کاردکەن نڤیسینا $P(A/B)$ بکاردئینن بۆ دەربرینا ب دەستڤەئینانا روودانا A هەکە بزانن کو روودانا B یا هاتیە روودان، و دبێژنە ڤێ ئەگەرێ ئەگەرا مەرجی.

پێناسەیا ئەگەر

هەکە A و B دوو روودان بن ل تاقیکرنەکا هەرەمەکی، و $P(B) \neq 0$ ، ئەگەرا مەرجی بۆ روودانا A هەکە بزانن کو B یا هاتیە روودان دبیتە.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

هێمایێ $P(A/B)$ بە ئەڤی شێوەیی دهێتەخواندن: ئەگەرا روودانا A هەکە B روودابیت.

نموونە 1

تویرکەك 10 گۆیێن سۆر تێدا هەنە، و رەنووووسکرینە ژ 1 هەتا 10، و 5 گۆیێن شین تیدا هەنە و رەنووسکرینە ب ژمارەیێن کت ژ 1 هەتا 9. گۆیەك ژ تویرکی هاتە راکێشان. ئەگەرا ئەو گۆیە هەلگرا ژمارە 9 بیت چەندە هەکە بزانی ئەو گویەیا سۆرە؟

شیکار

بۆشایێ ئەگەران ل دەمێ راکێشانا گۆیێ دبیتە :

$$\{1,3,5,7,9,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

روودانا B ((گۆیە سوور)) ئەڤەیە : $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

روودانا A ((کو هەلگرا ژمارە 9)) ە ئەڤەیە $\{9,9\}$.

لێ روودانا $A\cap B$ دبیتە $\{9\}$.

ژ ئەوا بۆری دیاردبیت کو $P(B)=\frac{10}{15}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{15}$ و $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{10}{15}}=\frac{1}{10}$

ڤێجا، ئەگەرا ئەو گۆیە هەلگرا ژمارەیا 9بیت هەکە بزانین ئەویا سۆرە دبیتە $P(A/B)=\frac{1}{10}$.

دڤێت بەرێ خوبدەیە ئەوێ ئێکێ کو مەرجێ گۆیا ڕاکێشایی یا سۆرە، بۆشاییێ ئەگەران دگوهۆریت وبوویە .

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

و ڕوودانا A بوویە ((ڕاکێشانا گۆیەکێ هەلگرا ژمارە 9 بیت)) ژ تویرکەکێ 10 گۆ تێدا هەبن و ڕەنووسکری بن ژ 1هەتا 10 ئەڤژی وێ چەندێ دیاردکەت کۆ ئەگەرا هاتنا ڕوودانا A هەکە B دبیتە ئەگەرا هەلبژارتنا گۆیا ژمارەیا 9 ژ ناڤ 10 گۆیێن هەلگرێن ژمارەیان ژ 1 هەتا 10 بن، ئانکو $\frac{1}{10}$.

هەولبدە تویرکەکێ 10 گۆیێن سۆر تێدا هەنە و ڕەنووسکرینە ژ 1 هەتا 10 و 5 گۆیێن شێن تێدا هەنە و ڕەنووسکرینە ژ 1 هەتا 9. گۆیەک ژ ئەوی تویرکی هاتە ڕاکیشان، ئەگەرا وێ چەندێ ئەو گۆیە هەلگرا ژمارە 3 ، هەکە بزانی ئەو گۆیە یاشینە؟

نموونە 2

خشتەییێ بەرامبەر بەلاڤکرنا دەنگان (ب هزاران) ل سەر 5 پارێزگەهێن وەلاتەکی بۆ هەلبژارتنا سەرۆکاتیێ دیاردکەت بەربژێرێ 1 و بەربژێرێ 2 دوو بەربژێرێ سەرەکینە.

یێن دی	پالێوراو 2	پالێوراو 1	پارێزگەه
5	472	581	1
4	336	345	2
3	207	349	3
3	210	260	4
5	197	148	5

أ ئەگەرا دەنگدەرەک دەنگێ خو دابیتە بەربژێرێ 1، هەکە بزانی ئەو ژ پارێزگەها 3 یە؟

ب ئەگەرا دەنگدەرەک ژ پارێزگەها 2 بیت و دەنگێ خو دابیتە بەربژێرێ 2 چەندە؟

شیکار

أ هەکە ڕوودانا A ((دەنگ دابیتە بەربژێرێ 1)) و ڕوودانا B ((دەنگدەر ژ پارێزگەها 3 بیت)) داخوازی دبیتە هەژمارتنا ئەگەرا ڕوودانا A ، هەکە بزانی ڕوودانا B یا ڕوودایی:

$$P(A/B)=\frac{349}{559}\approx 0.624$$

ب هەکە ڕوودانا A ((دەنگدەر ژ پارێزگەها 2 بیت)) و B ((دەنگ دابیتە بەربژێرێ 2)) ی داخوازی دبیتە هەژمارتنا ئەگەرا ڕووداناA ∩ B

$$P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)$$

لێ $P(A/B)=\frac{336}{1422}$ $P(B)=\frac{1422}{3125}$

ڤێجا،

$$P(A\cap B)=\frac{1422}{3125}\times\frac{336}{1422}\approx 0.108$$

هەولبدە

أ ئەگەرا دەنگدەر ژ پارێزگەها 5 بیت چەندە، هەکە بزانی ئەوی دەنگێ خۆ دابیتە بەربژێرکی نەسەرەکی.

ب ئەگەرا دەنگدەر ژ پارێزگەها 1 بیت و دەنگێ خۆ دابیتە بەربژێرێ 1 بهەژمێرە.

ڕوودانێن سەربەخۆ

پێناسەیا دوو ڕوودانێن سەربەخۆ

دبێژنە دوو ڕوودانێن A و B ل تاقیکرنەکا هەرەمەکی دوو ڕوودانێن سەربەخۆ، هەکە ئەگەرا هاتنا ئێکێ ژ وان کارتێکرن نەبیت ل سەر هاتنا یا دووێ یان ل سەر نەهاتنا یا دووێ، ئانکو هەکە: $P(B/A)=P(B)$ و $P(A/B)=P(A)$.

هەکە تە دووبەرکێن زاریێ هەلدان، ئێك ژوان یا سۆر و یا دی یا زەر بیت، ئەگەرا ڕوودانا A ((دیاربوونا ژمارەیەکا جووت ل سەر بەرکێ زارا سۆر)) کارتێکرنێ ناکەتە ل سەر هاتنا ڕوودانا B ((دیاربوونا ژمارەیەکا جووت ل سەر بەرکێ زارا زەر)) یان نە هاتنا وێ، ئەو دوو ڕوودوانێن سەربەخۆنە.

هەکە A و B دوو ڕوودانێن سەربەخۆبن، دێ $P(A/B)=P(A)$ و

$$P(A/B)=P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \text{ یان } P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

مەرجێ سەربەخۆبوونا دوو ڕوودانان

دوو ڕوودانێن A و B ل تاقیکرنەکا هەرەمەکی دێ بنە دوو ڕوودانێن سەربەخو هەکە $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

نموونە 3

هەکە ئەم ڤەکرینە تاقیکرنا هەرەمەکی ل هەلدانا دوو بەرکێن زاریێ، سوور و زەر، ئەگەرا ئەو هەردوو ژمارەیێن دیاربن ل سەر هەردوو زاران د جووت بن بهەژمێرە؟

شیکار

هەکە A ڕوودانا ((دیاربوونا ژمارەیەکا جووت ل سەر زاران سۆر))بیت و B ڕوودانا ((دیاربوونا ژمارەیەکا جووت ل سەر زارا زەرە)) بیت دێ $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$

چونکی ئەو هەردوو ڕوودان د سەربەخۆنە، دێ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

هەولبدە

ڕێبازی دوو بەرکێن زاریێ هەلدان، سۆر و شین، ئەگەرا سەرجەمێ ئەوان هەر دوو ژمارەیێن دیاربوویین 8 بیت بهەژمێرە، هەکە بزانی ئەو سەرجەمە جووتە؟ تو دشێی ئەنجامی ساخبکەی هەکە تو بۆشایێ ئەگەران بۆ ڤێ تاقیکرنا هەرەمەکی پشکنین بکەی و ژمارا دانەیێن وێ بهەژمێری ل رەخەکی، و ژمارا وان دانەیێن ڕوودانا $A\cap B$ ساخدکەن بهەژمێری ل رەخەکی دی، و ڕێژەیا دووێ بۆ یا ئێکێ دروست بکەی.

1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6
2	1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6
3	1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6
4	1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6
5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6
6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6

نموونە 4

ئەحمەدی دوو كارت ژ كارتێن یاریێ ڕاكێشان ئێك ل دویڤ ئێكێ، بلا A ڕوودانا «كارتا ئێكێ كارتا (شاه) بیت» و B ڕوودانا «كارتا دوویێ كارتا (شاه) بیت».

أ ئەحمەدی كارتا ئێكێ ڤەگەڕاندە دناڤ كارتان بەری ڕاكێشانا كارتا دوویێ ، ئەرێ هەردوو ڕوودانێن A و B سەربەخۆنە؟ ئەگەرا ڕوودانا $A \cap B$ بهەژمێرە.

ب ئەحمەدی كارتا ئێكێ ڤەگەڕاندە ناڤ كارتان بەرێ ڕاكێشانا كارتا دوویێ. ئەرێ هەردوو ڕووداو A و B سەربەخۆنە؟ ئەگەرا ڕوودانا $A \cap B$ بهەژمێرە.

شیكار

أ كۆمەلا كارتێن یاریێ ژ 52 كارتان پێكدهێت، 4 ژ وان كارتان (شاهن) ئەگەرا ڕوودانا A دبیتە $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

ئەگەرا ڕوودانا B دبیتە $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ، چونكی كارتا ئێكێ بۆ كۆمەلا كارتان هاتیە ڤەگەراندن. ڤێجا، ئەگەرا B دەمێ A هاتبینە ڕوودان دبیتە $P(B/A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = P(B)$ ئەڤە دسەلمینت كو هەردوو ڕوودان د سەربەخۆنە و: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$

ب ئەگەرا ڕوودانا A دبیتە $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ و ئەگەرا ڕوودانا B دبیتە $P(B) = \frac{3}{51}$ ، چونكی ژمارا كارتان پشتی ڕاكێشانا ئێكێ دبیتە 51 كو 3 كارتێن (شاه) تێدا هەنە، لەورا ئەگەرا B هەكە A ڕوودابیت نابیتە ئەگەرا B ، ئەڤە دسەلمینیت كو هەردوو ڕوودان نە د سەربەخونە.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = \frac{1}{13} \times \frac{3}{51} = \frac{3}{663} \qquad P(B/A) \neq P(B)$$

هەولبدە

تویركەك 5 گۆیێن سپی و 3 گۆیێن ڕەش تێداهەنە، دوو گۆ ئێك ل دویڤ ئێكێ ڕاكێشان. ل هەر بارەكی دیاربكە ئەرێ هەردوو ڕوودان سەربەخۆنە یان نە؟

أ ڕوودانا A ((گۆیا ئێكێ یا سپی بیت)) و ڕوودانا B ((گۆیا دوویێ یا ڕەش بیت)) هەكە گۆیا ئێكێ هاتبیتە ڤەگەڕاندن بۆ ناڤ تویركێ بەری ڕاكێشانا گۆیا دوویێ.

ب ڕوودانا A ((گۆیا ئێكێ یا سپی بیت)) و ڕوودانا B ((گۆیا دوویێ یا ڕەش بیت)) هەكە گۆیا ئێكێ نە هاتبیتە ڤەگەڕاندن بۆ ناڤ تویركێ بەری ڕاكێشانا گۆیا دوویێ.

ئەگەرا گشتگر Total Probability

چالاكی

سوزانێ دوو بەركێن زارێن شین و سۆر هەلدان، خشتەیێ ل خوارێ بۆشاییێ ئەگەران بۆ ڤێ تاقیكرنا هەرمەكی دیاردكەت. هەكە A_k ڕوودانا (سەرجەمێ هەردوو ژمارەیێن دیاربوویین $= k$) بیت بەرسڤا ئەڤان بدە

1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	
2	1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	
3	1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	
4	1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	
5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	
6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	

.1 هەر ڕوودانەکێ ژ ئەڤان ل سەر شێوەیێ کۆمەلەکێ بنڤیسە: A_2، A_3، A_4، A_5، A_6، A_7، A_8، A_9، A_{10}، A_{11}، A_{12} ئەگەرا هەر ڕوودانەکێ بهەژمێرە.
پاشی ساخبکە کو سەرجەمێ ئەگەرێن وان = 1.

.2 دیاربکە کیژ وان هەردوو ڕوودانان ڕوودانێن جۆدانە (جیانە).

.3 دیاربکە کیژ دەرهاتێ ئەڤێ تاقیکرنا هەرەمەکی دانەیە دڕوودانەکێدا ژ ڕوودانێن پێشتر.

.4 ل سەرشێوەیێ کۆمەلێ بنڤیسە، ڕوودانا B (سەرجەمێ هەردوو ژمارەیێن دیاربوویین ژ 5 نە زێدەتر) پاشی ئەگەرا دیاربوونا وێ بهەژمێرە.

.5 هەر ڕوودانەکێ ژ ئەڤان ل سەرشێوەیێ کۆمەلێ بنڤیسە: $B\cap A_2$ $B\cap A_3$ $B\cap A_4$ $B\cap A_5$، $B\cap A_6$، $B\cap A_7$، $B\cap A_8$، $B\cap A_9$، $B\cap A_{10}$، $B\cap A_{11}$، $B\cap A_{12}$، ئەگەرا هەر ئێکێ ژ وان بهەژمێرە.

.6 ساخبکە کو سەرجەمێ ڕوودانان ل پرسیارا پێشتر = $P(B)$

پشتبەستن ب چالاکیا پێشتر، ئەم دشێین بنڤیسین کو،

$$P(B)=P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)+\ldots+P(B\cap A_{12})$$

ئەڤ پەیوەندییە بارەکی تایبەتە ل یاسایا ئەگەرا گشتگر.

یاسایا ئەگەری گشتگر

هەکە A_1، A_2، .... ،A_n هندەک ڕوودان بن لەتاقیکردنەکا هەرەمەکی، کوهەر دەرهاتەک (ئەنجامەک) ژ دەرهاتێن وێ ئێک ژ ئەڤان ڕوودانان بیت، و هەکە B ڕوودانەک بیت ژ ڕوودانێن تاقیکرنا هەرەمەکی، دێ $P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\ldots+P(B\cap A_n)$

نموونە 5

60%ژ قوتابیێن پۆلا دووازدێ ل ئامادەیا ڕزگاری ئەزموونا زانستی ئەنجامدان و ئەوێن دی ئەزموونا لقی وێژەی ئەنجامدان، ڕێژەیا دەرچوونا بەشێ زانستی 70% بوو، وبەشێ وێژەیی 60% بوو، قوتابیەکی پۆلا دووازدێ بهەرەمەکی هاتە هەلبژارتن، ئەگەرا ئەڤ قوتابییێ دەرچوویت بهەژمێرە؟

شیکار

ئەڤان ڕوودانان دێ بکارئینین

S : ((قوتابی ئەزموونا لقێ زانستی ئەنجامدابیت)).

L : ((قوتابی ئەزموونا لقێ وێژەیی ئەنجامدابیت)).

A : ((قوتابی ل ئەزموونا گشتی دەرچووبیت)).

یادیارە هەر ئەنجامەك ژ ئەنجامێن ئەڤێ تاقیكرنا هەڕەمەكی ئێك ژ هەردوو ڕوودانان S یان L ساخدكەت لێ هەردووان پێكڤە ساخناكەت. لەورا ئەم دشێین ئەگەرا گشتگر بكاربینین.

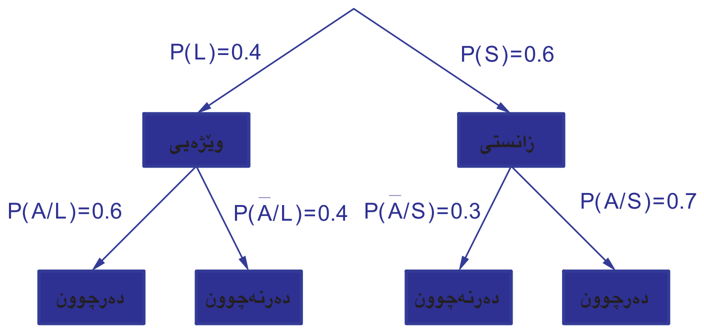
$$P(A) = P(A \cap S) + P(A \cap L)$$

لێ $P(A \cap S) = P(S) \times P(A/S) = 0.6 \times 0.7 = 0.42$

$P(A \cap L) = P(L) \times P(A/L) = 0.4 \times 0.6 = 0.24$

ڤێجا $P(A) = P(A \cap S) + P(A \cap L) = 0.42 + 0.24 = 0.66$

تودشێی پرسیارێ بكارئینانا هێلكارێ دارێ بنوێنی.



هەولبدە 65% ژ قوتابیێن ئامادەیا هەولێر كوڕن و ئەوێن دی كچن، 80% ژ كچان ئارەزوویێ خواندنێ هەنە 55% ژ كوڕان ئارەزوویێ خواندنێ هەنە، قوتابیەك ب هەڕەمەكی هاتە هەلبژاردن، ئەگەر چەندە ئەوی قوتابی ئارەزوویێ خواندنێ هەبیت؟

ڕاهێـــــــنـــان

بەردەوامبوون د بیركارییێدا

1 نموونەیەكێ ل سەر دوو ڕوودانێن سەربەخۆ و نموونەیەكێ ل سەر دوو ڕوودانێن نەسەربەخۆ بینە.

2 چەوا ئەگەرەكێ دهەژمێری كو دوو ڕوودانێن سەربەخۆ ساخبكەت؟

3 جیاوازییێ لناڤبەرا دوو ڕوودانێن جودا و دوو ڕوودانێن سەربەخۆ ڕوونبكە.

ڕاهێنان ئاڕاستەكری

4 A و B دوو ڕوودانن ل تاقیكرنەكا هەڕەمەكی، $P(A) = \frac{3}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$؛ $P(A/B)$ بهەژمێرە. ئەرێ هەردوو ڕوودان سەربەخۆنە؟ بەرسڤا خۆ ڕوونبكە.

5 A و B دوو ڕوودانێن سەربەخۆنە ل تاقیكرنەكا هەڕەمەكی، $P(A) = 0.2$ و $P(B) = 0.3$ ئەڤان بهەژمێرە.

أ $P(A \cap B)$ ب $P(A \cup B)$ ج $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ د $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

راهێنان و بجهئینان

6 A و B دوو روودانێن سەربەخۆنە $P(A)=\frac{3}{8}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$
$P(A/B)$ و $P(B/A)$ بهەژمێرە.

7 نەوزاد پارچەیەکی پارەیێ کانزایی سێ جاران هەڵدا ئێك ل دویڤ ئێك. ئەگەرا تاقیکردنەیی $P(A/B)$ بهەژمێرە، دەمێ A: ((خەت زێدەتر ژ شێری دیاربیبیت)) و B: ((خەت ل هەڵدانا ئێکێ دیاربیبیت)).

8 A و B دوو روودانێن سەربەخۆنە ل تاقیکردنەکا هەرەمەکی.
$P(A)=0.5$،$P(B)=0.3$،$P(A\cap B)=0.15$.
$P(A/B)$ بهەژمێرە. ئەرێ ئەو دوو روودان سەربەخۆنە؟ روونبکە.

9 **پیشەسازی** کۆمپانیا فورات بۆ بەرهەمئینا گلۆپێن کەهرەبێ 3 کارگەها هەنە . بەرهەمێ کارگەها ئێکێ دبیتە 40% ژ هەموو بەرهەمێ کۆمپانیێ و بەرهەمێ هەردوو کارگەهێن دی دبیتە 30% ژ هەموو بەرهەمێ کومپانیێ و بەرهەمێ هەردوو کارگەهێن دی دبیتە 30% ژ هەموو بەرهەمێ کومپانیێ. ل رەخەکی دی رێژەیا وان کلۆپێن یێ مفا دبیتە 20% ژ بەرهەمێ کارگەها ئێکێ و 15% ژ بەرهەمێ کارگەها دووێ 10% ژ بەرهەمێ کارگەها سێێ. گلۆپەك ب شێوەیەکێ هەرەمەکی هاتە هەلبژارتن، ئەگەرا وێ گلۆپا بێ مفا بیت چەندە؟
و ئەگەرا ئەو ژ بەرهەمێ کارگەها سێێ بیت هەکە ئەویا بێ مفابیت.

10 **وەرزش:** تیپا هەڤلێریا تەپا پێ 70%ژ یارییێن خو دناڤ عیراقێدا دکەت و ئەوێن دی ل دەرڤەی وەلاتی دکەت، ئەگەرا برنێ ل ناڤ وەلاتی 0.6 و ل دەرڤەی وەلاتی 0.5.
ل حەفتییا داهاتی ئەو تیپە یاریەکێ دێ ئەنجامدەت ، ئەگەرا برنا وێ چەندە؟ ئەگەرا ئەو یاریی ل ناڤ وولاتی هاتبیتە ئەنجامدان ل دەمێ ئەو یاریا بربیت چەندە؟

11 150 مامۆستا سەرپەرشتیا خولێن راهێنانێ ل زانستی و بیرکاری دکەن، و ل دەمێ خۆلێ سێ جۆرێن چالاکیان (شیکارکرنا پرسیاران و گۆتنا وانەیان و نڤیسینا راپۆرتان) ئەنجام ددەن

	شیکارکرنا پرسیاران	وانە گۆتن	نڤیسینا راپۆرتان	سەرجەم
زانست	45	18	27	90
بیرکاری	33	9	18	60
سەرجەم	78	27	45	150

أ) ئەرێ هەردوو رووداان «ل دویڤ چوونا خولا بیرکاریێ دکەت» و «پرسیاران شیکاردکەت» دوو رووداانێن سەربەخۆنە؟

ب) ئەرێ هەردوو رووداان «ل دویڤ چوونا خولا زانستان دکەت» و «راپۆرتان دنڤیست» دوو رووداانێن سەربەخۆنە؟

لێنێرینەك بۆ پاش

دانای دوو بەركێن زارێن هەلدان، ئەگەرا ئەڤان بهەژمێرە.

12 سەرجەمێ دوو ژمارێێن دیاردبن 12 بیت.

13 ئێك ژ هەردوو ژمارەیێن دیاربوۆیین یكێماسی كت بیت؟

14 ئێك ژهەردوو ژمارەیێن دیاربوۆیین یكێماسی ژ 3 كێمتر بیت؟

لێنێرینەك بۆ پێش

15 ئەو خشتەیێ ل خوارێ نمرەیێن ژمارەیەكا پالێوراوێن بهێنە وەرگیرتن ل كولێژا نۆژداریێ دیاردكەت ، خشتەیێ تمامبكە ب هەژمارتنا تێكڕایێ نمرەیێن هەرئێكێ ژ وان. بۆ زانین گرانكرنا نمرەیان ل وەرگیرتنێ ب ڤێ شێوەیی بوو:

بیركاری 3 ؛ زانست 4 ؛ زمانێ ئینگلیزی 2 ؛ زمانێ كوردی 1

قوتابی	بیركاری	زانست	زمانێ ئینگلیزی	زمانی كوردی	تێكڕا
لاری	45	65	55	70	
لۆرا	75	70	50	60	
لیندا	80	65	55	40	

وانە
3

نموونەیێن هێلی Linear Models

بۆچی؟

هەندێك جار وا دیارە كە كۆمەڵە پێدراوێك بەهای نەخشەی هێلی بەنزیكەی دیاریدەكات. ئەگەر لە توانێ دابێت ئەو نەخشەیە دیاریبكەیت ئەوا دەتوانی هەموو ئەو شتانەی پێشبینی دەكرێن سەر بە بابەتەكەت بینووسیەوە.

ئارمانج

- نقیسینا سامپلەكا هێلی بۆ نواندنا كۆمەلەكا پێدایيان
- بكارئینانا نموونەیێن هێلی بۆ ئەنجامدانا پێشبینیان

زاراڤ
Vocabulary

لێژه بووە
Regression

پێكڤە گریدان(پەیوەست)
Correlation

هاوكولكەیێ پیكڤەگرێدانێ
Correlation coefficient

ڕاستەهێلی باشترین نواندن
Line of best fit

سیسركێن سنۆبەر دەنگەكی دەردئینن بەهۆیێ لێكخشاندنا هەردوو چەنێكن خۆ، هێزا ئەڤی دەنگی زیدەدبیت ب زیدبوونا لەزا لێكخشاندنا هەردوو جەنگان. زانایان دیت كو لەزا ئەڤێ لڤینێ(لێكخشاندنێ) زیدەدبیت ب زێدبوونا پلەیێن گەرمیێ، و ب ئەڤێ دشێن پلەیێن گەرمیێ دیاربكەن ب بهیستنا دەنگی ئەڤی مێرویی. خشتەیێ ل خوارێ پێدایان لسەر دەنگێن ئەڤێ مێروویێ دیاردكەت (ژمارا لەرەلەران دچركەكێدا) كود 15 پلەیێن گەرمیێ یێن جودا دە هاتینە تومارکرمن.

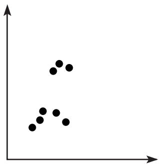
ژمارا لەرەلەران	20	16	20	18	17	16	15	17	15	16	15	17	16	17	14
پلەیا گەرمیێ	89	72	93	84	81	75	70	82	69	83	80	83	81	84	76

ئەرێ تودشێی پلەیا گەرمیێ بخەملینی هەكە تو هێزا دەنگێ ئەڤان مێرۆیان بزانی (ژمارا لەرەلەران دچركەكێدا)؟

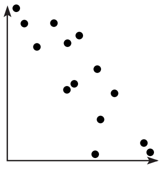
لێژبوون Decay

مرۆڤ تۆشی گەلەك پرسیاران دەبن كو دوو گۆڕاوێن ئامارەیی تێداهەنە وئێك ژوان كارتێكرنێ ل سەر یێ دی دكەت وەكی ل پرسیارا پێشتر. ئامارناس **لێژبوونێ Regression** بەكاردئینن بۆ لێكۆلینا ئەڤان جۆرێن پەیوەندییان پێ هندەك پیدایێن دیاركری.

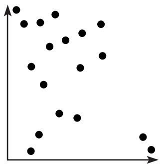
ئامارناس **خالێن ڕوونكرنێ Scatter Plot** بكاردئینن بۆ تێگەهشتنا پەیوەندییێ لناڤبەرا دوو گۆڕاوان و ئاراستەیێ وێ و ڕادەیێ هێزاوێ. ئەو بەحسێ **پێكڤەگرێدانێ Correlatio** دەكەن ژ بۆ دەربڕینێ بكەن ژ هێزا پەیوەندییا لناڤبەرا دوو گۆڕاوان و ئاڕاستەیێ وان.



پێكڤەگریدان یا موجەبە
لاری مووجەبە



پێكڤەگرێدان یا
سالبە لاری سالب



پێكڤەگرێدان نینە

ئامارناس ڕادەیێ نواندنا سامپلەكی هێلی بۆ كۆمەلە پێدایان ب هۆیێ r **دپیڤن و دبێژنێ هاوكولكێ پێكڤەگرێدانێ Correlation coefficient** .

فێربە و ژبەربکە

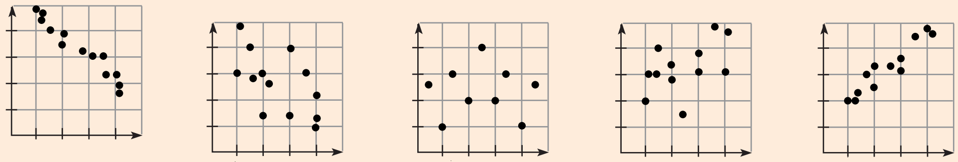
سیفەتێن هاوکولکەیێ پێکڤە گرێدانێ

هاوکۆلکەیێ پێکڤەگرێدانێ Correlation Coefficient ژمارەیەکە ئەڤێ $-1 \le r \le 1$ ساخدکەت.

هەکە $r = 1$ خالێن ڕوونکرنێ ئەوێن کۆمەلا پێداییان دنوینن، ڕاستەهێلەکی لاری وی مووجەب پێکدئینن.

هەکە $r = 0$ پێکڤەگرێدان دناڤبەرا هەردوو گۆڕاواندا نینە.

هەکە $r = -1$ خالێن ڕوونکرنێ ئەوێن کومەلا پێداییان دنوێنن ڕاستەهیلەکی لارێ وی سالب پێکدئینن.



$r = -0.95$ $r = -0.6$ $r = 0$ $r = 0.6$ $r = 0.95$

ئامارناس جۆرێن جیاوازێن نەخشەیان بکاردئینن بۆ وەسفکرنا پەیوەندییا لناڤبەرا دوو گۆڕاوان، لێ ئەو گەلەک گرنگیێ ددەنە بکارئینانا نەخشەیێن هێلی دئەڤێ بواریدا، ب تایبەتی هەکە خالێن ڕوونکرنێ پێکڤەگرێدانەکا بهێز دیارکریە و وەسا دیاربیت کو ئەو خالە ب نێزیکی ڕاستەهێلەکی پێکدئینن ل ڤێ وانێ دێ بەحسێ ئەڤێ کەین: **لێژەبوونا هێلی Linear Regression**، هەکە دوو گۆڕاو ب پەیوەندییەکا هێلی یا بهێز پێکڤە هاتبنە گرێدان. تو بۆ دەربرینا ئەڤێ پەیوەندیێ و ئەنجامدانا پێشبینیان ڕاستەهێلکێ **باشترین نواندن Line of Bestfit** بکاربینە. بۆ دیارکرنا ڕاستەهێلێ باشترین نواندن بۆ پەیوەندیا لناڤبەرا دووگۆڕاوێن ئامارێ گەلەک ڕێکێن جیاواز هەنە:

(1) **ڕێیا دووجاییێن کێمترین Least Squares**، ئەڤ ڕێیە گەلەک یا هویر و دروستە، لێ پێدڤی ب هەژمارتنێن ئێکجار زۆر هەیە، یان پێدڤی بکارئینانا تەکنۆلۆژیا هەیە.

(2) **ڕێیا وێنەیێ ڕوونکرنێ Graphic Method**، ب ئەڤێ ڕێکێ خالێن ڕوونکرنێ بۆ خشتەیێ پێداییان دیاردکەن، و ڕاستەهێلەکی دکێشن کو د نێزیکی هەموو خالانرا ببۆریت.

(3) **ڕێیا ڕاستەهێلێ مایەر Mayer Line**، ب ئەڤێ ڕێکێ پێداییان بەرەڤ ژۆر ڕێزدکەن و دابەش دکەت بۆ دوو بەشێن یەکسان نێزیکی. پاشی دوو خالان دیاربکەن بۆ نواندنا هەر بەشەکی، پاشی ئەو ڕاستەهێلێ د هەردوو خالانرا دبۆریت ددانن باشترین ڕاستەهێلێ نواندنێ.

(4) **ڕێیا ناڤەڕاستان Median Method**، ب ئەڤێ ڕێێ کۆمەلاپێداییان بەرەڤ ژۆر ڕێزدکەن و دابەش دکەن بۆ سێ کۆمەلان. سێ خالان بۆ نواندنا هەرسێ کۆمەلان دیاردکەن، پاشی ڕاستەهێلەکێ دروستدکەن د خالا دوویێ رابۆریت و تەریب بیت دگەل وی ڕاستەهێلێ دا د هەردووخالێن بەشێ ئێکێ و سێێ دنوینن رابۆریت، ل ئەڤێ وانەیێ دێ فێربینە ڕێیا وێنەیێ ڕوونکرنێ و ڕاستەهێلێ مایەرو ڕێیا ناڤەڕاستان دا دویربین ژ هەژمارتنێن ب ئالۆز. و ژبیرنەکە ئەنجامێن ئەڤان ڕێیان ئەنجامێن نێزیککرینە .

ڕێیا وێنەیێ ڕوونکرنێ Graphic Design

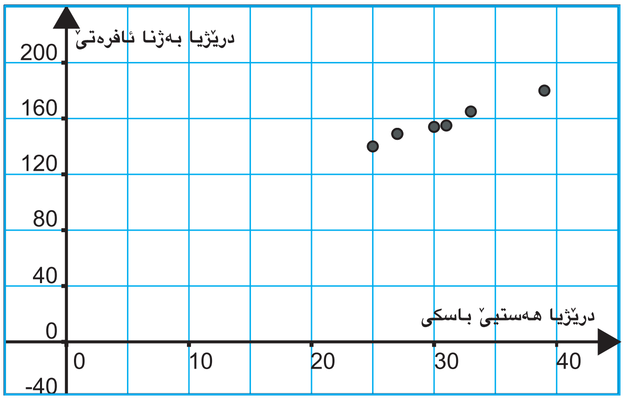
نموونە 1

بجهئینان ل سەر زانستێ ڕەگەزێن مرۆڤان: زانایێن ڕەگەزێن مرۆڤی درێژیا هەستیێ باسکی (ئەو ئەنیشکێ دگەل ملێ مرۆڤی دگەهێت) لنك ئافرەتێ بکاردئینن بۆ خەملاندنا درێژیا بەژناوێ، خشتەیێ ل خوارێ درێژیێن ژمارەکا ژنان (ب سانتیمەتران) و درێژیێن باسکی لنك وان دیاردکەت. خالێن ڕوونکرنێ بۆ نواندنا ئەوان پێداییان ل سەر رووتەختی دیاربکە، و درێژیا هەستیێ باسکی وەك گۆڕاوێ ئازاد بکاربینە. پاشی هاوکێشەیا ڕاستەهێلێ باشترین نواندن بۆ ڤان پێداییان بهەژمێرە. درێژیا بەژنا ئافرەتەکێ دێ چەندبیت هەکە درێژیا هەستیێ باسکی لنك وێ 37cm بیت؟

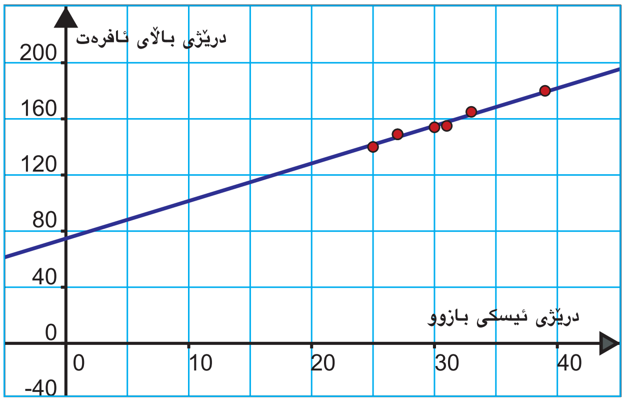
درێژیا هەستیێ باسکێ لنك ژمارەیەکا ئافرەتان								
درێژیا هەستیێ باسکی	35	27	30	33	25	39	27	31
درێژیا بەژنا ئافرەتیێ	167	149	154	165	140	180	149	155

شیکار

پێنگاڤ 1 : دیاریکرنا وان خالێن ڕوونکرنێ ئەوێن پێداییان دنوینن



پێنگاڤ 2 : وێنەکێشانا ڕاستەهێلەکی نێزیك بۆ هەموو خالان.



پێنگاڤ 3 : دیارکردنا دوو خالان ل سەر ئەڤێ ڕاستەهێلێ

$(32, 160)$ و $(14, 110)$.

پێنگاڤ 4 : هەژمارتنا هاوکێشەیا ئەوێ ڕاستەهیلی د ڤان هەردوو خالانرا د بۆریت.هاوکێشەیا ئەوێ ڕاستەهێلێ د ئەڤان هەردوو خالان $(14, 110)$ و $(32, 160)$دا دبۆریت بهەژمێرە.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 110 = \frac{160 - 110}{32 - 14}(x - 14)$$

$$y = 2.78x + 71.11$$

بۆ هەژمارتنا بهایێ پێشبینکری بۆ درێژیا بەژنا ئافرەتەکێ کو درێژیا هەستیێ باسکی لنك وێ 37cm بیت، و ل جهێ x (37) دانە د هاوکێشەیا ڕاستەهێلێ باشترین نواندندا.

$y = 2.78x + 71.11$

$y = 2.78 \times 37 + 7.11$

$y = 173.97$

174 cm

هەولبدە

پایسکلێن سواربوونێ: خشتەیێ ل خوارێ پێدایێن ژمارەیا ئەو کیلۆمەترێن ڕکابەر ل دویڤ دەمێ (دەمژمێر) ل بەریکانەکا سواربوونا پایسکلان دبڕن دیاردکەت. هاوکێشەیا ڕاستەهێلێ باشترین نواندن بۆ ئەڤان پێداییان بهەژمێرە. ڕکابەر دێ چەندێ ل دەمێ 11 دەمژمێران برێت.

بەریکانا سواربوونا پایسکلان													
10	2	7	7	8	3	10	4	9	5	5	2	6	1	دەم (ب دەمژمێران)
97	31	71	60	75	36	104	56	98	57	71	20	45	9	دووری (بەکیلۆمەتر)

ڕاستەهێلی مایەر Mayer St.line

نموونە 2

بجهئینان ل سەر بارێ کەش و هەوایی

بازێری ئەکرۆن ل ئەمریکا و بازێرێ ولنکگتون ل نیوزیلەندا هەمان دووری هەنە ژ هێلا کەمەری(خط الاستواء). ئێك ژ وان ل نیڤا سەری یا گۆیا ئەردییە، و ئەوا دی ل نیڤا خواری یا گۆیا ئەردییە. خشتەیێ ل خوارێ بلندترین ناڤەندێن ژمارەی بۆ پلەیا گەرمیێ ب فەهرەنهایتی ل هەردوو بازێران ل دەمێ 12 هەیڤان دیار دکەت، خالێن ڕوونکرنێ بۆ پیدایێن خشتەیێ دیاربکە. پێکڤە گرێدانێ ل ناڤبەرا هەردوو گۆڕاوان دیاربکە دەمێ ناڤەندێ ژمارەی 65 بیت ل ئەکرۆن؟

ناڤەندێن ژمارەیی (تێکرایی)یێن پلەیێن بلندیێ گەرمیێ (فهرەنهایت)												
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	مەه
38	49	61	73	80	82	78	70	59	48	37	33	ئەکرۆن
64	60	57	55	52	51	53	56	62	65	67	67	ولنکگتۆن

شیکار

پێنگاڤ 1 : گۆڕاوان سەرژنوو بەرەڤ ژۆر ریزبکە ل دویڤ گۆڕاوێ ئازاد.

82	80	78	73	70	61	59	49	48	38	37	33	ئەکرۆن
51	52	53	55	56	57	62	60	65	64	67	67	ولنکگتۆن

پێنگاڤ 2 : ئەڤێ خشتەیی دابەشبکە بۆ دوو خشتەیێن یەکسان ل ستوونان.

82	80	78	73	70	61		59	49	48	38	37	33	ئەکرۆن
51	52	53	55	56	57		62	60	65	64	67	67	ولنکگتۆن

پێنگاڤ 3 : x_1 ، ناڤەندێ بهایێن ئازاد و y_1ناڤەندێ بهایێن پەیوەست ، ل بەشێ ئێکێ یێ خشتەیی بهەژمێرە. پاشی x_2 ناڤەندێ بهایێن ئازاد و y_2 ناڤەندێ بهایێن پەیوەست، ل بەشێ دووێ یێ خشتەیی بهەژمێرە.

$$x_1 = \frac{33+37+38+48+49+59}{6} = 44 \quad \text{و} \quad y_1 = \frac{67+67+64+65+60+62}{6} = 64.16$$

$$x_2 = \frac{61+70+73+78+80+82}{6} = 74 \quad \text{و} \quad y_2 = \frac{57+56+55+53+52+51}{6} = 54$$

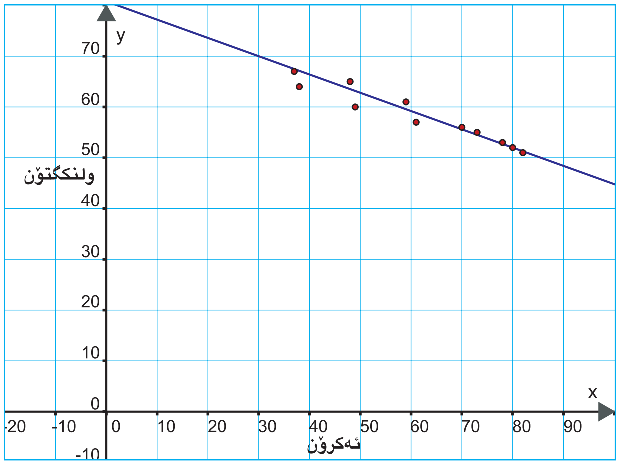
پێنگاڤ 4 : هاوکێشەیا ئەوی ڕاستەهیلێ د ئەڤان هەر دووخالایێن (x_1, y_1) و (x_2, y_2) را دبوریت بهەژمێرە.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 64.16 = \frac{54 - 64.16}{74 - 44}(x - 44)$$

$$y = -0.34x + 79.06$$

پێنگاڤ 5 : خالێن ڕوونکرنێ بنوینە و ڕاستەهێلێ باشترین نواندن بکێشە.



هەکە ناڤەندێ ژمێرەی بلندترین پلەیا گەرمیێ ل ئەکرۆن 65 پلە بیت، پێشبینی دهێتە کرن ناڤەندێ ژمێرەیی ل لنکگۆتی ئەڤە بیت:

$$y = -0.34x + 79.06$$

$$y = -0.34 \times 65 + 79.06$$

$$y = 56.96$$

ئانکو 57 پلەیە بنێزیکی.

هەولبدە

تۆیا سەبەتێ خالێن ڕوونکرنێ بۆ نواندنا پێدایێن خشتەیی دیاربکە، پێکڤە گرێدانا لناڤبەرا هەردوو گۆڕاوان دیاربکە، ڕاستەهیلێ باشترین نواندن وێنەبکە و هاوکێشەیا وی دیاربکە. ژمارەیا خالان ل دەمێ 25 خولەکان ب چەندێ پێشبینیدکەی ؟

ژمارەیا خالان ل دەمەکی										
30	15	27	19	23	39	20	8	35	28	دەم
19	4	15	9	10	31	12	2	13	16	خال

ڕێیا ناڤەراستان

نموونە 3

بجهێنان ل سەر خوارنێ

خشتەیێ ل خوارێ پێدایان ل سەر بڕێ دوهنی و بهایێ گەرمیێ ل جۆرەکی لەفان دیاردکەت. هاوکێشەیا ڕاستەهێلێ باشترین نواندن بهەژمێرە. تۆ پێشبینی دکەی کو بهایێ گەرمیێ ژ جۆرەکێ لەفان چەندە هەکە 17 گرامێن دوهنی تێداهەبن.

پێدایێن خوارنێ بۆ هندەك جۆرێن لەفان								
برێ دوهنی (ب گەرامان)	5	9	12	15	12	10	21	14
بهایێ گەرمیێ (ب گەرمۆکان)	360	375	460	420	530	455	580	390

شیکار

پێنگاڤ 1 : سەر ژنو خشتەیی بنڤیسە کو پێدایییان بەرەڤ زۆر رێزبکە پێ بهایێن گۆڕاوێ ئازاد، کو ئەو برێ روونی ل ڤی پرسیارێ.

پێدایێن خوارنێ بۆ هندەك جۆرێن لەفان								
برێ دوهنی (ب گەرامان)	5	9	10	12	12	14	15	21
بهایێ گەرمیێ (ب گەرمۆکان)	360	375	455	460	530	390	420	580

پێنگاڤ 2 : ئەڤی خشتەیی دابەشبکە بۆ سێ بەشان کو ژمارەیا ستوونان ل بەشێ ئێکێ و سێێ یەکسان بن و ژمارەیا ستوونان ل بەشێ دووێ یا نزیك بیت بۆ ژمارەیا هاوبەش یا هەردوو ستوونێن ئێکێ و سێێ.

پێدایێن خوارنێ بۆ هندەك جۆرێن لەفان										
برێ دوهنی (ب گەرامان)	5	9	10		12	12		14	15	21
بهایێ گەرمیێ (ب گەرمۆکان)	360	375	455		460	530		390	420	580

پێنگاڤ 3 : x_1 ناڤەراستێ بهایێن گۆڕاوێ ئازاد، و y_1ناڤەراستێ بهایێن پشتبەست ل بەشێ ئێکێ بهەژمێرە، $x_1 = 9$ و $y_1 = 375$ و x_3، ناڤەراستێ بهایێن گۆڕاوێ ئازاد و y_3ناڤەراستێ بهایێن پشتبەست ل بەشێ سێێ بهەژمێرە. $x_3 = 15$ و $y_3 = 420$

پێنگاڤ 4 : لارێ ئەوی ڕاستەهیلێ د ئەڤان هەردوو خالانرا (x_1, y_1) و (x_3, y_3) دبۆریت بهەژمێرە.

لارێ ڕاستەهێلێ d ئەوێ د ئەڤان هەردوو خالانرا (x_1, y_1) و (x_3, y_3) دبۆرێت دبیتە

$$m = \frac{420 - 375}{15 - 9} = 7.5$$

پێنگاڤ 5 : x_2 ناڤەندێ (تێکرایێ) بهایێن هەمی گۆڕاوێن ئازادی و y_2ناڤەندێ بهایێن هەموو گۆڕاوێن پشتبەست بهەژمێرە.

$$x_2 = \frac{5 + 9 + 12 + 15 + 12 + 10 + 21 + 14}{8} = 12.25$$

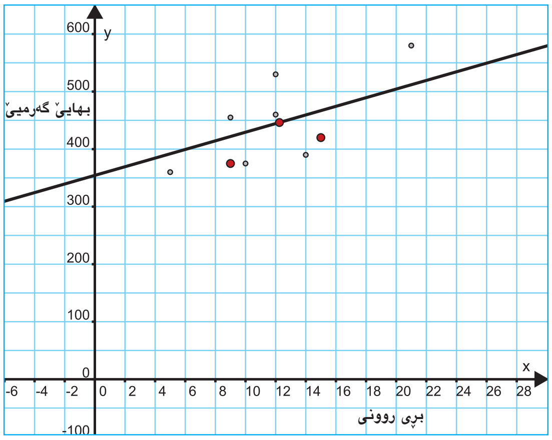
$$y_2 = \frac{360 + 455 + 460 + 420 + 530 + 375 + 580 + 390}{8} = 446.25$$

پێنگاڤ 6 : هاوکێشەیا ئەوی ڕاستەهێلێ د خالا (x_2, y_2) رادبۆریت و لارێ وی m بیت بهەژمێرە.

$y - 446.25 = 7.5(x - 12.25)$ یان $y = 7.5x + 354.375$

ئەو هاوکێشەیا بدەست تە کەفتی دبیتە هاوکێشەیا باشترین ڕاستەهێلێ نواندنێ بنێزیکی بۆ کۆمەلا پێدایییان.

پێنگاڤ 7 : لێ خالێن ڕوونكرنێ بۆ نواندنا پێداییێن خشتەیێ وێنەبكە، خالێن (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (x_3, y_3) وێنەبكە، ڕاستەهێلێ باشترین نواندن بكێشە.



بهایێ گەرمیێ ل لەخەكا 17 گرامێن دوهنی تێدا هەبن دبیتە:

$$y = 7.5x + 354.375$$
$$y = 7.5 \times 17 + 354.375$$
$$y = 481.875$$

ئانكو782 گەرمۆكێن گەرمیێ بنزیكی.

هەولبدە ئەڤ خشتەیە پێداییان دیاردكەت ل سەر هندەك ترومبێلان ب هەڕەمەكی هاتبوونە هەژمارتن و ئەو دووریا ترومبیلا دبڕیت ب مەزاختنا ئێك لێتەرێ سوتەمەنیێ ل دویڤ هێزا وێ (ب هێزا هەسپی).

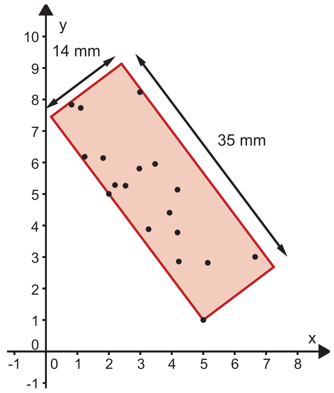
هێزا ترومبێلێ و دووریا دبڕیت ب لیتەرەكێ سوتەمەنیێ										
هێز	175	255	140	165	115	120	190	180	110	125
دووریی ل هەر لیترەكێ (km/l)	3.61	2.13	4.1	2.95	5.25	4.6	2.46	3.45	5.75	4.95

خالێن ڕوونكرنێ وێنەبكە بۆ نواندنا پێداییێن خشتەیی بكارئینانا هێزا ترومبێلی وەك گۆڕاوێ ئازاد، پاشی هاوكێشەیا ڕاستەهێلێ باشترین نواندن بۆ ڤان پێداییان بهەژمێرە، ئەو دووریا ترومبێلەك هێزا وێ 210 هەسپ بیت دبڕیت چەندە؟

هاوكۆلکەیێ پێگڤەگرێدانێ

هەژمارتنا هاوكۆلكەیێ پێكڤە گرێدانێ پێدڤی هەیە بكارئینانا هەژمارتنێن ئالۆز یان بكارئینانا تەكنۆلۆژیا. لێ دشێن بهایێ نێزیك بۆ ئەوی هاوكۆلكەیێ پێگڤەگرێدانێ ب وێنەیێ روونكرنێ بهەژمێرن.

بۆ هەژمارتنا بهایێ نێزیك یێ هاوكۆلكەیێ پێگڤەگرێدانێ بۆ خالێن روونكرنێ، بچووكترین لاكێشەیەكێ وێنە بكە كو هەموو ئەڤان خالان بخۆڤە بگریت، و درێژیا لایێ وێ یێ درێژ L و درێژیا لایێ وێ یێ كورت ℓ بهەژمێرە. بهایێ نیزیك بۆ هاوكۆلكەیێ پێگڤە گرێدانێ ئەڤەیە $r \approx \pm\left(1-\frac{\ell}{L}\right)$ نیشانا وێ دبیتە نیشانا پێگڤەگرێدانێ، ئانكو نیشان یا $(-)$ هەكە پێگڤەگرێدان یا سالب بیت و $(+)$ هەكە پێگڤە گرێدان یا موجەب بیت.



نموونە 4

بهایێ نێزیك یێ هاوكۆلكەیێ پێگڤەگرێدانێ بۆ خالێن ڕوونكرنێ یێن بەرامبەر بهەژمێرە.

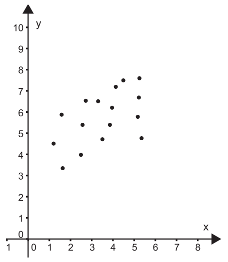
شیكار

$\ell = 14$ ، $L = 35$ و پێكڤە گرێدان یا سالبە،

$$r \approx -\left(1-\frac{\ell}{L}\right) = -\left(1-\frac{14}{35}\right) = -0.6$$

هەولبدە

بهایێ نیزیك یێ هاوكۆلكەیێ پێگڤەگریدانێ بۆ خالێن ڕوونكرنێ یێن بەرامبەر بهەژمێرە.



ڕاهێنان

بەردەوامبوون د بیر کارییێدا

1 هاوكێشەیا باشترین ڕاستەهیلێ نواندنێ بۆ كۆمەلەكا پێداییان ئەڤەیە $y = 3.2x - 12.5$ ئەرێ هاوكولكەیێ پێگڤەگرێدانێ لناڤبەرا هەردوو گۆڕاوێن ئامارەیی یێ موجەبە یان سالبە؟

2 هاوكۆلكەیێ پێكڤەگرێدانێ بۆ دوو گۆڕاوێن ئامارەیی دبیتە $r_1 = 0.65$ و هاوكۆلكەیێ پێگڤەگرێدانێ بۆ دوو گۆڕاوێن دی $r_2 = -0.75$، كێژ هەردوو هاوكۆلكەیان دەربڕینێ ژ پێگڤەگرێدانەكا بهێزتر دكەت.

3 ئەرێ تو دشێی بهایەكی نێزیك بۆ هاوكۆلكەیێ پێگڤەگرێدانێ بینی، هەكە خالێن ڕوونكرنێ هیچ پێگڤەگرێدانەكێ لناڤبەرا هەردوو گۆڕاوان دیارنەكەن ؟ بەرسڤا خۆ روونبكە.

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

4 **ترومبێل**: خالێن ڕوونکرنێ وێنەبکە بۆ نواندنا پێدایێن خشتەیی، بکارئینانی ژمارەیا گالۆنان وەك گۆڕاوێ ئازاد، ڕاستەهێلی باشترین نواندن بکێشە و هاوکێشەیا وێ بهەژمێرە، ئەرێ پێکڤەگرێدانەکا بهێز دیاردبیت.

دووریا هاتیە برین(km)							
ژمارەیا گالۆنان	11.2	9.8	10.6	10.1	12.3	8.7	10.1
دووریا هاتیە=برین	338	296	332	324	368	263	305

5 **ئابووری**: خشتەیێ ل خوارێ پێدایێن ل سەر تێکرایێ ناڤەندێ پلەیێن گەرمیێ ل درێژیا حەفتیەکێ و نرخێ فاتۆرا سارکرنێ (ب هزاران دیناران) ل مالەکێ دیاردکەت.

فاتۆرا سارکرنێ ل مالەکێ							
ناڤەندێ پلەیێن گەرمیێ	38	42	44	36	42	49	38
برێ پارەی ل فاتۆرێ	93	79	75	83	74	67	86

أ خالێن ڕوونکرنێ بۆ نواندنا پێدایێن خشتەیی وێنەبکە، ناڤەندێ پلەیێن گەرمیێ بکاربینە وەك گۆڕاوێ ئازاد.

ب هاوکێشەیا ڕاستەهێلێ باشترین نواندن بهەژمێرە بکارئینانا وێنەیێ ڕوونکرنێ ئەڤێ ڕاستەهێلی وێنەبکە.

ج ئەرێ پێکڤەگرێدان لناڤبەرا هەردوو گۆڕاوان یا مووجەبە یان یاسالبە ؟ ئەرێ پێکڤەگرێدان لناڤبەرا وان یا بهێزە یان لاوازە؟

د برێ پارەیی بۆ مەهەکێ کو ناڤەندێ پلەیێن گەرمیێ 40 پلەبیت بخەملینە، هویریا ئەڤێ خەملاندنێ دیاربکە؟

6 **قوتابخانە** خشتەیێ ل خوارێ پێداییان بۆ ژمارەیەکا مامۆستایان و ژمارەیەکا قوتابیان ل سامپلەکێ هەڕەمەکی ژ چەند قوتابخانان دیاردکەت.

ژمارەیا قوتابیان و ژمارەیا مامۆستایان								
ژمارەیا مامۆستایان	92	52	114	49	110	62	76	84
ژمارەیا قوتابیان	1050	653	753	381	1312	813	796	910

أ خالێن ڕوونکرنێ بۆ نواندنا پێداییان وێنەبکە بکارئینانی ژمارەیا مامۆستایان وەك گۆڕاوێ ئازاد.

ب بکارئینانا ڕێیا مایەر هاوکێشەیا ڕاستەهێلێ باشترین نواندن بهەژمێرە و وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ ئەوی ڕاستەهێلی بکێشە.

ج ژمارەیا مامۆستایان ل قوتابخانەکێ کو 600 قوتابیان بخۆڤە بگریت بخەملینە، ئەڤ خەملاندنا چەند یا هویرە؟

راهێنان و بجهئینان

7 **نرخاندنا پلیێتان**: رێڤەبەرێ تیمەکا موزیکێ بهایێ پلیێتین هاتنە ژووری بۆ ئاهەنگا تیمێ و ژمارەیا ئامادەبووان تومارکرن وەك ل ڤێ خشتەیی ل خوارێ دیارکری.

ژمارەیا ئامادەبوویان ل دویڤ بهایێ پلیێتێن چوونا ژوورێ (ب هزاران دیناران)									
نرخ	6	5	8.5	8	10	5.5	7	7.5	8
ژمارەیا ئامادەبووان	213	256	155	194	160	267	258	210	235

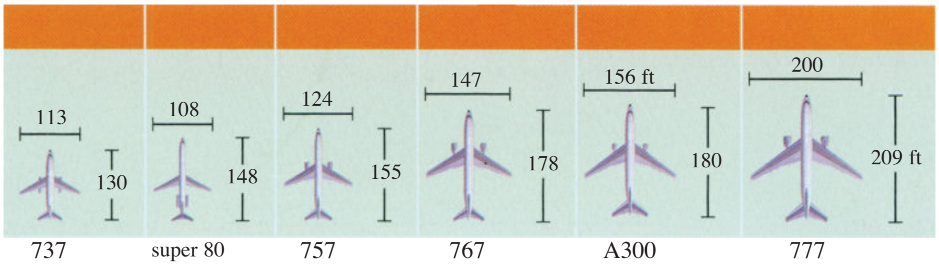
أ خالێن رِوونکرنێ بۆ نواندنا پێداییێن خشتەیی بکارئینانا بهای وەك گۆراوێ ئازاد وێنەبکە.

ب ئەرێ پێگڤەگریدان لناڤبەرا هەردوو گۆراوان یا مووجەبە یان سالبە ؟ ئەرێ پێگڤەگریدان لناڤبەرا وان یا بهێزە یان لاوازە؟

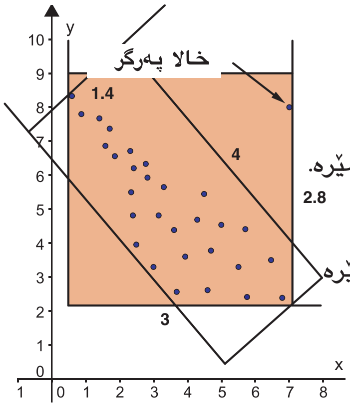
ج هاوکێشە یا راستەهێلێ باشترین نواندن بهەژمێرە بکارئینانا وێنەیێ رِوونکرنێ، ئەوی وێنەیێ رِوونکرنێ بکێشە، پاشی بهایێ هاوکۆلکەیێ پێگڤەگریدان بهەژمێرە، هەکە بژمێرا رِوونکرنێ هەبوو.

د ژمارەیا ئامادەبووان ل ئاهەنگێ بخەملینە کو نرخێ پلیێتا چوونا ژوورێ 9 هزار دینار بیت، ئەڤە خەملاندنە چەند یاهویرە؟

8 **فرِۆکەڤانی**: خشتەیێ ل خوارێ درێژیا هندەك فرِۆکەیان و پانیا هەردوو پەرِێن وان دیاردکەت. خالێن رِوونکرنێ بکێشە بۆ نواندنا پێداییێن خشتەی بکارئینانا درێژیێ وەك گۆراوێ ئازاد. راستەهیلێ باشترین نواندنێ بکێشە و هاوکێشەیا وی دیاربکە.



9 وێنەیێ بەرامبەر خالێن رِوونکرنێ بۆ وێ پەیوەندیێ دیاردکەت ئەوا لناڤبەرا ژیێ قوتابییەکی ل قووناغا بنەرِەت و دەمێ ڤەدکێشیت بۆ گرێدانا قەیتانا پێلاڤا خۆ.



أ بهایەکی نیزیك بۆ هاوکۆلکەیێ پێگڤەگریدانێ بهەژمێرە.

ب ئەڤ خالێن رِوونکرنێ بهایەکی پەرگر دناڤدا هەیە، بهایەکی نێزیك بۆ هاوکۆلکەیێ پێگڤەگریدانێ بهەژمێرە پشتی لادانا ئەڤێ خالا پەرگر (نقطة متطرفة).

ج بەحسێ کارتێکرنا خالا پەرگر ل سەر هێزا پێگڤەگریدانێ بکە.

10 خشتەیێ ل خوارێ پێدایێن ئەندامێن تیپا باڵە دیاردکەت کو درێژیا بەژنا هەرئێکێ ژ وان و درێژیا پێێ ڕاستێ ب سانتیمەتران دنوێنیت.

درێژیا بەژنێ و درێژیا پێێ ڕاستێ												
درێژیا پێێ	27.5	26.5	25.0	31.0	28.5	28.0	29.5	28.0	27.5	26	24.5	29.0
درێژیا بەژنێ	178	179	172	186	181	180	185	183	179	172	170	181

أ خالێن ڕوونکرنێ بۆ نواندنا پێدایێن خشتەی وێنەبکە.

ب ڕێیا مایەر بکاربینە بۆ هەژمارتنا هاوکێشەیا ڕاستەهێلی باشترین نواندن ب نیزیکی.

ج بهایێ نیزیک بۆ هاوکۆلکەیێ پێگڤەگرێدانێ بهەژمێرە.

لێنێرینەك بۆ پێش

هەر سیستەمەکی هێلی شیکاربکە.

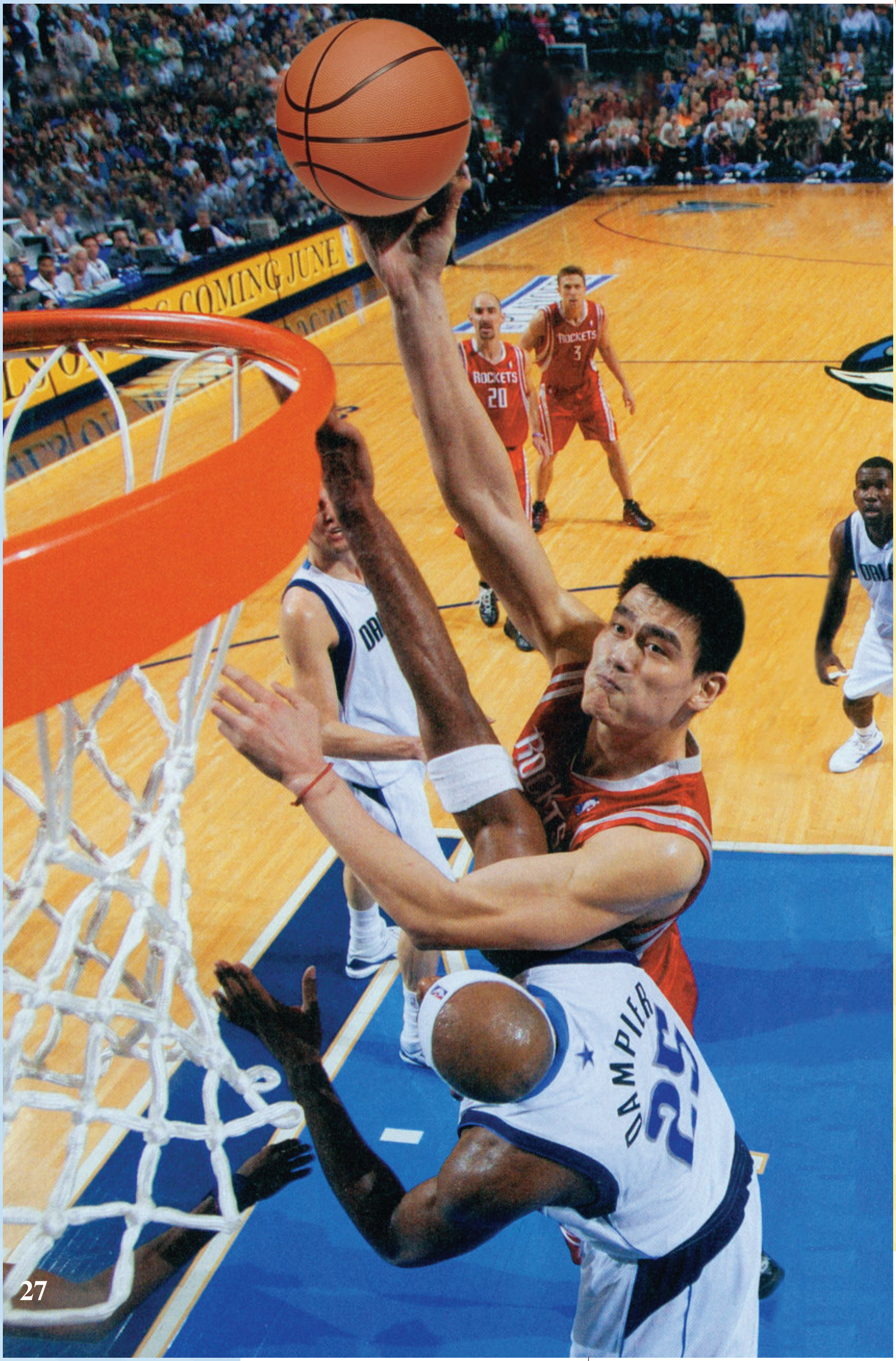
11 $\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 2x+5x=12 \end{cases}$

12 $\begin{cases} -x+2y=1 \\ 2x+5x=-2 \end{cases}$

بەشی 2

جەبر

Algebra



وانە

1. شیکارکرنا سیستەمێن هاوکێشەیێن هێلی ب سێ نەزانراوان.
2. پرۆگرامێ هیلی.
3. لێکدانا ڕیزکرییان.
4. هەڵگەڕاوێ ڕیزکرییان.

وانەیا 1

شیکارکرنا سیستەمێن هێلی ب سیێ نەزانراوان

Solving Linear systems in 3 unknowns

بۆچی؟ تو دشێی سیستەمێ گرانکرنا 3 هاوکێشەیێن هێلی ب سیێ نەزانراوان بکاربینی بۆ شیکارکرنا گەلەك پرسیارێن ژیانا ڕۆژانە، وەکی سیستەمێ سەنگکرنا نمرەیان ل وەرگرتنا قوتابیان ل هندەك کۆلێژان .

ئارمانج

- نواندنا شیکارێن سیستەمێ هێلی ب سیێ نەزانراوان دروو تەختێ پوتانیدا.
- شیکارکرنا سیستەمێ هێلی ب سیێ نەزانراوان ب جەبری

تو ل پۆلێن پێشر فێربوویی چەوا سیستەمێ هیلی یێ دوو هاوکێشەیی ب دوو نەزانراوان شیکاردکەی، ئانکو سیستەمێ هێلی 2×2.گەلەك جاران دبێژنە سیستەمێ 3 هاوکێشەیێن هێلی ب سیێ نەزانراوان سیستەمێ 3×3 ، بۆ هەژمارتنا شیکارەکا بتنێ یێ سیستەمەکی هاوکێشەیێن هێلی دڤێت ب شێوەیەکی گشتی ژمارا هاوکێشەیان یەکسانی ژمارا نەزانراوان بیت.
بۆ شیکارکرنا سیستەمەکی 3×3 دڤێت ئەوی سیستەمیێ بگۆهۆری بۆ سیستەمێ 2×2، پاشی ڕێێن شیکارکرنا سیستەمێ 2×2 بکاربینی ئەوێن تو فێربوویێ ل پۆلا یازدێ .

نموونە 1 **شیکارکردنا سیستەمێ هێلی یێ 3 هاوکێشەیی ب سیێ نەزانراوان**

ڕێێا لادانێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا سیستەمێ هیلی ل خواری.

$$\begin{cases} x+2y-3z=-2 & ❶ \\ 2x-2y+z=7 & ❷ \\ x+y+2z=-4 & ❸ \end{cases}$$

پێنگاڤ 1: ئێکێ ژ هەرسێ نەزانراوان لابدە.

وەسا یادیارە کو نەزانراوێ y باشترە بۆ لادانێ، چونکی هاوکۆلکەیێن وێ ل هەردوو هاوکێشەیێن ❶ و ❷ دژێ ئێکوودونە.

هەردوو هاوکێشەیێ ❶ و ❷ کۆبکەوە.

$$\begin{array}{rl} ❶ & x+2y-3z=-2 \\ ❷ & 2x-2y+z=7 \\ \hline & 3x \qquad -2z=5 \quad ❹ \end{array}$$

دوو هاوكێشەیێن ❶ و ❸ بكاربینە بۆ دیاركرنا هاوكێشەیەكا دی ب هەردوو نەزانراوییێن x و z.

$$\begin{array}{ll} ❶ & x+2y-3z=-2 \\ ❷ & -2(x+y+2z=-4) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} x+2y-3z=-2 \\ -2x-2y-4z=8 \\ \hline -x-7z=6 \end{array} ❺$$

هاوكێشەیا ❸ دگەل -2 لێبدە
وهاوكێشەیا پەیدابووی دگەل
هاوكێشەیا ❶ كۆمبكە.

$$\begin{cases} 3x-2z=5 & ❹ \\ -x-7z=6 & ❺ \end{cases}$$

تەنوكە سیستەمەكی هێلی 2×2 هەیە
ئەوی سیستەمی بكارئینانا لادانێ شیكاربكە.

پێنگاف 2: نەزانراوەكی دی لادە و هاوكێشەیا پەیدابووی شیكاربكە بۆ بدەست كەفتنا بهایێ نەزانراوێ سێیێ، نەزانراوێ x لادبە

$$\begin{array}{ll} ❹ & 3x-2z=5 \\ ❺ & 3(-x-7z=6) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 3x-2z=5 \\ -3x-21z=18 \\ \hline -23z=23 \\ z=-1 \end{array}$$

هاوكێشەیا ❺ دگەل 3 لێكبدە و
هاوكێشەیا پەیدابوویی دگەل
هاوكێشەیا ❹ كۆمبكە.

پێنگاف 3: یەكێك لە هاوكێشەكانی سیستمی 2×2 كاربهێنە بۆ هەژماركردنی بەهای x

$$\begin{array}{ll} ❶ & -x-7z=6 \\ ❷ & -x-7(-1)=6 \\ & x=1 \end{array}$$

-1 لجهێ z دانە.

پێنگاف 4: بهایێن x و z ل جهێن دانا ل هاوكێشەیێن سیستەمێ دیاركری بۆ هەژمارتنا بهایێ y.

$$\begin{array}{ll} ❶ & x+y+2z=-4 \\ ❷ & (1)+y+2(-1)=-4 \\ & y=-3 \end{array}$$

لجهدانانێ بكاربینە.

شیكارا سیستەمی دبیتە $(1, -3, -1)$

هەولبدە رێیا لادانێ بكاربینە بۆ شیكاركرنا سیستەمێ هێلی ل خوارێ:

$$\begin{cases} -x+y+2z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ -3x-4y+z=4 \end{cases}$$

هەروەسا تو دشێی رێیا لجهدانانێ بكاربینی بۆ شیكاركرنا سیستەمێ هێلی 3×3. ل ڤێرێ هەروەسا تو دشێی سیستەمێ 3×3 بگۆهۆڕی بۆ سیستەمێ 2×2.

نموونە 2 بجهئینان ل سەر بەریكانا وەرگرتنێ ل كولیژەكێ

پالێوراو	بیركاری	زانست	زمانی ئینگلیزی	سەرجەم
سوزان	90	60	70	700
ئازاد	60	70	80	590
هوشیار	0	60	60	240

ئەوێن ئارەزوو هەبن ل وەرگرتنێ ل كۆلێژا ئەندازیارییێ، دێ چنە دناڤ بەریكانێدا ب 3 بابەتان ((بیركاری و زانست و زمانی ئینگلیزی)) بۆ هەژمارتنا سەرجەمێن نمرەیێن پالێوراوان، لێژنەیا پشكنینێ پشتبەست دبیت ب گرانكرنا (سەنگكرن) نمرەیێن پالێوراوان ((نمرەیا هەر بابەتەكی لێكددەن دگەل ژمارەیەكێ)) چێدبیت ئەو یا جیاوازبیت ل گرانكرنا نمرەیا هەر بابەتەكی دی، خشتەیێ بەرامبەر نمرەیێن 3 پالێوراوان ل هەرسێ بابەتان، و سەرجەمێ هەرئێكی ژ وان دیاردكەت پشتی گرانكرنێ. پێدایێن خشتەیی بكاربینە بۆ هەژمارتنا سەنگا هەر بابەتەكی.

پێنگاڤ 1: گۆڕاوێ x بۆ سەنگا نمرەیا بابەتێ بیرکاری و گۆڕاوێ y بۆ سەنگا نمرەیا بابەتێ زانستی و گۆڕاوێ z بۆ سەنگا نمرەیا زمانێ ئینگلیزی بکاربینە. ل سەر شێوەیێ سیستەمەکی هاوکێشەیان پێدایێن خشتەیی بنڤیسە.

$$\begin{cases} 90x+60y+70z=700 & \text{❶ نمرەیێن سوزانێ} \\ 60x+70y+80z=590 & \text{❷ نمرەیێن ئازاد} \\ 60y+60z=240 & \text{❸ نمرەیێن هوشیار} \end{cases}$$

بەرێ خو بدێ کو گۆڕاوێ x نەیی دیارە ل هاوکێشەیا سێێ. چونکی هوشیاری ل وانەیا بیرکاریێ سفر یا وەرگرتی، نەبوونا گۆڕاوەکی هیچ ئەوی کاری ناگۆهۆڕیت، هەکە تو بەرێ خۆ بدەیە هاوکێشەیا 3 ، تو دشێی y پێ z بنڤیسی، ئەڤ کارە هاریکاریێ دکەت بۆ گۆهۆڕینا ئەڤی سیستەمی بۆ سیستەمەکێ هێلی ب دوو گۆڕاوان بکارئینانا لجهدانانێ.

پێنگاڤ 2: گۆڕاوێ y پێ گۆڕاوێ z بهەژمێرە بکارئینانا هاوکێشەیا ❸ .

$60y+60z=240 \quad y=4-z$ y پێ z بهەژمێرە.

پێنگاڤ 3: بهایێ y ل جهێ وێ دانە ل هەردوو هاوکێشەیان ❶ و ❷.

$$\begin{cases} 90x+60(4-z)+70z=700 \\ 60x+70(4-z)+80z=590 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 90x+10z=460 & ❹ \\ 60x+10z=310 & ❺ \end{cases}$$

پێنگاڤ 4: لادانێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا ئەوی سیستەمێ تە بدەست کەفتی ل هەردوو هاوکێشەیێن ❹ و ❺.

$$\begin{array}{rl} 90x+10z=460 & ❹ \\ 60x+10z=310 & ❺ \\ \hline 30x \quad\quad =150 & ❻ \end{array}$$

پێنگاڤ 5: ئەو هاوکێشەیا بدەست تە کەفتی شیکاربکە.

$$30x=150$$
$$x=5$$

پێنگاڤ 6: بهایێ x ل جهێ وێ دانە ل هاوکێشەیا ❹ بۆ هەژمارتنا بهایێ z.

$$90(5)+10z=460$$
$$10z=10$$
$$z=1$$

پێنگاڤ 7: بهایێ x و z ل هاوکێشەیا ❶ ل جهێن وان دانە بۆ هەژمارتنا بهایێ y.

$$90(5)+60y+70(1)=700$$
$$60y=180$$
$$y=3$$

شیکاردبیتە $x=5$ ،$y=3$ ، $z=1$ سەنگا نمرەیا بیرکاریێ 5 ویا زانستێ 3 ویا ئینگلیزی 1 .

هەولبدە گرانکرنا هەر بابەتەکی ل بەریکانا وەرگرتنێ ل کۆلێژا نوژدارییێ ل دووڤ پێدایێن ل خوارێ دیاربکە.

پالێوراو	بیرکاری	زانستی	زمانێ ئینگلیزی	سەرجەم
شیرین	80	70	50	430
سۆلاڤ	70	80	0	370
سانا	90	70	80	490

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون د بیر کارییدا

ئەڤ سیستەمێ ل خوارێ سیستەمەکی ستەمە، ئەرێ تو دشێی بگەهییە ئەوێ ئەنجامێ بیێ هندێ سیستەمی شیکاربکەی؟ ڕوونبکە.

1
$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ y+2z=3 \\ y+2z=5 \end{cases}$$

چەوا سیستەمەکی هیلی وەکی ئەڤی سیستەمێ ل خوارێ شیکاردکەی؟

2
$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ y+2z=3 \\ 5z=5 \end{cases}$$

ڕاهێنانێن ئاڕاستەکری

ڕێیا لادانێ بۆ شیکارکردنا هەر سیستەمەکی ل خوارێ شیکاربکە.

3
$$\begin{cases} -2x+y+3z=20 \\ -3x+2y+z=21 \\ 3x-2y+3z=-9 \end{cases}$$

4
$$\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ x+3y+2z=5 \\ x+4y-z=-5 \end{cases}$$

5
$$\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 2x+y-z=4 \\ x+y+3z=7 \end{cases}$$

6 **کارگێری یا کاری:** ڕێڤەبەرێ باغچێ باغچی ئاژەلان سێ جۆرێن پلێتان دفرۆشیت: بۆ زاڕۆکان و سنیلەیان و مەزنان. خشتەیێ ل خوارێ فرۆتنا پلێتێن چۆنا ژوورێ بۆ باغچەیێ ئاژەلان ل دەمێ 3 دەمژمێران دیاردکەت و بهایێ هەرئێکی ژ هەرسێ جۆرین پلیتان بهەژمێرە.

چۆنا ژوور بۆ باغچەیێ ئاژەلان				
دەم	بۆ مەزنان	بۆ سنێلەیان	بۆ زاڕۆکان	بهایێ فرۆتنان ب دینار
16 : 00 – 15 : 00	5	10	12	310 000
17 : 00 – 16 : 00	5	5	4	155 000
18 : 00 – 17 : 00	4	2	3	92 000

ڕاهێنان و بجهئینان

ڕێیا لادانێ بۆ شیکارکرنا هەر سیستەمەکی بکاربینە.

7
$$\begin{cases} 2x-y-3z=1 \\ 4x+3y+2z=-4 \\ -3x+2y+5z=-3 \end{cases}$$

8
$$\begin{cases} 5x-6y+2z=21 \\ 2x+3y-3z=-9 \\ -3x+9y-4z=-24 \end{cases}$$

9
$$\begin{cases} 4x+7y-z=42 \\ -2x+2y+3z=-26 \\ 2x-3y+5z=10 \end{cases}$$

10 **بۆ خۆشیێ: ل بەریکانا سترانبێژی پاشەڕۆژێ:** لێژنەیا بڕیاردانێ ل دووڤ سێ پیڤەران «بەهرە و ڕاوەستیان ل سەر شانۆیێ و بجهئینان» بەریکانکەران هەلدسەنگیت، بۆ هەرئێکێ ژ ئەڤان پیڤەران، ڕێژەیەکا سەدی هەیە ل هەلسەنگاندنا دوماهیکێ. خشتەیێ ل خوارێ هەلسەنگاندنا سێ ژ ئەڤان بەریکانکەران دیاردکەت ل دووڤ هەر پیڤەرەکی دگەل هەلسەنگاندنا دوماهیێ بۆ هەر ئێکی ژ وان. ڕێژەیا سەدی یا هەلسەنگاندنا دوماهیکێ بۆ هەر پیڤەرەکی چەندە؟

بەریکانا سترانبێژێن پاشەڕۆژێ				
بەریکانکەر	بەهرە	ڕاوەستیان ل سەر شانۆیێ	بجهئینان	هەلسەنگاندنا دوماهیکێ
ئاراز	8	9	10	9.2
ڤیان	9	7	8	8.1
ئاراس	6	10	8	7.8

11 **وەرزش** ل مێژوویا ئێکەتیا تەپا سەبەتێ ل ئەمێریکا لوی دامبیە کەسێ ئێکێ بوو کو خالێن وی تۆمارکین گەهشتە 13 726 خال و دابەشکریبوون ل سەر هەلدانا سێ خالی و هەلدانا دوو خالی و هەلدانا ئێک خالی دامبیە 2 144 خال ل هەلدانا دوو خالی زێدەتر ژ ئەوێن ل هەلدانا ئێک خالی تۆمارکربوون و 1 558 خال ل هەلدانا ئێک خالی زێدەتر ژ ئەوێن ل هەلدانا سێ خالی تۆمارکربوون. چەند خال ل هەر جۆرەکی هەلدانان تومارکربوون .

12 ئەندازیارەك بۆ دروستکردنا هەرەمەکا بنکێ وێ سێگۆشەی پێدڤی ب شیکارکرنا ئەڤێ سیستەمی هەیە، هاریکارییا ئەوی ئەندازیاری بکە بۆ هەژمارتنا شیکارێ.

$$\begin{cases} x+y+z=53 \\ 3x-2y+z=69 \\ -x+2y-z=-59 \end{cases}$$

13 کیژ ئەڤێن ل خوارێ دبیتە شیکار بۆ سیستەمێ.

$$\begin{cases} 2x+y+3z=-1 \\ 4x+2y+3z=1 \\ x-y+4z=-6 \end{cases}$$

أ $z=-1$، $y=-2$، $x=2$

ب $z=-1$ $y=2$ $x=0$

ج $z=-1$، $y=1$، $x=2$

د $z=2$، $y=-2$، $x=3$

14 سوزان و میران و ساڤان خوشك و برانە، ژیێ سۆزانێ دوو جارانی ژیێ میرانێیە، ئەوا ب 12 سالان ژ ژیێ ساڤانێ کێمترە، پشتی 5 سالان ژیێ ساڤانێ دبیتە دوو جارانی ژیێ میرانێ، ژیێ هەر ئێکێ ژوان چەندە؟

أ سۆزان 6 میران 3 ساڤان 15

ب سۆزان 34 میران 17 ساڤان 29

ج سۆزان 5 میران 10 ساڤان 22

د سۆزان 14 میران 7 ساڤان 19

15 ئەڤێ سیستەمی شیکاربکە هەکە بزانی $w=1$.

$$\begin{cases} w+2x+2y+z=-2 \\ w+3x-2y-z=-6 \\ -2w-x+3y+3z=6 \\ w+4x+y-2z=-14 \end{cases}$$

لێنێرینەك بۆ پاش

هەر سیستەمەاکی پۆلینبکە ئەرێ ستەمە، سنوردارە، بێسنوورە.

16 $\begin{cases} 7x+y=13 \\ 28x+4y=-12 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x-3y=-15 \\ 3y-2x=15 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 8y-24x=64 \\ 9y+45x=72 \end{cases}$

لێنێرینەك بۆ پێش

19 ب وێنە ڕوونكرنێ سیستەمێ لاسەنگەیان شیكاربكە، پاشی 3 خالان ژ دەڤەرا شیكارێ دیاربكە.

$\begin{cases} y+8\geq 0 \\ 2y+x<4 \\ x>-6 \end{cases}$

وانە 2

پرۆگرامی هێلی Linear Programming

بۆچی؟

ئەندازیارێن باغچەیان پرۆگرامیٚ هێلی بکاردەئینن بۆ دەستنیشانکرنا ئەوان رووەکێن دڤێن ل سەر روویێن کەسك بچینن.

ئامارنج

- پرسیارێن پرۆگرامی هێلی شیکاردکەن.

زاراڤ
Vocabulary

پرۆگرامیٚ هێلی
Linear programming

مەرج
Constraint

دەڤەرا گونجایی
Feasible Region

نەخشەیا بمفا
Objective Function

روویێن کەسك، ئەو روویێن سەرپۆشکرینە ب رووەکان ل جهیٚ بابەتێن دی،وەك چەمەنتۆ و قەرمیدی، ژبۆ هاریکارییا نزمکرنا پلەیێن گەرماتییٚ، و چاککرنا جوریٚ هەوایی بکەت.هەلبژارتنین ئەندازیارێن باغچەیان ئەنجام ددەن ددەن ل دووڤ نرخیٚ رووەکان، وبریٚ هەواییٚ پێتڤی بۆ رووەکان، و بریٚ دووەم ئۆکسیدیٚ کاربوونیٚ ئەویٚ رووەك هەلدمژت، **پرۆگرامیٚ هێلی Linear programming** رێیەکە بۆ دیارکرنا مەزنترین بەها یان بچووکترین بەهاییٚ بۆ ویٚ نەخشەیا پاسەدانامەرجان دکەت، دبێژنە وان مەرجێن پرسیاریٚ.

مەرج Constraint لاسەنگەیەکە د پرسیارا پرۆگرامیٚ هیلی دا.

چێدبیت کۆمەلا شیکاریٚ ئەوا هەموو مەرجان ساخدکەت ب وێنەییٚ روونکرنیٚ بهێتە نواندن، کو دەڤەرەك د رووتەختی پۆتانیدا پەیدادبیت ودبێژنی **دەڤەرا گونجایی Feasble Region**.

نموونە 1

نواندنا دەڤەرا گونجایی ب وێنەییٚ روونکرنیٚ: سێروان نەخشەیەکی ئەندازەیی بو باغچەکی دکێشیت رووبەریٚ وی نە زێدەتربیت ژ $600m^2$ بکارئینانا دوو جۆرێن رووەکان رووەکیٚ جۆریٚ ئێکیٚ $1.2m^2$ داپۆشدکەت، و رووەکیٚ جۆریٚ دوویٚ رووبەریٚ $2m^2$ داپۆشدکەت، بهاییٚ هەر رووەکەکی ژ هەردوو جۆران 2500 دینارن. دڤێت لێچوویا رووەکان نە پتر بیت ژ ئێك ملیون دیناران. مەرجان بنڤیسە و دەڤەرا گونجایی ب وێنەییٚ روونکرنیٚ بنوێنە.

هێماییٚ x بۆ ژمارا رووەکێن جۆریٚ ئێکیٚ دانە و y بۆ ژمارا رووەکێن جۆری دوویٚ دانە،

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1.2x + 2y \leq 600 \\ 2500x + 2500y \leq 1000\,000 \end{cases}$$

ژمارا رووەکان نابیت یاسالب بیت

رووبەریٚ داپۆشکری نە پتر بیت ژ $600\ m^2$ دیناران.

لێچوویا رووەکان نە پتر بیت 100 0 000 دیناران.

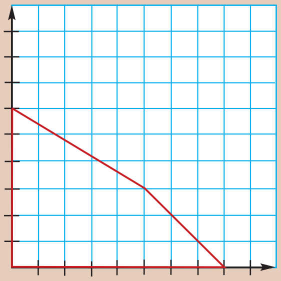
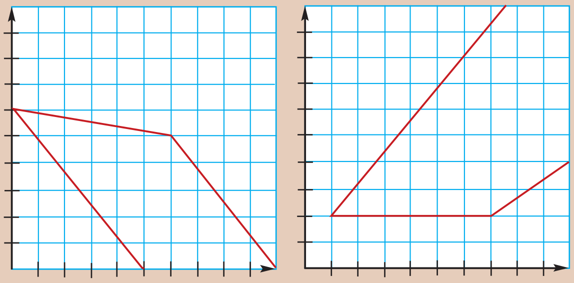
ب وێنەییٚ روونکرنیٚ هەرمەرجەکی پرسیاریٚ شیکاربکە، ئەو دەڤەرا پێکدهێت ژ هەموو دەڤەرێن شیکارێن جودا رەنگبکە، دەڤەرا گونجایی ئەو دەڤەرەیە ئەوا ب دەست تە دکەڤیت، ئەو چوار لایەکە، خالێن سەرێن ویٚ دبنە

$(0, 0)$،$(400, 0)$،$(250, 150)$،$(0, 300)$.

ساخبکە: هەکە خالەکیٚ وەك خالا $(100, 100)$ هەلبژێری، دیٚ بینی هەردوو پۆتانێن ویٚ هەموو مەرجان ساخدکەن. ✓

هەولبدە ب وێنەیێ ڕوونکرنێ دەڤەرا گونجایی بۆ ڤێ پرسیارێ
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$$
بنوێنە.

دەمێ پرسیارەکا پرۆگرامێ هێلی شیکاردکەی، نواندنا دەڤەرا گونجایی د ڕووتەختێ پۆوتانیدا بتنێ بەس نییە، گەلەك جاران دڤێت تو وان بهایێن گۆڕاوان بهەژمێری، ئەوێن بهایێن نەخشەیەکێ دکەنە مەزنترین بەها یان بچووکترین بەها، دبێژنە ڤێ نەخشێ **نەخشەیا بمفا (دالة المنفعة) Objective Function** بۆ دەڤەرا گونجایی. چێدبیت نەخشەیا بمفا مەزنترین بەها یان بچووکترین بەها یان هەردوو پێکڤە هەبن یان چۆ ژوان نەبن .

دەڤەرێن سنووردار و دەڤەرێن بێسنوور	
دەڤەرا بمفا یا سنووردارە	دەڤەرا بمفا نەیا سنووردارە
	
نەخشەیا بمفا مەزنترین بەها و بچووکترین بەها هەیە.	نەخشەیا بمفا مەزنترین بەها یان بچووکترین بەها هەیە و هەردووپێکڤە نینن .

یا دشیاندایە ب هۆیێ بیرکارییا پێشکەفتی ئەڤا ل خوارێ بهێتە سەلماندن:

چەمکێ سەری د پرۆگرامێ هێلی دا

هەکە نەخشەیا بمفا د پرسارەکا پرۆگرامێ هێلی دا مەزنترین بەها یان بچووکترین بەها هەبیت، دێ نەخشە گەهیتە ڤی بەهایی لنك سەرەکی ژ سەرێن دەڤەرا بمفا.

نموونە 2

سێروان ئەندازیارێ باغچایە ئەو گرنگیێ ددەتە کێمکرنا پیسبوونا هەوایی، و ژ بۆ ڤێ مەرەمێ سێروان هەول ددت کو ژمارا وان ڕووەکێن دووەم ئوکسێدێ کاربۆنێ هەلدمژن مەزنترین بیت، تێکراییێن هەلمژینا دووەم ئوکسیدێ کاربۆنێ و پێداییێن نموونە 1 بکاربینە بۆ هەژمارتنا ژمارا ڕووەکان ژ هەردوو جۆران.

جورێ دووێ

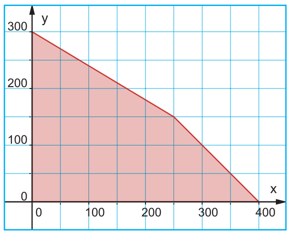
جورێ ئێکێ

پێنگاڤ 1: هێمایێ گۆڕاوی C بۆ دووەم ئۆکسیدی کاربۆنێ ئەوێ هاتیە هەلمژین دانە، هێمایێ x بۆ ژمارا ڕووەکێن جورێ ئێکێ و y بۆ ژمارا ڕووەکێن جوێ دووێ دانە، نەخشەیا بمفا بنقیسە.

$$C = 0.7x + 1.05y$$

پێنگاڤ 2: مەرجێن پرسیارێ بنقیسە و دەڤەرا گونجایی بنوێنە.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1.2x + 2y \leq 600 \\ 2500x + 2500y \leq 1000000 \end{cases}$$



پێنگاڤ 3: بەهایێ نەخشەیا بمفا لنك هەر سەرەکی ژ سەرێن دەڤەرا گونجایی بهەژمێرە.

(x, y)	$0.7x + 1.05$	C
$(0, 0)$	$0.7(0) + 1.05(0)$	0
$(0, 300)$	$0.7(0) + 1.05(300)$	315
$(250, 150)$	$0.7(250) + 1.05(150)$	332.5
$(400, 0)$	$0.7(400) + 1.05(0)$	280

نەخشەیا بمفا دگەهتە مەزنترین بەها لنك $(250, 150)$.

دڤێت سێروان 250 ڕووەکان ژ جۆرێ ئێکێ و 150 ڕووەکان ژ جۆرێ دووێ بچینیت دا بڕێ دووەم ئۆکسێدێ کاربۆنێ ئەوێ ڕووەکێن باغچەیێ هەلدمژن بگەهیتە وی پرە بەهایی.

هەوڵبدە مەزنترین بها بۆ نەخشەیا بمفا $p = 25x + 30y$ دیاربکە ل ژێر ڤان مەرجان.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$$

نموونە 3

بجهێنان ل سەر شیکارکرنا پرسیاران

ل فیستەڤالا سواربوونا هەسپان. دڤێت بیستون خوارنێ و عەلبکاندا دانت. بۆ ڤی کاری ئەوی هندەك کرێکارێن بسپۆر بکارئینان، و کرێیا هەر ئێکی ژ وان یا ڕۆژانە 60 000 دینـاربوو، و هندەك کرێکارێن نەپسپۆر هەرئێکی ژ وان یا ڕۆژانە بکارئینانا کرێیا 40 000 دینـاربوو، دڤێت ئەو کۆژمێ پارێ سێروان بدەتە کرێکاران 1 440 000 دیناربیت، سێروا بەرامبەر ئێك کرێکارێ بسپۆر بکێماسی پێدڤی ب سێ کرێکارێن نەبسپۆر هەیە. بتنێ 16 کرێکارێن بسپۆر بدەست کەفتن، کرێکارێ بسپۆر 25 قودیك د دەمژمێرەکێدا و کرێکارێن نەبسپۆر 18 قودیك د دمژمێرەکێدا دروستکرن. ژمارا کرێکاران ژ هەردوو جۆران بهەژمێرە دا مەزنترین ژمارا قودیکان بدەست بکەڤیت.

1 دیرسیارێ بگەهە

بەرسڤ ژ دوو پشکان پێکدهێت: ژمارا کرێکارێن بسپۆر و ژمارا کرێکارێن نەبسپۆر، لیستەیەکێ ژ پێزانینێن گرنگ دروستبکە.

- کرێیا کرێکارێ بسپۆر 60 000 دینارە د ڕۆژێکدا، کرێیا کرێکارێ نە پسپۆر 40 000 دینارە د ڕۆژێکدا.
- بێستون 1 440 000 دینار وەك کۆژمێ پارەی بۆ کرێیا کرێکاران دانە.
- کرێکارێ بسپۆر 25 قودێکان د دەمژمێرەکێ دا دروست دکەت و کرێکارێ نەپیسپۆر 18 قودیکان دروست دکەت د دەمژمێرەکێدا.
- بێستون بەرامبەر ئێك کرێکارێ پسپۆر بکێماسی پێدڤی ب 3 کرێکارێن نە بسپۆر هەیە.
- بتنێ 16 کرێکارێن پسپۆر هەیە.

2 پلانێ بۆ شیکارکرنێ دانە

هێمایێ x بۆ ژمارا کرێکارێن نەبسپۆر و هێمایێ y بۆ ژمارا کرێکارێن بسپۆر دانە. مەرجێن پرسیارێ و نەخشەیا بمفا بنڤیسە ل دووڤ وان زانیارێن گرنگ ئەوێن تە نڤیسین.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 40000x + 60000y \leq 1440000 \\ y \geq \frac{1}{3}x \\ y \leq 16 \end{cases}$$

ژمارا کرێکاران نە یاسالب.

کرێیا کرێکاران نەزێدەتر ژ 000 440 1 دیناران.

کرێکارەکێ بسپۆر بکێماسی بەرامبەر 3 کرێکارێن نە بسپۆرە.

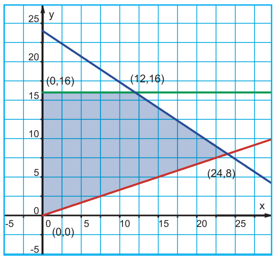
ژمارەی کرێکارە پسپۆڕەکان بریتییە لە 16.

گۆڕاوێ p بۆ ژمارا قودیکێن د دەمژمێرەکێدا هاتینە دروستکرن دانە، نەخشەیا بمفا دبیتە

$p = 18x + 25y$

3 شیکاربکە

ب وێنەیێ ڕوونکرنێ دەڤەرا بمفا و سەرێن وێ دیاربکە، پاشی بەهایێ نەخشەیا بمفا لنك هەر سەرەکی بهەژمێرە.



$p(0, 0) = 18(0) + 25(0) = 0$

$p(0, 16) = 18(0) + 25(16) = 400$

$p(12, 16)1 = 18(12) + 25(16) = 616$

$p(24, 8)1 = 18(24) + 25(8) = \mathbf{632}$

نەخشەیا بمفا دگەهتە مەزنترین بەها لنك سەرێ $(24, 8)$، دڤێت بێستون 8 کرێکارێن بسپۆر و 24 کرێکارێن نە بسپۆر بکاربینت.

4 ساخکرن

ساخبکە کو جۆتێ ڕێکختی $(24, 8)$ هەموو مەرجێن پرسیارێ ساخدکەت.

$x \geq 0$ $\quad$ $24 \geq 0$ ✓

$y \geq 0$ $\quad$ $8 \geq 0$ ✓

$y \leq 16$ $\quad$ $8 \leq 16$ ✓

$y \geq \frac{1}{3}x$

$y \geq \frac{1}{3}(24)$

$8 \geq 8$ ✓

$40000x + 60000y \leq 1440000$

$40000 \times 24 + 60000 \times 8 \leq 1440000$

$1440000 \leq 1440\,000$ ✓

هەولبدە ڕێڤەبەرێ پەرتووکخانەکێ دڤێت هندەك دۆلابێن پەرتووکان بکرێت، پەرتووکخانێ پێدڤی ب دوو جۆرێن ڕەفکان هەیە ب درێژیا $320\ m$ ، دۆلابێن جۆرێ ئێکێ ب درێژیا $32\ m$ و لێچوویا وێ 000 200 دیناران، و درێژیا دۆلابێن ژ جۆرێ دووێ $16\ m$ و لێچوویا وێ 000 125 دیناران. ل دووڤ پێڤانێن هۆلا پەرتووکخانێ ئەو ب زێدەهی 8 دۆلابان ژ جۆرێ ئێکێ و 12 دۆلابان ژ جۆرێ دووێ وەردگریت، دڤێت ڕێڤەبەرێ پەرتووکخانێ چەند دۆلابان ژ هەر جۆرەکی بکرێت ئەدا کێمترین پارەی بدەت؟

ڕاهێـــــنـــان

بەردەوامبوون د بیرکارییێدا

1 چەوا مەرجێن پرسیارین پڕۆگرامێ هێلی دەردبرن؟

2 ب هزرا تە، بۆچی دبێژنە دەڤەرا شیکاریێ دەڤەرا بمفا؟

ڕاهێنانێن ئاڕاستەکری

ب وێنەیێ ڕوونکرنێ هەر دەڤەرەکا گونجای دیاربکە.

3 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3x+3 \\ y \leq -x+7 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -1 \\ y \leq x+1 \\ y \leq -\frac{1}{4}x+6 \end{cases}$

5 $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 1 \\ y \geq 0.5x-2 \\ y \leq -2x+3 \end{cases}$

بهایێن *x* و *y* ئەوێن مەزنترین بها یان بچووکترین بها ددەنە نەخشەیا بمفا دیاربکە:

	مەرج	نەخشەیا بمفا	مەزنترین بها یان بچووکترین بها
6	مەرجێن پرسیارا 3	$p=10x+16y$	مەزنترین بها
7	مەرجێن پرسیارا 4	$p=3x+5y$	بچووکترین بها
8	مەرجێن پرسیارا 5	$p=2.4x+1.5y$	مەزنترین بها

9 **نوژداریێ دادانە:** نوژداریێ دادانە ڕێبوار، 7 دەمژمێرا ڕۆژانە کاردکەت، نیڤ دەمژمێرێ تەرخاندکەت بۆ وی نەخۆشێ دڤێت ددانێ خۆ پاقژبکەت. و 40 000 دینارا ژێ وەردگرت. و دەمژمێرەکێ تەرخاندکەت بۆ وی نەخۆشێ دڤێت پێدوێ خۆ چارەسەربکەت و 95 000 دینارا ژێ وەردگرت. نوژدار دشێت بزیداهی 4 نەخۆشێن چارەسەریا پنوێن ببینت د ڕۆژەکێ دا. ژمارا ئەوێن ددانێ خۆ پاقژدکەن و ژمارا ئەوێن چارەسەریا پدوێن بکەن دڤێت چەندبیت دا پترترین داهات بۆ نوژداری بهێتە دابینکرن؟

ڕاهێنان و بجهئینان

ب وێنەیێ ڕوونکرنێ هەر دەڤەرەکا گونجای دیاربکە و دروستیا شیکاریێ ساخبکە.

10 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq 4x-4 \\ y \leq x+5 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 9 \\ y \geq -2x-7 \end{cases}$

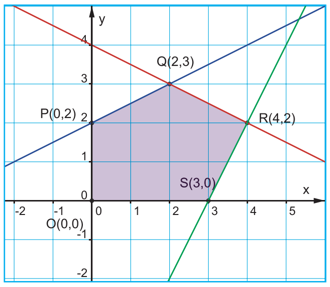
12 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \geq \frac{1}{5}x-3 \\ y \leq -x+4 \end{cases}$

بهایێن *x* و *y* ئەوێن مەزنترین بها یان بچووکترین بها ددەنە نەخشەیا بمفا بهەژمێرە.

	مەرج	نەخشەیا بمفا	مەزنترین بها یان بچووکترین بها
13	مەرجێن پرسیارا 10	$p=-21x+11y$	مەزنترین بها
14	مەرجێن پرسیارا 11	$p=-2x-4y$	بچووکترین بها
15	مەرجێن پرسیارا 12	$p=x+3y$	مەزنترین بها

16 **پیشەسازی** دەزگەهێ ڕووناکی دوو جۆرێن پانکەیان بەرهەمدکەت، دروستکرنا پانکەیا ژ جۆرێ ئێکێ 4 دەمژمێر پێدڤێن و 40 000 دیناران قازانج دکەت، و پانکەیا ژ جۆرێ دووێ 6 دەمژمێر پێدڤێن و 80 000 دیناران قازانج دکەت، هێزا بەرهەمهێنانا ڕۆژانە نە زێدەترە ژ 15 پانکەیان ژ جۆرێ ئێکێ و4 پانکەیان ژ جۆرێ دووێ، کێمترین ژمارا دەمژمێران د ڕۆژەکێ دا چەندە دا برێ قازانجێ ڕۆژانە نە کێمتر بیت ژ 400 000 دیناران؟

17 ل دەڤەرا گونجای ب شێوەیێ پروگرامێ هێلی ل وێنەیێ بەرامبەر، کیژ خال مەزنترین بهای ددەتە نەخشەیا بمفا $P=-x+y$.



أ P ج R

ب Q د S

لێنێرینەك بۆ پاش

ل هەر راهێنانەکێ $f(7)$ و $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ بهەژمێرە.

18 $f(x)=\frac{1}{2x-3}$

19 $f(x)=0.5x$

20 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

لێنێرینەك بۆ پێش

سنووردارێ هەر ڕێزکریەکی بهەژمێرە.

21 $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

22 $\begin{pmatrix} -3 & 45 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$

23 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

وانە 3

لێکدانا ڕێزکرییان Multiplying Matrices

بۆچی؟ خودانێن دەزگەهان ڕێزکرییان بکاردئینن بۆ هەژمارکرنا دەستکەفت و لێچوو و قازانجی.

ئارمانج

- سیفەتێن ڕێزکرییان د لێکدانێدا دناسن.
- لێکدانا ڕیزکرییان.

زاراڤ Vocabulary

ئەنجامێ لێکدانا دوو ڕێزکرییان Matrix product

ڕیزکریێ چوارگۆشەیی Square matrix

تیرەیێ سەرەکی Main diagonal

ڕیزکریێ یەکە Unit matrix

تو ل پۆلا یازدێ فێربووی چەوا ژمارەیەکێ دگەل ڕێزکرییەکێ لێکبدەی. هەروەسا تو دشێی ڕێزکرییەکێ دگەل ڕێزکرییەکێ لێکبدەی، لێکدانا دوو ڕێزکرییان، ڕێزکرییەکێ دی پەیدادکەت دبێژنێ ئەنجامێ لێکدانا دوو ڕێزکرییان **Matrix product** بۆ لێکدانا دوو ڕێزکرییان ئەڤ هەردوو ڕێسایێن ل خوارێ بجهدئینن:–

- تو دشێی ڕێزکریێ A ل ڕێزکریێ B بدەی، ئانکو $A\times B$ یان AB هەژماربکەی، هەکە ژمارەیا ستوونێن A هندی ژمارەیا ڕێزێن B بیت.
- ئەنجامێ لێکدانا ڕێزکرییەکێ ژ خانەیا $m\times n$ ل ڕێزکرییەکێ ژ خانەیا $n\times p$ دبیتە ڕێزکرییەکێ ژ خانەیا $m\times p$

$$A=\begin{bmatrix}3&5&7\\4&1&2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2&3&3&8\\9&5&2&0\\0&1&6&7\end{bmatrix}$$

A B AB

$2\times 3\quad 3\times 4\ \rightarrow\ 2\times 4$

ژمارەیا ڕێزان = ژمارەیا ستوونان

$$C=\begin{bmatrix}3&5\\4&1\\5&8\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}2&3&3&8&4\\9&5&2&0&6\\0&1&6&7&2\end{bmatrix}$$

C D CD

$3\times 2\quad 3\times 5$ پێناسەنەکراوە

ژمارەیا ڕێزان $\neq$ ژمارەیا ستوونان $(2\neq 3)$

گەلەک جاران نڤیسینا $A_{m\times n}$ بکاردئینن ب دیارکرنا ڕێزکرییەکێ ل پلەیا mn.

نموونە 1

دیارکرنا شیانا لێکدانا دوو ڕێزکرییان. دیاربکە ئەرێ ئەنجامێ لێکدانا هەردوو ڕێزکرییان پێناسە یان نە، هەکە یا پێناسەکری بیت، خانەیا وی دیاربکە.

أ $A_{2\times 5}\ B_{5\times 3}$

A B AB

$2\times 5\quad 5\times 3 = 2\times 3$

چونکی ژمارەیا ستوونێن ڕێزکریێ A یەکسانە دگەل ژمارەیا ڕێزێن ڕێزکریێ B ، ئەنجامێ لێکدانێ AB دێ یا پێناسەکری بیت، خانەیا وی ڕێزکریی دبیتە 2×3.

ب $C_{4\times 3}\ D_{4\times 5}$

C D CD

$4\times 3\quad 4\times 5$ پێناسەنەکرییە

چونکی ژمارەیا ستوونێن ڕێزکریێ C نە یەکسانە دگەل ژمارەیا ڕێزێن ڕێزکریێ D ، ئەنجامێ لێکدانێ CD پێناسەنەکرییە.

ڕۆناهیەك

ئەڤە ل بیرا تەبیت: دا ئەنجامێ لێکدانا دوو ڕیزکرییان یاپێناسەکری بیت، دڤیت ژمارەیا ستوونێن ڕێزکریێ ڕەخێ چەپێ یەکسان بێت دگەل ژمارەیا ڕێزێن ڕێزکریێ ل ڕەخێ ڕاستێ.

هەولبدە

ڕێزکریێن نموونەیا 1 بکاربینە بۆ بەرسڤدانا پرسیاران، دیاربکە ئەرێ ئەنجامێ لێکدانا هەردوو ڕێزکرییان یا پێناسەکرییە یان نە. هەگە یا پێناسەکری بیت، خانەیاوی دیاربکە.

أ BA **ب** DC **ج** DB

بۆ هەژمارتنا ژمارەیا ڕێزێن ڕێزکرییێ A تو بەرێ خو ئاسۆیی ددەییێ، و بۆ هەژمارتنا ژمارەیا ستوونێن ڕێزکرییێ B تو بەرێ خو ستوونی ددەییێ بۆ دیارکرنا پێناسەکرنا ئەنجامێ لێدانا AB.
تو دێ ب هەمان کار ڕابی بۆ هەژمارکرنا ژمارەیا دانەیێن ڕێزکرییێ ئەنجامی لێکدانی .

ب پەیڤان	ب ژمارەیان	ب جەبرێ
بۆ هەژمارتنا دانەیێ P_{kj} ل ڕیزکرییێ $P=AB$ هەر دانەیەکی ل ڕیزا k د ڕێزکرییێ A دا لێکبدە دگەل ئەوێ بەرامبەری وی ل ستوونا j د ڕێزکرییێ B دا ، پاشی ئەنجامێن لێکدانێ کۆمبکە.	$P=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}1\times5+2\times7 & 1\times6+2\times8\\ 3\times5+4\times7 & 3\times6+4\times8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}c_1 & c_2\\ d_1 & d_2\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}a_1c_1+a_2d_1 & a_1c_2+a_2d_2\\ b_1c_1+b_2d_1 & b_1c_2+b_2d_2\end{bmatrix}$

نموونە 2

لێکدانا ڕێزکرییان

ئەڤان ڕیزکرییان بەکاربینە

$$A=\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\ -3 & 3 & 2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -2 & 7\\ 6 & 0\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}11 & -1\\ 12 & 10\end{bmatrix}$$

ئەنجامێ لێکدانێ بهەژمێرە (هەگە یاپێناسەکری بیت)

أ AB

خانەیان بپشکنە بۆ بریاردانا پێناسەکرنا ئەنجامێ لێکدانێ، خانەیا ڕێزکرییێ A دبیتە 3×2، و خانەیا ڕێزکرییێ B دبیتە 2×3 ئەنجام AB پێناسەکرییە، ئەو ڕێزکرییە ژ خانەیا 2×2 ڕێزا (١) یێ ژ ڕێزکرییێ A لێکبدە دگەل ستوونا (١) یێ ژ ڕێزکرییێ B, هەر وەکی ل خوارێ دیارکری، و ئەنجامی ل جهێ دانەیێ C_{11} بنڤیسە ل ڕێزکرییێ ئەنجامێ لێکدانێ C .

$$C=AB=\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\ -3 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ -2 & 7\\ 6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46 & ?\\ ? & ?\end{bmatrix}\leftarrow 0(5)+4(-2)+9(6)$$

نۆکە ڕێزا (١) ژ ڕێزکرییێ A لیکبدە دگەل ستوونا (٢) ژ ڕێزکرییێ B، هەر وەکی ل خوارێ دیارکری، و ئەنجامی ل جهێ دانەیێ C_{12} ل ڕێزکرییێ ئەنجامێ لێکدانێ C بنڤیسە.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\ -3 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ -2 & 7\\ 6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46 & 28\\ ? & ?\end{bmatrix}\leftarrow 0(1)+4(7)+9(0)$$

ڕێزا (٢) ژ ڕێزکرییێ A لێکبدە دگەل ستوونا B. هەر وەکی ل خوارێ دیارکری، و ئەنجامی ل جهێ وانەیێ C_{21} ل ڕێزکرییێ ئەنجامێ لێکدانێ C بنڤیسە.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\ -3 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ -2 & 7\\ 6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46 & 28\\ -9 & ?\end{bmatrix}\leftarrow (-3)(5)+3(-2)+2(6)$$

ڕێزا (٢) ژ ڕێزکرییێ A لێکبدە دگەل ستوونا (٢) ژ ڕێزکرییێ B , هەر وەکی ل خوارێ دیارکری، و ئەنجامێ ل جهێ دانەیێ C_{22} ل ڕێزکرییێ ئەنجامێ لێکدانێ C بنڤیسە.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\ -3 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ -2 & 7\\ 6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46 & 28\\ -9 & 18\end{bmatrix}\leftarrow (-3)(1)+3(7)+2(0)$$

ڤێجا $C=AB=\begin{bmatrix}46 & 28\\ -9 & 18\end{bmatrix}$

ئاگەهداربە!

تێبینیێ بکە کو ئەنجامێ لێکدانێ AB یەکسان نینە دگەل ئەنجامێ لێکدانێ BA ، چونکی سیفەتێ ئالوگۆرێ دلێکدانا ڕێزکراوادا نینە

ب BA

خانەیێن ڕێزکرییانا بپشکنە بۆ بڕیاردانا پێناسەکرنا ئەنجامێ لێکدانێ. ڕێزکریێ B 3×2 ، و خانەیا ڕێزکریێ A 2×3 ، ئەنجامێ لێکدانێ BA پێناسەکرییە و ژ خانەیا 3×3 یە.

$$BA=\begin{bmatrix}5(0)+1(-3) & 5(4)+1(3) & 5(9)+1(2)\\ -2(0)+7(-3) & -2(4)+7(3) & -2(9)+7(2)\\ 6(0)+0(-3) & 6(4)+0(3) & 6(9)+0(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 23 & 47\\ -21 & 13 & -4\\ 0 & 24 & 54\end{bmatrix}$$

ج AD

خانەیێن وان بپشکنە بۆ بڕیاردانا پێناسەکرنا ئەنجامێ لێکدانێ. خانەیا ڕێزکریێ A 2×3، و خانەیا ڕێزکریێ D 2×2 ، ئەنجامێ لێکدانێ AD پێناسە نەکرییە.

هەولبدە 2. ئەنجامێ لێکدانێن خوارێ هەژماربکە، (هەکە یا پێناسەکری بیت)

أ BD ب DA

ڕێزکرییان بکاردئینن ل کارگێریێ بۆ هەژمارتنا داهاتی و لێچۆیی و قازانجی.

نموونە 3

بجهئینان ل سەر دەرخستی (الجردة)

کۆمپانیەکا کەل و پەلێن وەرزشێ ژ دوو جۆرێن ئامێرێن غاردانێ ل سەر بەفرێ د دووکۆگەهاندا دفرۆشت. خشتەیێ ئێکێ کەلوپەلێن ل هەردوو کوگەهان ژ هەر جۆرەکی دیاردکەت. و خشتەیێ دووێ نرخێن فرۆتن و لێچویی و قازانجی دیاردکەت.

کەلوپەلێن ل هەردوو کۆگەهان		
	ئاسایی	نایاب
کۆگەها1	14	10
کۆگەها 2	7	8

داهات و لێچویی و قازانج ب هزاران دیناران			
	نرخ	تێچوون	قازانج
ئاسایی	89	44	45
نایاب	119	58	61

لێکدانا ڕێزکرییان بکاربینە بۆ هەژمارتنا داهاتی و لێچویی و قازانجێ هەر کۆگەهەکی.

$$\begin{bmatrix}14 & 10\\ 7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}89 & 44 & 45\\ 119 & 58 & 61\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14(89)+10(119) & 14(44)+10(58) & 14(45)+10(61)\\ 7(89)+8(119) & 7(44)+8(58) & 7(45)+8(61)\end{bmatrix}$$

قازانج لێچوویی داهات

$$=\begin{bmatrix}2436 & 1196 & 1240\\ 1575 & 772 & 803\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{1 کۆگەها}\\ \text{2 کۆگەها}\end{matrix}$$

لێچویا تاییران ل کۆگەها 1دبیتە 1196 هزار دینار و 772 هزار دینار ل کۆگەها 2.

هەولبدە 3. تاییرێن کۆگای 2 ب گۆهۆڕە ب 6 جۆرێن ئاسایی و 9 جۆرێن نایاب. ڕیزکریێ ئەنجامێ لێکدانێ دیاربکە، و قازانجێ کۆگەها 2 بهەژمێرە.

ڕێزکریێ چوارگۆشەیی Square matrix ئەو ڕیزکرییە کو ژمارا ڕیزێن وی و ستوونێن وی یەکسانن، ئەو ڕێزکرییە ژ خانەیا $m\times m$

تیرەیێ سەرەکی Main diagonal ل ڕێزکریێ چوارگۆشەیی ئەو تیرەیە ئەوێ ناڤبەرا گۆشەیا سەری ل ڕەخێ چەپێ و گۆشەیا خوارێ ل ڕەخێ ڕاستێ دگەهینت.

ڕیزکریێ یەکە Unit matrix ئەو ڕێزکرییەکی چوارگۆشەییە، هەموو دانەیێن وێ سفرن ژ بلی ئەوان دانەیێن دکەڤنە سەر تیرەیێ سەرەکی کو ئەو هەموو. دبنە 1 ئێك ڕێزکریێ یەکە هەیە بۆ هەر ڕێزکرییەکی ژ خانەیا $n\times n$ ژ خانەیێن ڕیزکریێن چوارگۆشەیی.

ڕێزکریێ یەکە بۆ خانەیا 2×2 دبیتە $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ و بۆ خانەیا 3×3 دبیتە $I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

ل لێکدانا ڕێزکرییان، ڕێزکریێ یەکە ژ خانەیەکا دیارکری ڕۆلێ ژمارە 1 دبینت ل لێکدانا ژمارەیان.

هەکە A ڕێزکرییەکی چوارگۆشەیی بیت ژ خانەیا $m\times m$ دێ $AI_m=I_mA=A$

هەکە $A=\begin{bmatrix}5&7\\-1&4\end{bmatrix}$ دێ:

$$AI_2=\begin{bmatrix}5&7\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\times1+7\times0&5\times0+7\times1\\-1\times1+4\times0&-1\times0+4\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&7\\-1&4\end{bmatrix}=A$$

و

$$I_2A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&7\\-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times5+0\times(-1)&1\times7+0\times4\\0\times5+1\times(-1)&0\times7+1\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&7\\-1&4\end{bmatrix}=A$$

چونکی چێدبیت ڕێزکرییەکی چوارگوشەیی دگەل خوبێتە لێکدان، لەورا چێدبێت ئەوێ کردارێ چەند جاران دووبارەبکەن و هێزا ئەوی ڕێزکریی بدەست دکەڤیت.

نموونە 4 هێزێن ڕێزکریێن چوارگۆشەی.

$$A=\begin{bmatrix}7&3\\-2&0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2&4&1\\5&0&-2\\1&-1&3\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&0&-2\end{bmatrix}\quad I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

بهەژمێرە هەکە یا دشیاندا بیت.

أ A^2

$$A^2=\begin{bmatrix}7&3\\-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&3\\-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\times7+3(-2)&7\times3+3\times0\\-2\times7+0\times(-2)&-2\times3+0\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}43&21\\-14&-6\end{bmatrix}$$

ب B^2

$$B^2=\begin{bmatrix}2&4&1\\5&0&-2\\1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4&1\\5&0&-2\\1&-1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\times2+4\times5+1\times1&2\times4+4\times0+1(-1)&2\times1+4(-2)+1\times3\\5\times2+0\times5+(-2)\times1&5\times4+0\times0+(-2)(-1)&5\times1+0(-2)+(-2)\times3\\1\times2+(-1)\times5+3\times1&1\times4+(-1)\times0+3(-1)&1\times1+(-1)(-2)+3\times3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}25&7&-3\\8&22&-1\\0&1&12\end{bmatrix}$$

هەولبدە 4. ڕێزکریێ بهەژمێرە هەکە یادشیاندابیت.

أ C^2 ب A^3 ج B^3 د I^4

راهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون د بیرکاریێدا

1 ئەو مەرجە چییە دڤێت هەبیت ل هەردوو ڕێزکرییان A و B، دابشێن AB بهەژمێرن.

2 ئەوان پێنگاڤان ڕوونبکە بۆ لێکدانا ڕێزکریێ $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ ل ڕێزکریێ $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

دیاربکە ئەرێ ئەنجامێ لێکدانێ یا پێناسەکرییە یان نە؟خانەیا وێ بێژە هەکەر یا پێناسەکری.

3 $A_{4\times5}B_{5\times3}$ **4** $B_{5\times3}A_{4\times5}$ **5** $C_{9\times5}D_{5\times9}$

ڕێزکریێن ل خوارێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان ژ **6** هەتا **9**. ئەنجامێ لێکدانێ هەژماربکە هەکە دشیاندابیت.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}، B=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}، C=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}، D=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 10 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}، I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6 BA **7** CA **8** DC **9** BI

ڕێزکریێن ل خوارێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان ژ **10** هەتا **12**. هەر هێزەکی بهەژمێرە هەکە یادشیاندابیت.

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}، C=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10 A^2 **11** A^3 **12** C^2

ڕاهێنان و بجهئینان

ئەرێ ئەنجامێ لێکدان یاپێناسەکرییە یان نە، خانەیا وێ دیاربکە هەکە یا پێناسەکری بیت.

13 $A_{2\times1}B_{2\times3}$ **14** $B_{2\times3}A_{2\times1}$ **15** $C_{3\times5}D_{5\times1}$

ڕێزکریێن ل خوارێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان ژ **16** هەتا **19**. ئەنجامێ لێکدانێ هەژماربکە، هەکە یا دشیاندابیت.

$$A=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}، B=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}، C=\begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}، I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16 AB **17** CA **18** BA **19** CI

ڕێزکرییێن ل خواریٚ بەکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانا ژ 20 هەتا 23 ئەنجامیٚ ل سەر سادەترین شێوە بنڤیسە، هەکە یادشیاندابیت.

$$Q=\begin{bmatrix}4 & 13 & -9\end{bmatrix} \quad S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix} \quad T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} \quad A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

20 S^2 **21** B^2 **22** S^3 **23** Q^3

24 بەهایٚ x بهەژمێرە، کو یەکسانییا ڕێزکرییان $\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & \frac{x}{2}\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & -19\\ 24 & -26\end{bmatrix}$ یا دروست بیت.

لێنێرینەك بۆ پاش

هەر بڕیك هەژماربکە، هەکە یا دشیاندابیت.

$$S=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad T=\begin{bmatrix}0.5 & 0.83\\ 5 & 0\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad V=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ -4 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

25 $S+T$ **26** $V-T$ **27** $4T$

لێنێرینەك بۆ پێش

28 سنووردراریٚ ڕیزکرییٚ $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$ بهەژمێرە

ئەریٚ تو دشییٚ ڕێزکرییٚ $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ بهەژمێری کو $AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ساخبکەت؟ ئەڤیٚ ڕوونبکە.

وانەیا
4

هەڵگەڕاویێ ڕێزكریێ

Inverse of a matrix

بۆچی؟

ئەوێن د گرتن و ڤەكرنا جفراندا كاردكەن، هەلگەڕاویێ ڕێزكرییان بكاردئینن بۆ دانان و پاراستنا تێبنیێن نامەیان.

ئارمانج

- بریاردان ئەرێ ڕێزكرییەكی هەڵگەڕاو هەیە یان نە.
- هەژماركرنا هەڵگەڕاویێ ڕێزكریێ 2× 2 هەكە هەبیت.
- شیكاركرناسیستەمێ هاوكێشەیێن هێڵی بكارئینانا هەڵگەڕاوی ڕێزكریی .

زاراڤ

Vocabulary

هەڵگەڕاویێ ڕێزكریی
Inverse of a matrix

هاوكێشەیا ڕێزكریی
Matrix equation

ڕێزكریێ نەزانراوان
Variable matrix

ڕێزكریێ نەگۆڕان
Constant matrix

تو دشییێ نامەكێ جفرەبكەی بكارئینانا ڕێزكرییان. ئەوێ نامە دگەهتێ كردارەكا بەرۆڤاژی بكاردئینت بۆڤەكرنا جفرێ و خواندن نامەیێ، دا ڕیزكرییەكی هەلگەڕاو هەبیت، دڤێت ئەوی چوارگۆشەی بیت. لێ ئەڤ مەرجە بتنێ بەسنینە، چونكی هندەك ڕێزكرییێن چوارگۆشەیی هەڵگەڕاو نییە. هەكە ئەنجامێ لێكدانا ڕێزكریێ A دگەل ڕێزكریێ B یەكسانی ڕێزكریێ یەكە I -1
بیت ئانكو هەكە $AB=BA=I$، ل ئەڤی باری دبێژنە ڕێزكریێ B **هەڵگەڕاوێ ڕێزكریێ** A هێمایێ A
Inverse of a matrix بۆ دهێتە بكارئینان.

نموونە 1

دیاركرن ئەرێ ڕێزكرییەك بیتە هەلگەڕاویێ ڕێزكرییەكی دی

دیاربكە ئەرێ ڕێزكریێ B دبیتە هەلگەڕاویێ ڕێزكریێ A .

أ $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\4&1&2\\2&0&4\end{bmatrix}$ ؛ $B=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{6}\\-2&1&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}2&0&1\\4&1&2\\2&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{6}\\-2&1&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

چونكی ئەنجامێ لێكدانێ دبیتە ڕێزكریێ یەكە، لەورا ڕێزكریێ B هەلگەڕاوێ ڕێزكریێ A یە .

ب $A=\begin{bmatrix}2&3\\7&10\end{bmatrix}$ ؛ $B=\begin{bmatrix}-10&6\\7&-4\end{bmatrix}$

ل بیرئینان

ڕێزكریێ یەكە ژ خانەیا n ئەو ڕێزكریێ چوارگۆشەییە ژ خانەیا n، ئەوێ هەموو دانەیێن وی ، ژلی دانەیێن تێرەیێ سەرەكی كو ئەو هەموو 1 ن، ڕێزكریەكێ یەكە ژ خانەیا 3 ئەڤەیە :

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ل دووڤ ئەوێ پێشتر ڕێزکریێ B نابیتە هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ A .

هەولبدە دیاربکە ئەرێ ڕێزکریێ B هەلگەڕاوە بۆ ڕێزکریێ A .

$$B = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0.4 \\ 1.2 & 1 & -1.4 \\ 0.4 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} ، A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ چوارگۆشەیێ ژ خانەیا 2

هەکە سنووردارێ ڕێزکریێ $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ سفر نەبیت، دێ ئەوی ڕێزکری هەلگەڕاوەک هەبیت و ئەڤە: $M^{-1} = \frac{1}{|M|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (دەمێ $|M|$ سنوردارێ ڕێزکریێ (M) بیت.

ئەو ڕێزکریێ سنوودارێ وی سفر بیت هەلگەڕاو نییە.

نموونە 2 دیارکرنا هەلگەڕاوێ ڕیزکریێ چوارگۆشەیێ ژ خانەیا 2

هەلگەڕاوێ ئەوی ڕێزکری بهەژمێرە هەکە هەبیت.

أ $M = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

سنووردارێ ڕێزکری بهەژمێرە.

$$|M| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-2)(-4) - 2\times 3 = 2 \neq 0$$

چونکی سنووردارێ ڕێزکری نابیتە سفر نییە، ئەوی هەلگەڕاو هەیە.

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

ب $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$

سنووردارێ ڕێزکری بهەژمێرە.

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\times 12 - 2\times 3 = 0$$

چونکی سنووردارێ ڕێزکری سفرە، ئەوی هەلگەڕاو نینە.

ڕۆناهیەك

بۆ پەیداکرنا ڕێزکریێ $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ، ژ ڕێزکریێ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

a و d ئالوگۆڕ بکە و نیشانێن هەردوو دانەیێن دی بگۆهۆڕە.

هەولبدە هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ بهەژمێرە.

تو دشێی ڕێزکرییان بۆشیکارکرنا سیستەمێ هاوکێشەیێن هێلی بکاربینی، بکارئینانا ڕێزکرییان سیستەمێ هاوکێشەیێن هێلی دهێتە گۆهۆڕین بۆ کردارەکێ وەکی شیکارکرنا هاوکێشەیا $5x = 20$، ب لێکدانا هەردوو ڕەخێن ئەوێ هاوکێشەیێ دگەل هەلگەڕاوێ هاوکۆلکەیێ 5، ئانکو $\frac{1}{5}$. بۆ بجهئینانا ڤی کاری، سیستەمێ هاوکێشەیان دگۆهۆڕیت بۆ:

هاوکێشەیا ڕێزکریەکی Matrix equation $AX=B$ کو A دبیتە هێمایێ ڕێزکریێ هاوکولکەیێن سیستەمێ و X دبیتە هێمای **ڕێزکریێ نەزانراو Variable matrix**، و B دبیتە هێمایێ ڕێزکریێ **نەگۆڕاو Constant matrix** .

ئەو هاوکێشەیا ڕێزکریەی کو سیستەمێ هەردوو هاوکێشەیێن هێلی $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ دنوێنت دبیتە

$$A \bullet X = B$$

ڕێزکریێ هاوکولکەیان ← $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ → ڕێزکریێ نەگۆڕان

ڕێزکریێ نەزانراوان

بۆ شیکارکرنا هاوکێشەیا ڕێزکریەیی $AX=B$، هەردوو ڕەخێن هاوکێشەیێ دگەل هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ A لێکبدە (گریمان بکە کو هەلگەڕاو هەیە).

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

ئەنجامێ لێکدانا ڕێزکریێ A دگەل هەلگەڕاوێ وی دبیتە ڕێزکریێ یەکە I.

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

نموونە 3

شیکارکرنا سیستەمێ هاوکێشەیێن هێلی بکارئینانا هەلگەڕاوێ ڕێزکریی.

هاوکێشە یا ڕێزکرییەکێ سیستمی هێلی $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ دەنوێنێت بنڤیسە، پاشی شیکاربکە.

پێنگاڤ 1: ئەو هاوکێشە ڕیزکراوەییەی سیستمی دوو هاوکێشەکە دەنوێنێت بنووسە.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

پێنگاڤ 2: سنووداریێ ڕێزکریێ هاوکۆلکەیان بهەژمێرە.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1 - 1\times2 = -1 \neq 0$$

پێنگاڤ 3: هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ هاوکۆلکەیان بهەژمێرە.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

پێنگاڤ 4: شیکاربکە.

$$\underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

شیکار دبیتە: $x=-7$ و $y=15$.

هەولبدە 3. هاوکێشەیا ڕێزکریەیی بۆ سیستەمێ هێلی $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$ بنڤیسە، پاشی شیکاربکە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون د بیرکارییێدا

ئەنجامێ لێکدانێ بنڤیسە بێی کردارا لێکدانێ هەدوو ڕێزکرییان ئەنجام بدەی.

1 أ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

2 ڕییەکێ بێژە بۆ هەژمارتنا سنووردارێ ڕێزکریێ.

راهێناتێن ئاراستەکری

ئەنجامێ لێکدانێ دیاربکە بێی ئەنجامدانا لێکدانا هەردوو ڕێزکرییان:

3 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

هەلگەڕاوێ ڕێزکرییێ بهەژمێرە هەکە هەلگەڕاو هەبیت:

5 $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$

سیستەمێ هاوکێشەیان ل سەر شێوەیێ هاوکێشەیا ڕێزکریەیێ بنڤیسە.

8 $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

ڕاهێنان و بجهئینان

دیاربکە ئەرێ ڕێزکرییێ ئێکێ هەلگەڕاوێ ڕێزکرییێ دوویێیە:

10 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & -0.2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

هەلگەڕاوێ ڕێزکرییێ بهەژمێرە هەکە هەلگەڕاو هەبیت:

12 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

14 $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$

سیستەمێ هاوکێشەیان ل سەر شێوەیێ ڕێزکریەیی بنڤیسە.

15 $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2y - x = 6 \end{cases}$

16 $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$

17 **پێنگاڤێن جۆرەوجۆر:** یانەیا هەندرین گەشتەکا دەریایی ڕێکخست و 7 بەلەم ژ دوو جۆران بکارئینان، جۆری مەزن 6 کەسان هەلدگرت و جۆرێ بچووك دوو کەسان هەلدەگرت. ژمارەیا گەشتیاران 34 کەس بوون، سیستەمێ هێلی $\begin{cases} 6x + 2y = 34 \\ x + y = 7 \end{cases}$ ئەڤێ پرسیارێ دەردبڕت، x ژمارەیا بەلەمێن مەزنە و y ژمارەیا بلەمێن بچووکە.

أ ڕێزکرییێ هاوکۆلکەیان بنڤیسە؟

ب سیستەمێ پێشتر لسەرشێوەیێ ڕیزکریەیی بنڤیسە؟

ج هەلگەڕاوێ ڕێزکرییێ هاوکۆلکەیان بهەژمێرە.

د هاوکێشەیا ڕێزکریەیی شیکاربکە بۆ هژمارتنا ژمارە بەلەمان ژ هەر جۆرەکی؟

18 **شاشی د شیکارکرنێدا** هەرئێکێ شڤان و ساڤان هەلگەڕاوێ ڕێزکرییێ $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ هەژمارت. کێژ وان شاشی کر؟ و شاشییێ دیاربکە.

أ شڤان: $M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

ب ساڤان: $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

19 **بۆ خۆشیێ:** بابێ تەگۆتە تە 5000 دینار د بەریکاویدە هەنە، و پێکهاتییە ژ جۆرێن 50 دیناری و 100 دیناری، و ئەو دێ وی پارەی دەتە تە هەکە تو ژمارا پارچەیێن ژ هەرجۆرەکی بزانی. بۆزانێن ژمارەیا هەموو پارچەیان 73 پارچەنە، هەلگەڕاویێ ڕێزکرییێ بکاربینە بۆ قازانجکرنا 5000 دیناران

20 بۆچۆنا ژۆر بۆ باخچەیێ گیانەوەران، شێرزادی 24 000 دینار دان بۆ بهایێ 7 پلێتێن زاڕۆکان و 2 پلێتێن مەزنان، و مازنی 46 000 دیناران دان بۆ بهایێ 4 پلێتێن مەزنان و 13 پلێتێن زاڕۆکان، و هێمایێ x بۆ بهایێ پلێتا مەزنان دانە و y بۆ بهایێ پلێتا زاڕۆکان دانە.

أ ل سەر شێوەیێ سیستەمێ هاوکێشەیان ئەڤێ پرسیارێ دەرببڕە.

ب ئەرێ سنووردارێ ڕێزکرییێ هاوکولکەیان یەکسانە سفر؟ ژمارەیا شیکاران چەندە؟

ج شێوەیێ ڕێزکرییەیی و هەلگەڕاوێ ڕێزکرییێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا x و y.

د بهایێ پلێتێن مەزنان چەندە؟ بهایێ پلێتێن زاڕۆکان چەندە؟

لێنێرینەك بۆ پاش

21 ڕێیا لادانێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا سیستەمێ هاوکێشەیان:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+3y-6z=5 \\ -4z-5y+0.25z=-9 \end{cases}$$

لێنێرینەك بۆ پێش

22 وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+2$ وێنەبکە و پۆتانێ سەرێ وی دیاربکە.

بەشی 3

نەخشە

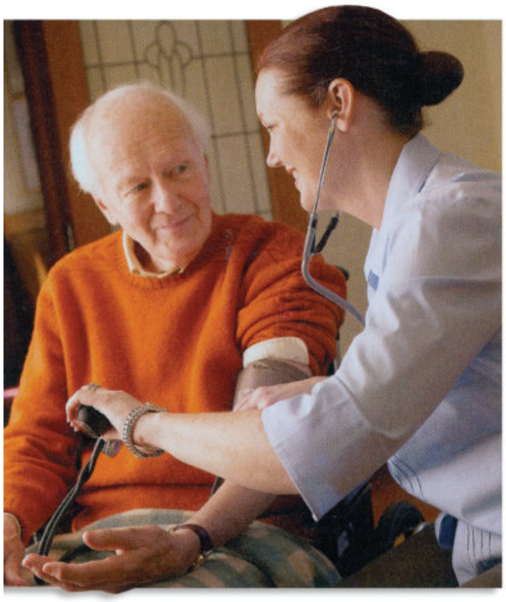
Functions

وانە

1. نەخشەیێن ڕادەدار
2. نەخشەیێن گۆهۆڕینێ
3. نەخشەیێن توانی
4. نەخشەیێن لۆگاریتمی

وانەیا 1

نەخشەیێن ڕادەدار
Polynomial Functions



بۆچی؟

نوژدار دشێن نەخشەیێن ڕادەدار بەکاربینن بۆ دروستکردنی سامپلەکی بۆ هنارتنا خوینێ د دەماراندا

ئارمانج

- نەخشەیا سێجایی دناسن.
- نەخشەیا ڕادەدار دناسن.
- وێنەیێ ڕونکرنێ بۆ نەخشەیێن ڕادەدار وێنەدکەن
- ئەوان پرسیارێن نەخشەیێن ڕادەدار بخوفە دگرن شیکاردکەن.
- پەرە بهایێن خۆ جهی دناسن.

زاراڤ
Vocabulary

نەخشەیا سێجایی
Cubic function
نەخشەیا ڕادەدار
Polynomial funtion
پلەیا نەخشەیا ڕادەدار
Degree of a Polynomial function

تە لەهەردوو پۆلێن دەهێ و یازدێ نەخشەیا هێڵی خواندبوو، کو ل سەر شێوەیێ $f(x)=ax+b$ دهێتە نڤیسین دەمێ $a \neq 0$، و نەخشەیا دووجایی کو ل سەر شێوەیێ $f(x)=ax^2+bx+c$ دهێتە نڤیسین دەمێ $a \neq 0$

نەخشەیێن سێجایی

نەخشەیێن سێجایی ئەو نەخشەنە ل سەر شێوەیێ

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ دهێتە نڤیسین $a \neq 0$.

تو دشێ هندەك نەخشەیان بینیە بەرچاڤێ خو کو لسەر شێوەیێ $g(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ دنڤیسن دەمێ $a_n \neq 0$ یان بەشێوەیەکی گشتی $h(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$.

دبێژنە نەخشەیا g ل سەری **نەخشەیا ڕادەدار ب پلەیا چار**، و دبێژنە نەخشەیا h **نەخشەیا ڕادەدار ب پلەیا** n .

نموونە

Increasing	بەرەڤ زێدەبوون
Decreasing	بەرەڤ کێمبوون
Turning point	خالا شلوقە
Local maximum	مەزنترین بهایێ خوجهی
Local minimum	بچووکترین بهایێ خوجهی
Local extremum	پەرە بهایێ خۆجهی

1 **بجهئینانەکا نوژداریێ.**

نوژدار بڕی ئەوێ خوێنا دڵ دەهنێریت د دەمارانڕا دپیڤن، ب ڕێیا تێکرنا شلەیەکی ڕەنگکری د خوینبەرەکی نێزیکی دلی دا ب هۆیێ دەرییەکێ، پاشی بڕی ئەوی شلەیێ رەنگکری یێ دناڤ دەماراندا بەلاڤبوویی دپێڤن، نەخشەیا $f(t)=0.0056t^3-0.22t^2+2.33t$ سامپلەکێ هێکدئینت بۆ پێڤانا ئەوی شلەیێ رەنگکری (بە ملگم د لیترەکێدا) دناڤ خوینێدا پێ دەمی t (بەچرکە ل $0 \leq t \leq 23$) کو t ئەو دەمێ بۆری ژ تێکرنا شلەیێ رەنککری دنوێنت .

أ بهایێ $f(t)$ بهەژمێرە ل $t=0$ و $t=3$.

ب بەحسبکە کو هەر بهایەك چ دەردبرت.

شیکار

أ $f(0)=0.0056(0)^3-0.22(0)^2+2.33(0)=0$

$f(3)=0.0056(3)^3-0.22(3)^2+2.33(3)=5.1612$

ب برێ $f(0)$ رێژەیا شلەیێ رەنگگری (ب ملگم د لێتەرەکێدا) د خوینێدا دنوێنت ژ دەستپێکا پێدانا مادەیێ رەنگگری، لێ $f(3)$ رێژەیامادەیێ رەنگگری(ب ملگم دلێتەرەکیدا) دخوینێدا دەنوێنت پشتی بۆرینا 3 چرکەیان ژپێدانا مادەیی.

هەولبدە بۆ نەخوشەکی دی، نەخشەیا $f(t)=0.000468t^4-0.016t^3+0.095t^2+0.806t$ ساملەکە بۆ پێڤانا مادەیێ رەنگگری ب (ملگم دلێتەریك) دخوێنێدا ل دویف دەمێ بۆری (t بەچرکە) ل سەر پێدانا مادەیێ رەنگگری. بهایێ $f(t)$ دەمێ $t=4$ و $t=17$. بهەژمێرە هەر بهایەك چ دنوێنت، بەحسبکە.

نموونە 2 وێنە کێشانا وێنەیێ رووونکرنێ بۆ نەخشەیەکا سێجایی

نەخشەیا $f(x)=x^3-3x$ بکاربینە.

أ خشتەیێ بەرامبەر تمامبکە.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

ب درووتەختێ پۆتانیدا، خالێن $(x, f(x))$ ئەوێن د خشتەیدا هاتین دیاربکە.

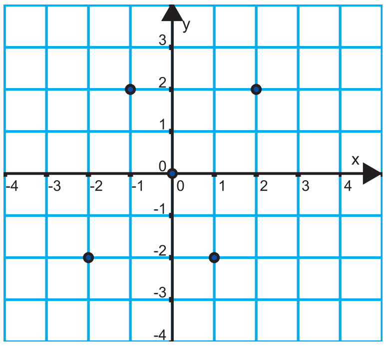
ج ئەڤان خالان ب چەماوەیەکی گونجایی پێك بگەهینە.

شیکار

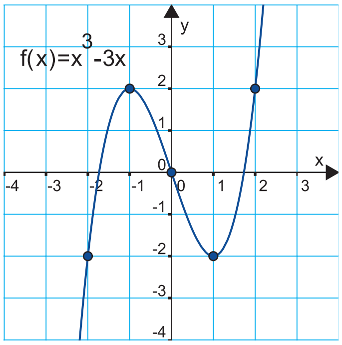
أ

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	2	0	-2	2

ب



ج



هەولبدە نەخشەیا $f(x)=x^4-8x^2+1$ بکاربینە.

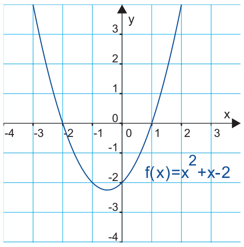
أ خشتەیێ بەرامبەر تمامبکە.

x	-3	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	3
$f(x)$	-3						10

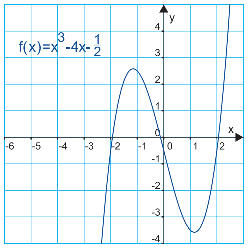
ب درووتەختێ پۆوتانیدا، خالێن $(x, f(x))$ ئەوێن دخشتەیدا هاتین دیاربکە.

ج ئەڤان خالان ب چەماوەیەکی گونجایی پێکڤە بگەهینە.

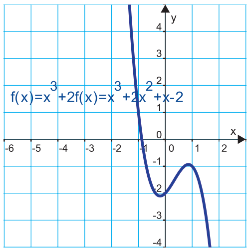
چالاکی بەرێ خو بدە ئەڤان نەخشەیێن ل خوارێ و وێنەیێن رووونکرنێ یێن وان.



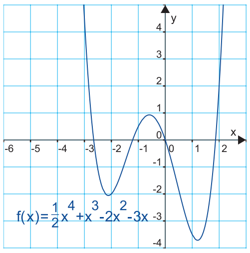
$f(x)=x^2+x-2$



$g(x)=x^3-4x-\frac{1}{2}$



$h(x)=-2x^3+2x^2+x-2$



$k(x)=\frac{1}{2}x^4+x^3-2x^2-3x$

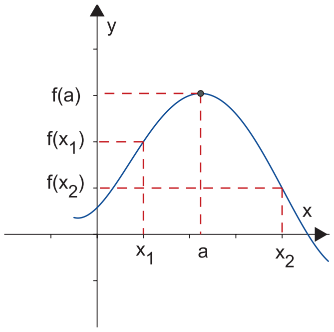
نەخشە	پلە	ژمارەیا گۆهۆرینا
f	2	1
g		
h		
k		

خشتەیێ بەرامبەر تمامبکە، ژمارەیا گۆهۆرینێن نەخشەیێ ژ بەرەڤ سەری بۆ بەرەڤ خواریێ، یان بەرڤاژی دیاربکە.

بهایێن بەرگر بۆ نەخشەیا پلەدار

دەمێ وێنەیێ ڕوونکرنێ نەخشەیەکێ بەرەڤ سەری دچت پاشی لێژە دبیت بۆ بەرەڤ خواریێ دماوەیەکی بواریێ نەخشەیدا، ئەو نەخشە مەزنترین بهایێ خوجهی **Local Maximum** وەردگریت دئەوی ماوەیدا. لێ هەکە وێنەیێ ڕوونکرنێ یێ نەخشەیێ بەرەف خواریێ بچیت پاشی بەرەڤ سەری بلندبیت دماوەیەکی بواریێ وێدا، ئەو نەخشەیە بچووکترین بهایێ خۆجهی **Local Minimum** وەردگریت دئەوی ماوەیدا.

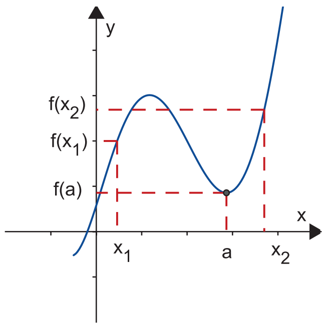
مەزنترین بهایێ خوجهی



هەکە $x \neq a$ ل ماوەیێ ل ناڤبەرا x_1 و x_2 دێ

$f(x) < f(a)$

بچووکترین بهایێ خۆجهی



هەکە $x \neq a$ ل ماوەیێ ل ناڤبەرا x_1 و x_2 دێ

$f(x) > f(a)$

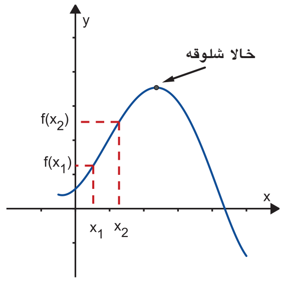
بهایێن پەرگر

دبێژنە ژمارەیا $f(a)$ مەزنترین بهایێ **خوجهی** هەکە $f(x) < f(a)$ بۆ بهایێ x هەرچەندبیت لەهاوسێیێ a دەمێ $x \neq a$.

دبێژنەژمارەیا $f(a)$ **بچووکترین بهایێ خوجهی** هەکە $f(x) > f(a)$ بۆ بهایێ x هەرچەندبیت ل هاوسێیێ a دەمێ $x \neq a$.

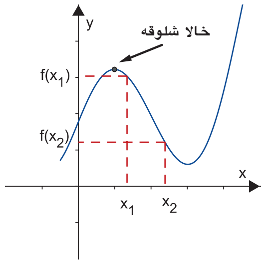
دبێژنەژمارەیا $f(a)$ **پەرە بهایێ خوجهی** هەکە ئەو بهایە مەزنترین بهایێ خوجهی یان بچووکترین بهایێ خۆجهی بیت.

ب هویری بەرێ خو بدە هەردوو وێنەیێن ڕوونکرنێ ل خوارێ. تێبینیێ بکە کو وێنەیێ ڕوونکرنێ چێدبیت بەرەڤ سەری یان بەرەڤ خواریێ بیت. دبێژن نەخشە بەرەڤ زێدەبوونا د ماوەیەکی بواریێ وێدا ، هەکە وێنەیێ ڕوونکرنێ بەرەڤ سەری بیت دئەوی ماوەیدا. هەروەسا دبێژن نەخشە بەرەڤ کێمبوونە دماوەیەکی بواریێ وێدا، هەکە وێنەیێ ڕوونکرنێ بەرەڤ خواریێ بوو د ئەوی ماوەیدا.



هەکە $x_1 < x_2$ دماوەیێ بەرەڤ زێدەبوونێدا، دێ

$f(x_1) < f(x_2)$



هەکە $x_1 < x_2$ دماوەیێ بەرەڤ کێمبوونیدا،

دێ $f(x_1) > f(x_2)$

دبێژنە خالێن رووکرنێ یێن بهایێن پەرگر خالێن شلوقە د رێرەوێ نەخشەیدا. نەخشە دهێتە گوهۆرین ژ بەرەڤ زێدەبوونێ بۆ بەرەڤ کێمبوونێ یان بەرۆڤاژی، دەمێ چەماوەیێ نەخشەیێ د ئەوان خالانرا دبۆریت. نەخشەیا سێجایی دوو خالێن شلۆقە هەنە ب زێداهی. لێ نەخشەیا پلە چوار 3 خالێن شلوقە هەنە ب زێداهی. ب شێوەیەکی گشتی ژمارەیا خالێن شلۆقەیێن نەخشەیەکا پلەدار ژ پلەیا n ، دبنە $n-1$ ب زێداهی.

بەرەڤ زێدەبوون و بەرەڤ کێمبوونا نەخشەیێ

هەکە x_1 و x_2دوو ژمارەبن دماوەیەکی بوارێ نەخشەیا $f(x)$ دا.

ئەو نەخشەیە بەرەڤ زێدەبوونە د ئەوی ماوەیدا هەکە ئەڤێ مەرجی ساخبکەت:

هەکە $x_1 < x_2$ دێ $f(x_1) < f(x_2)$.

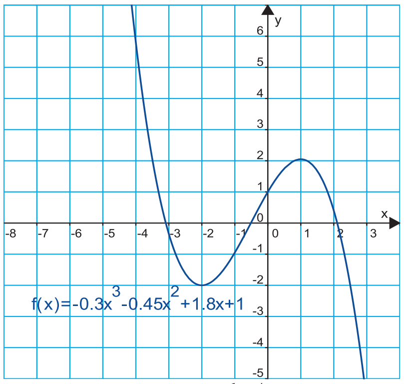
ئەو نەخشەیە بەرەڤ کێمبوونە د ئەوی ماوەیدا هەکە ئەڤێ مەرجی ساخبکەت:

هەکە $x_1 < x_2$ دێ $f(x_1) > f(x_2)$.

نموونە 3

بەرێ خو بدە وێنەیێ رووکرنێ یێ نەخشەیا:

$f(x) = -0.3x^3 - 0.45x^2 + 1.8x + 1$



أ ئەڤێ نەخشەیێ چەند خالێن شلۆقە چنە؟

ب ئەڤێ نەخشەیێ بهایێن پەرگرین خوجهی هەنە؟ و جۆرێ هەرئێکی ژ وان چییە؟

ج هەموو بەهایێن بەرگرێن خۆجهی و بهایێن x یێن وان بهەژمێرە ؟

د ماوەیێن بەرەڤ زێدەبوون و بەرەڤ کێمبوونێ بۆ ئەڤێ نەخشەیێ دیاربکە.

شیکار

أ نەخشەیێ دوو خالێن شلۆقە هەنە، وەکی دیار ل سەر چەماوەیێ وێ: $(-2, -2)$ و $(1, 2)$.

ب نەخشەیێ دوو بهایێن پرگرێن خۆجهی هەنە: ئێک ژ وان مەزنترین بهایە لنک $(1, 2)$ و یێ دووێ بچووکترین بهایە لنک $(-2, -2)$.

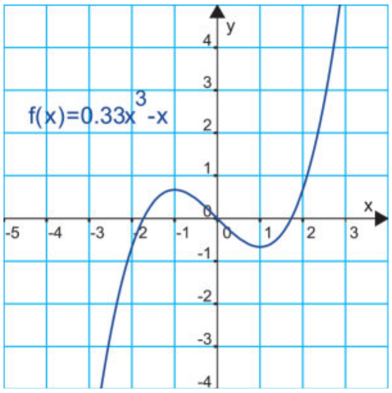
ج ئەو پەرە بهایێ لنک $(-2, -2)$دبیتە بچووکترین بهایێ خۆجهی ویەکسانە -2و بهایێ x دبیتە $x = -2$ ئەوپەرە بهایێ لنک $(1, 2)$دبیتە مەزنترین بهایێ خوجهی و یەکسانە 2 و بهایێ x دبیتە $x = 1$.

د نەخشە بەرەڤ کێمبوونە دەمێ بهایێ x کێمتربیت ژ -2 ، یان دەمێ بهایێ x مەزنتربیت ژ 1. لێ بەرەڤ زێدەبوونا دەمێ بهایێن x دناڤبەرا -2 و 1 دابن.

هەولبدە

بەرێ خو بدە وێنەیێ رووکرنێ یێ نەخشەیا

$f(x) = 0.33x^3 - x$



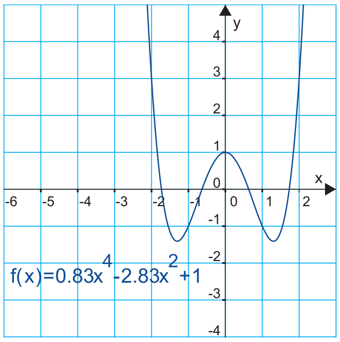
أ ئەڤێ نەخشەیێ چەند خالێن شلوقە هەنە؟

ب ئەڤێ نەخشەیێ چەند بهایێن پەرگرین خوجهی هەنە؟ جۆرێ هەر ئێک ژ وان چییە؟

ج هەموو بهایێن پەرگرین خوجهی و بهایێن x بۆ وان بهەژمێرە.

د ماوەیێن بەرەڤ زێدەبوون وبەرەڤ کێمبوونێ بۆ ئەڤێ نەخشەیێ دیاربکە.

بەردەوامبوون د بیرکارییدا



1 نەخشەیا ڕادەدار بۆ وێنەیێ ڕوونکرنێ یێ بەرامبەر وەسفبکە.

2 مەزنترین و بچووکترین بهایێ خۆجهی پێناسە بکە.

3 بەرەڤ زێدەبوون وبەرەڤ کێمبوونا نەخشە یەکێ دماوەیەکیدا پێناسە بکە.

ڕاهێنانێن ئاڕاستەکری

4 **پلەیا هەر نەخشەیەکا ڕادەدار بهەژمێرە.**

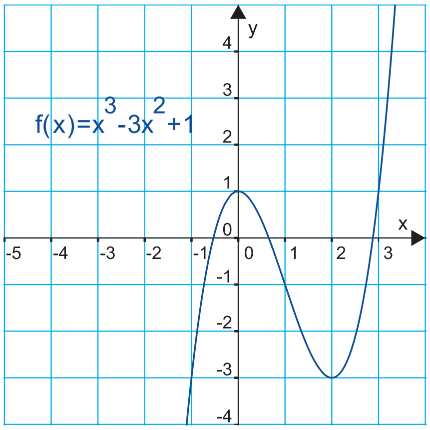
أ $f(x)=4x^3+2x^2-x-1$

ب $g(x)=x^4-3x^3+5x^2-2x-1$

ج $h(x)=6x-4x^4+x^7$

د $k(x)=3x^2+2x^6-4x^4-1$

وێنەیێ بەرامبەر نەخشەیا $f(x)=x^3-3x^2+1$ دنوێنت.



5 ئەڤێ نەخشەیێ چەند خالێن شلوقە هەنە؟

6 ئەڤێ نەخشەیێ چەند بهایێن پەرگرین خوجهی هەنە؟ جۆرێ هەر ئێك ژ وان چییە؟

7 هەموو بهایێن پەرگرین خوجهی و بهایێن x بۆ وان بهەژمێرە.

8 ماوەیێن بەرەڤ زێدەبوون وبەرەڤ کێمبوونێ بۆ ئەڤێ نەخشەیێ دیاربکە.

9 نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$ بەکاربینە.

أ خشتەیێ بەرامبەر تەمامبکە.

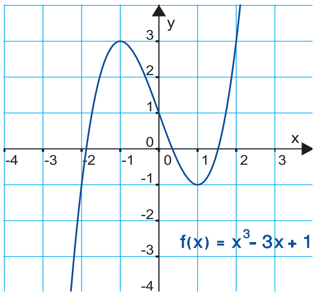
x	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$						

ب درووتەختێ پۆوتانیدا خالێن $(x, f(x))$ ئەوێن دخشتەیدا هاتین دیاربکە.

ج ئەوان خالان ب چەماوەیەکی گونجایی پێك بگەهینە.

ڕاهێنان و بجهئینان

وێنەیێ بەرامبەر نەخشەیا $f(x)=x^3-3x+1$ دنوێنت.



10 ئەڤێ نەخشەیێ چەند خالێن شلوقە هەنە؟

11 ئەڤێ نەخشەیێ چەند بهایێن پەرگرین خوجهی هەنە؟ جۆرێ هەر ئێك ژ وان چییە؟

12 هەموو بهایێن پەرگرین خوجهی و بهایێن x بۆ وان بهەژمێرە.

13 ماوەیێن بەرەڤ زێدەبوون وبەرەڤ کێمبوونێ بۆ ئەڤێ نەخشەیێ دیاربکە.

لێنێرینەك بۆپاش

14 خشتەیێ ل خوارێ تمامبكە ب هەژمارتنا بهایێن نەخشەیا دووجای $g(x)=x^2-2x-2$.
بچووكترین بهایێ نەخشەیا g چییە ؟ بهایێ x یێ وی دیاربكە.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$g(x)$									

لێنێرینەك بۆپێش

15 خشتەیێ ل خوارێ دەمێ پێدڤی t ب دەمژمێران بۆبرِینا دووریا 600كم دیاردكەت، ل دووف لەزێ s ب كیلومەتران د دەمژمێرەكیدا، خشتەیێ تەمامبكە وپەیوەندییەكێ دەرئەنجامبكە ناڤبەرا هەردوو گۆڕاوێن t و s ب ئێك دووڤە گرێدەت.

خێرایی	كات	دووری
30	20	600
40		
50		

وانەیا 2

نەخشەیێن گۆهۆڕین
Variation Functions

بۆچی؟
تو دشێی نەخشەیا گۆهۆڕین بکاربینی بۆ دیاریکرنا ژمارا وان کەسێن پێدڤێن بۆ بجهێنانا کارەکی، وەکی ئاڤاکرنا خانیەکی د دەمەکێ دیاریکریدا.

ئارمانج
- گۆهۆڕینا ڕاستەوانە دناسن و نەگۆڕێ وێ دیاردکەن.
- گۆهۆڕینا بەرۆڤاژی دناسن و نەگۆڕێ وێ دیاردکەن.
- هاوکێشەیا گۆهۆڕینا بەرۆڤاژی دنڤیسن.
- وان پرسیارێن گۆهۆڕینا ڕاستەوانە یان بەرۆڤاژی بخوڤ دگرن شیکاردکەن.

زاراڤ
Vocabulary

نەخشەیێن گۆهۆڕین
Variation functions
گوهۆڕینا ڕاستەوانە
Direct Variation
نەگۆرێ گۆهۆڕینێ
Constant of variation
گۆهۆڕینا بەرۆڤاژی
Indirect variation
دەرکنارێ ستوونێ
Vertical asymptote
دەرکنارێ ئاسۆیی
Horizontal asymptote

تو دشێی نەخشەیا گۆهۆڕین بکاربینی بۆ دیارکرنا ژمارا وان کەسێن پێدڤێن بۆ بجهێنانا کارەکی، وەکی ئاڤاکرنا خانیەکی د دەمەکێ دیارکریدا. گەلەك جاران دوو هند(بڕ)ب پەیوەندییەکا گۆهۆڕین دگەل ئێکودوو دئێنە گرێدان، گۆهۆڕینا بهایێن ئێکێ ژوان، گۆهۆڕینا بهایێن یا دی دیاردکەت. دەمێ پێدڤی بۆ برینا دوورییێ لناڤبەرا هەڤلیر و بەغدایێ وەك نموونە یێ گرێدایە دگەل لەزا ئەوێ ترومبێلا ژ هەڤلیر بۆ بەغدایێ دچیت. هەکە لەزاوێ زێدەبیت دەم دێ کێم بیت و هەکە دەم زێدە بیت لەزاوێ دێ کێم بیت. دبێژنە ئەڤی جۆرێ پەیوەندیێ **نەخشەیا گۆهۆڕین**.ل ئەڤێ وانەیێ دێ دوو جۆرێن نەخشەیێن گۆهۆڕین وەرگری:نەخشەیا **گۆهۆڕینا ڕاستەوانە** و نەخشەیا **گۆهۆڕینا بەروڤاژی**.

گۆهۆڕینا ڕاستەوانە

هەردوو گۆڕاوێ x و y دگەل ئێکو دوو ب پەیوەندییەکا گۆهۆڕینا ڕاستەوانە دهێنە گرێدان ، هەکە ڕێژەیا ئێکێ ژ وان ل سەر یێ دی یا نەگۆڕ بێت، ئانکو هەکە $\frac{y}{x}=k$ یان $y=kx$ دەمێ $k\neq0$ ژمارەیەکا ڕاستی یا دیارکری بیت. ئەو دوورییا ترومبێلەك دبڕیت ب لەزەکا نەگۆڕ $110\,km/h$ ڕاستەوانە دگۆهۆڕیت دگەل گۆهۆڕینا دەمی، هەکە دەم زێدەبیت دووری زێدەدبیت و هەکە دەم کێم بیت دووری کێم دبیت.

نەخشەیا گۆهۆڕینا ڕاستەوانە

دبێژنە نەخشەیا$f(x)$نەخشەیەکا گۆهۆڕینا ڕاستەوانە، هەکە ڕێسایا وێ ل سەر ڤی شێوەیی بیت $f(x)=kx$

دەمێk ژمارەیەکا ڕاستی ژبلی سفرێ بیت، دبێژنە k نەگۆڕێ گۆڕینێ.

نموونە 1

هاژۆتنا ترومبیلان کۆمپانیەك خولێن تایبەت بۆ فێرکرنا هاژوتنا ترومبێلان ڤەدکەت. هەکە کومپانیێ بەرامبەر 8 دەمژمێرین مەشقکرنێ ل حەفتیا ئێکێ 240000 دینار ژ شوفێرەکی وەرگرتن. دێ کۆمپان چەند پارەی بەرامبەر 11 دەمژمێرێن مەشقکرنێ ل حەفتیا دووێ ژ شوفێری وەرگریت، هەکە بزانی ئەو بڕێ پارەیێ کومپانی وەردگریت ڕاستەوانە دگۆهۆڕیت بەرامبەر گۆهۆڕینا ژمارا دەمژمێران .

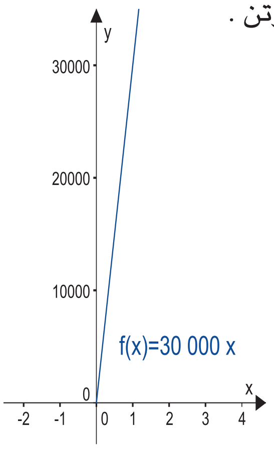
شیکار

ئەو پارەیێ کۆمپانی وەردەگریت (S)ڕاستەوانە دهێتە گوهۆڕین دگەل گۆهۆڕینا ژمارا دەمژمێران (x) نەگۆڕێ گۆهۆڕینێ k ڕێژەیا لناڤبەرا (S) و (x)، ئانکو $k=\frac{S}{x}=\frac{240\,000}{8}=30\,000$ ، پاشی $S(x)=30\,000x$ ل حەفتیا دووێ کۆمپانی پارەێ وەردگرت دبیتە $S(11)=30\,000\times 11=330\,000$ ئانکو 330 000 دیناران وەردگرت.

هزرکرنا ڕەخنەگر

نەگۆڕێ گوهۆڕینێ ل نموونەیا 1 چ دنوێنت؟
سێروانی بریاردا ب گەشتەکێ ڕابیت ل دۆرا جیهانێ ب پێیان ب ڕێڤەچوونەکا نەگۆڕ. ل حەفتیا ئێکێ سیروان 6 ڕۆژ برێڤەچوو و 384 کم برین، ل حەفتیا دووێ چەند کیلۆمەتران برێڤەچوو؟ هەکە بزانی ئەوی دوو ڕۆژێن پشوویی وەرگرتن .

نەخشەیا گۆهۆڕینا ڕاستەوانە بارەکی تایبەتە ژ نەخشەیا هێلی، تو دزانی شێوەیێ گشتی یێ نەخشەیا هێلی ئەڤەیە $f(x)=ax+b$ کو a لاری ڕاستەهێلیە و b ئێکو دوو برینا ستوونییە. نەخشەیا گۆهۆڕینا ڕاستەوانە نەخشەیەکا هێلییە، ئێکو دوو برینا ستوونی یا وێ دبیتە 5 .ژ ئەڤێ دیاردبیت کو وێنەیێ ڕوونکرنێ یێ نەخشەیا گۆهۆڕینا ڕاستەوانە ڕاستەهێلەکە د خالا بنەڕەترا دبۆریت.



نموونە 2

وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا نموونەیا 1 بکێشە.

شیکار

بەرێ خو بدە وێنەیێ بەرامبەر، و تێبینی بکە کو نەخشە نە یە پێناسەکرییە دەمێ x بەهایێن سالب وەردگریت، چونکی ئەڤ گۆڕاوە ژمارا دەمژمێرێن مەشقکرنێ دنوێنیت.

هەولبدە

ڕوونکرنا نەخشەیا هەولبدە بکێشە ئەوا پشتی نموونەیا (1)ێ هاتی.

نەخشەیا گوهۆڕینا بەرۆڤاژی

دبێژن نەخشەیا $f(x)$ نەخشەیەکە گۆهۆڕینا بەرۆڤاژیە، هەکە ڕێسایاوێ ل سەر ئەڤی شێوەیی بیت $f(x)=\frac{k}{x}$ یان $xy=k$

دەمێ k ژمارەیەکا ڕاست ژبلی سفرێ بیت. دبێژنە k نەگۆڕێ گۆهۆڕینێ.

نموونە 3

دارچاندن:

تیپەکا دیدەڤانیێ پەیمانەك دا بۆ چاندنا 500 شتلێن داران ل دەڤەرەکا ڕووت. ژمارا وان شتلێن هەر تیپەکا دوو کەسی بچینت ب 10 شتلان خەملاند ل دەمژمێرەکێ.

أ چەند دەمژمێر پێدڤێن بۆ تمامکرنا وی کاری هەکە ئێك تیپ پێ ڕابیت؟

ب چەند دەمژمێر پێدڤێن بۆ 50 تیپان بۆ تمامکرنا وی کاری؟

ج چەند دەمژمێر پێدڤێن بۆ100 تیپان بۆ تمامکرنا وی کاری؟

د نەخشەیا گۆهۆڕینا بەرۆڤاژی بنڤیسە. T ژمارەیا دەمژمێرێن پێدڤی دنوینت هەکە x ژمارەیا تیپان بیت.

ه ئەڤێ نەخشەیێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا $T(50)$ و $T(100)$ و ئەڤان بەراوردبکە دگەل هەردوو بەرسڤێن ب و ج.

شیکار

أ $500 \div 10 = 50$ ؛ ژمارا دەمژمێرین پێدڤی بۆ تمامکرنا کاری هەکە تیپەك پێ رابن.

ب $500 \div 50 = 10$ ؛ ژمارا دەمژمێرین پێدڤی بۆ تمامکرنا کاری هەکە50 تیپە پێ رابن.

ج $500 \div 100 = 5$ ؛ ژمارا دەمژمێرین پێدڤی بۆ تمامکرنا کاری هەکە100 تیپە پێ رابن.

د بەرێ خۆ بدێ کو $50 \times 10 = 500$ و $10 \times 50 = 500$ و $5 \times 100 = 500$ ژ ئەڤێ دیار دبیت کو $T \times x = 500$ یان $T = \frac{500}{x}$. نەخشەیا گۆهۆڕینا بەرۆڤاژی دبیتە $T(x) = \frac{500}{x}$.

هـ $T(50) = \frac{500}{50} = 10$ و $T(100) = \frac{500}{100} = 5$ ، هەردوو ئەنجام وەکی بەرسڤێن هەردوو پرسیارێن (ب و ج)ن .

هەولبدە ترومبێلەك ب لەزەکا نەگۆڕ برێڤە دچیت، و دووریا لناڤبەرا هەقلێر و بەغداد450 کیلومەتر ب 6 دەمژمێران بڕی.

أ لەزا ئەڤێ ترومبێلێ چەندبوو؟

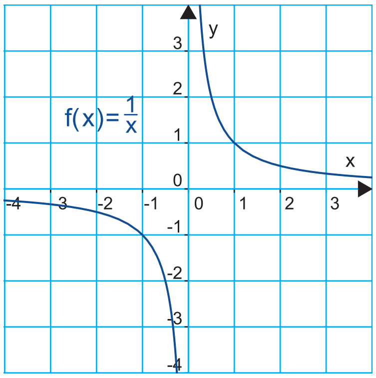
ب لەزا ترومبێلێ چەند بوو، هەکە ئەڤ دووریە ب لەزەکا نەگۆڕ بڕی بیت ب 8 دەمژمێران ؟

ج نەخشەیا گۆهۆڕینا بەرۆڤاژی بنڤیسە لەزا ترومبێلێ s دیار بکەت، گریمانبکە ئەو لەزیە نەگۆڕیت ل دویڤ دەمێ x (ب دەمژمێران) ئەو دەمێ بوری ل گەشتێ ژ هەقلێرێ بۆ بەغدایێ.

د لەزا ترومبێلێ چەندبوو هەکە ئەو دووریە ب 4 دەمژمێران بڕی بیت و لەزا وێ یا نەگۆڕبیت؟

نەخشەیا هەلگەراو

نەخشەیا هەلگەراو، ئەو نەخشەیا پێناسەکرییەب هاوکێشەیا $f(x) = \frac{1}{x}$.



وێنەیێ بەرامبەر وێنەیێ ڕوونکرنێ نەخشەیا هەلگەراو دنوێنت. هەکە ب هویری بەرێ خو بدیە ئەوی وێنەیی، دێ تێبینیا ئەڤان خالان کەی:

1. تو دشێی بهایێ y بەرامبەر بهایێ x بهەژمێری، بهایێ x هەرچەندبیت ژ بلی سفرێ. بواری نەخشەیا هەلگەراو هەموو ژمارەیێن ڕاستینە ژبلی سفرێ.

2. بهایێن x هەرچەند زێدەبن. بهایێ y کێم دبن. ئانکو ئەو نەخشە بەرەڤ کێمبوونە.

3. دەمێ بهایێن گۆڕاوی x دمووجەب بن و ئەو زێدەببن، بهایێن y دێ نێزیکی سفرێ بن و دێ موجەب مینن. ب شێوەیەکی دی: y بۆ رەخێ سفرێ مووجەب دێ نێزیك بیت دەمێ x بەرەڤ $+\infty$ بچیت.

4.دەمێ بهایێن گۆڕاوێ x د سالب بن و ئەو کێم ببن، بهایێن y دێ نێزیکی سفرێ بیت و دێ سالب مینن. بشێوەیەکی دی : y بۆ رەخێ سفرێ سالب دێ نزیك بیت دەمێ x بەرەڤ $-\infty$ بچیت.

5. بهایێن y دێ نیزیکی سفرێ بن دەمێ بهایێن رووتێ x بەرەڤ زێدەبوون بن پتر بۆ پتر، بئاوایەکێ دی : ئەو ڕاستەهێلێ هاوکێشەیاوی $y = 0$ ئانکو تەوەرێ x دبیتە دەرکنارێ ئاسویی بۆ وێنەیێ ڕوونکرنێ یێ نەخشەیا هەلگەراو.

6. بهایێن سالب بۆ گۆڕاوێ x هەر چەند زێدەبن، بهایێن y دێ کێم بن و دێ مینن سالب ئانکو: y بۆ ∞ێ چیت دەمێ x بەرەڤ سفر بچیت ژ ڕەخێ چەپێ.

7. بهایێن موجەب بۆ گۆڕاوی x هەرچەند کێم بن، بهایێن y دێ زێدەبن و مووجەب دێ مینن، ئانکو : y بۆ $+\infty$ێ چیت دەمێ x بەرەڤ سفرێ بچیت بۆ ڕەخێ ڕاستێ.

8. بهایێن ڕووتێن y بەرەڤ زێدەبوون دێ چیت،پتر و پتر دێ زێدەبن هەرچەند بهایێن رووتێ گۆراوێ x بەرەڤ کێم بوون بن پتر و پتر و ب ڤی شێوەی دەردبڕن:

ئەو ڕاستەهێلی ب هاوکێشەیا $x = 0$ دنوینت، ئانکو تەوەرێ y دبیتە دەرکنارێ ستوونێ بۆ وێنەیێ ڕوونکرنێ یێ نەخشەیا هەلگەڕاو.

نموونە 4 وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا $f(x) = \frac{-2}{x}$ وێنەبکە.

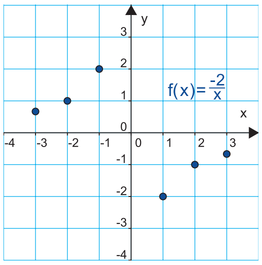
شیکار

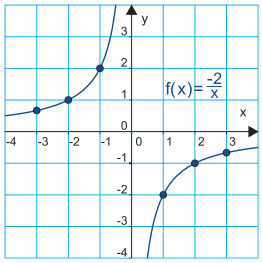
پێنگاڤ 1 خشتەیێ بهایان دروستبکە.

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	1	2	-2	-1	$-\frac{2}{3}$

پێنگاڤ 2 : ئەوان خالێن خشتە دیاردکەت بنوێنە.

پێنگاڤ 3 : چەماوەیەکی گونجایی بکێشە، ئاگەهداربە کو تەوەرێ x دبیتە دەرکنارێ ئاسۆیی و تەوەرێ y دبیتە دەرکنارێ ستوونی بۆ وێنەیێ ڕوونکرنێ.





هەولبدە وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا $f(x) = \frac{3}{x}$ وێنە بکە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون د بیرکارییێدا

1 هەکە خشتەیەك هەبیت، بهایێن گۆراوێ x و بهایێن بەرامبەر بۆ گۆڕاوێ y تێدا هەبن، چەوا دێ زانێ ئەڤ خشتەیە پەیوەندییا گۆهۆڕینا ڕاستەوانە لناڤبەرا هەردوو گۆڕاوان دنوێنت، و چەوا نەگۆڕێ گۆهۆڕینێ دڤی بارێدا دێ هەژمێری.

2 هەکە خشتەیەك هەبیت، بهایێن گۆڕاوێ x و بهایێن بەرامبەر بۆ گۆڕاوێ y تێدا هەبن، چەوا دێ زانێ ئەڤ خشتەیە پەیوەندییا گۆهۆڕینا بەرۆڤاژی لناڤبەرا هەردوو گۆڕاوان دنوێنت، و چەوا نەگۆڕێ گۆهۆڕینێ دڤی بارێدا دێ هەژمێری.

3 هەردوو گۆڕاوێن x و y ب پەیوەندییەکا گۆهۆڕینا بەرۆڤاژی پێکڤە دگریداینە. کو $y = 3$ دەمێ $x = 8$. چەوا بهایێ y دێ هەژمێری دەمێ $x = 2$، ئەڤێ ڕوونبکە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکری

4 ئەو پارەیێ ئازاد وەردگریت بەرامبەر کاریێ خو ل کارگەهەکێ ڕاستەوانە دگۆهۆڕیت دگەل ژمارا دەمژمێرێن کاریێ وی، ئازادی 300000 دینار وەرگرتن ل حەفتیا ئێکێ بەرامبەر 20 دەمژمێرێن کاریێ خۆ.

أ هاوکێشەیەکا نەخشەیا ڕاستەوانە بنڤیسە، پرسیاریێ دەرببڕیت.

ب ئازادی ل ئەڤێ حەفتییێ 24 دەمژمێران کارکر، ئەوی چەند پارە وەرگرتن؟

ج ئازادی بڕیاردا ل حەفتیا داهاتی 450000 دیناران وەربگریت، دڤێت ئەو چەند دەمژمێران کاربکەت؟

5 ترومبێلەك ب لەزەکا نەگۆڕ ل سەر ڕێیا بلەز ژ سلێمانییێ بۆ بەسرە (920 کیلومەتر) چۆ. شیرنێ ئەو دووریا ب لەزا $100\,km/h$ بڕی.

أ هاوکێشەیا نەخشەیا گۆهۆڕینا بەرۆڤاژی بۆ هەژمارتنا دەمی T پێ بنڤیسە .

ب ئازاد ئەو دووریا ب لەزا $125\,km/h$ بڕی، گەشتەیا ئازاد چەند ڤەکێشا.

ج شێرزاد ژ سلێمانییێ دەرکەفت ل دەمژمێر 8 ی سپێدێ و ئەوی دڤێت بگەهتە بەسرە ل دەمژمێر 7 ئێڤاری ب ڕاوستیانە ئێك دەمژمێرێ بۆ خوارنا ڤراڤینێ، دڤێت لەزا ترومبیلا وی چەند بیت؟

دیاربکە ئەرێ خشتە پەیوەندیا گۆهۆڕینا ڕاستەوانە یان پەیوەندییا گۆهۆڕینا بەرۆڤاژی دنوێنت یان هیچ چۆژوانا نانوێنیت.

6

x	6	4	1
y	2	3	12

7

x	2	5	9
y	3	6	4

8

x	24	4	12
y	30	5	15

ڕاهێنان و بجهئینان

9 تیپا شانۆیا مللی خو ئامادە دکەت بۆ سازکرنا شانویەکا نوو. ب هەلکەفتنا جەژنا نەورۆزێ، ئەڤە پێدڤی 3 ڕۆژانە بۆ ئامادەکرنا دیکوری، هەکە 20 کریکار کاربکەن .

أ هاوکێشەیا نەخشەیا گۆهۆڕینابەرۆڤاژی بۆ هەژمارتنا دەمێ پێدڤی T بۆ خو ئامادەکرنێ پێ ژمارا کرێکاران x بنڤیسە.

ب 12 کرێکار ل وەرشێ کاردکەن، دەمێ پێدڤی بۆ ئامادەکرنا دیکوری چەندە؟

ج ڕێڤەبەرێ شانۆیێ داخوازکر کو دێکۆر بهێتە ئامادەکرن ب دوو ڕۆژان. دڤێت چەند کریکار بەشدار بن ل وەرشێ.

دیاربکە ئەرێ خشتە پەیوەندییا گۆهۆڕینا ڕاستەوانە یان پەیوەندیا گۆهۆڕینا بەرۆڤاژی دنوێنت یان چو ژوانا نانوێنیت.

10

x	8	14	24
y	12	21	36

11

x	5	6.25	10
y	5	4	2.5

12

x	5	7	9
y	3	5	7

13 دەرچوویێن زانکویا دهوك گەشتەکێ بۆ عومان رێکدکەن قوتابیێن زانکویێ بشکداریێ تێدا دکەن. بهایێ بەشدارکرنێ ل گەشتێ بەرۆڤاژی دگۆهۆڕیت دگەل ژمارا پشکداران. نرخێ پشکداریێ بۆ قوتابیەکی 250 000 دینارن هەکە ژمارا پشکداران24 قوتابی بن. دڤێت ژمارا پشکداران چەندبیت دا نرخێ پشکداریێ بۆ ئێك قوتابی ببیتە 200 000 دینار.

لێنێرینەك بۆ پاش

پلەیا هەر رادەدارەکی چەندە؟

14 $f(x)=3x^5-2x^4+x^2+1$

15 $g(x)=2-5x+7x^2-x^3$

16 $h(x)=-5x^3-x^4+1$

لێنێرینەك بۆ پێش

17 ژمارا دانەیێن هەر کۆمەلەکا بەکتریان ل هەردەمژمێرەکێ دوو جاران دبیت، ژمارا دانەیێن ئەوێ کۆمەلێ دێ بیتە چەند هەکە ب دووان دەسپێکر بۆ 5 دەمژمێران؟

وانەیا 3

نەخشەیێن توانی
Exponential Functions

بۆچی؟

ئەو کەسێن تشتێن دەگمەن کۆم دکەن دشێن نەخشەیێن توانی بکاربینن بۆ دارشتنا سامپلەکی کو بهایێ وان تشتێن کومکرین بنوینت، وەکی ئامیرێن دەگمەن یێن موزیکی.

ئارمانج

- برین توانی بۆ نواندنا بارین گەشەبوون و لێژبوونێ دنڤیسن و هەژماردکەن.
- نیاسینا نەخشەیێن گەشەبوون و لێژبوونا توانی.
- نەخشەیا توانی یا سروشتی دناسن.

زاراڤ
Vocabulary

نەخشەیا توانی
Exponetial function

بنچینە
Base

دەرکنار
Asymptote

گەشەبوونا توانی
Exponetial growth

لێژەبوونا توانی
Exponetial decay

نەخشەیا توانی یا سروشتی
Natural exponetial function

یاسایا مۆر Moore ئەوا دهێتە بکارئینان دپیشەسازیابژمێراندا دبێژیت: ژمارا وان ترانزستەرێن د پێکهاتێن بژمێریدا سالانە دبنە دوو جارانی وان، خشتەیێ ل خوارێ ژمارا ترانزستەران و زێدەبوونا وان د پێکهاتێن بژمێریدا ژ سالێن دەسپێکا چێکرنا وان دیاردکەت .

ژمارا ترانزستەران دپێکهاتەکێدا							
سال	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
ژمارە	60	120	240	480	960	1920	3840

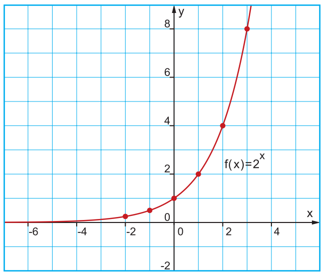
$\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$

دشێن ئەوێ گەشەبوونا (زێدەبوونا) سالانە دوو جاران دبیت بنوێنن بکارئینانا نەخشەیەکێ توانا وێ گۆڕاوەکی بخۆڤەبگرت. دبێژنە ڤێ **نەخشەیا توانی** سادەترین شێوە بۆ نەخشەیا توانی ئەڤەیە $f(x)=b^x$، کو **بنچینە** b ژمارەیەکا نەگۆڕە، و توانا وێ x ڕادەکی ئازادە.

توان ← بنچینە ←

$$f(x)=b^x \text{ و } b>0, b\neq 1$$

وێنەیێ بەرامبەرە وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا توانی $f(x)=2^x$ دیاردکەت. بوارێ ئەڤێ نەخشەیێ دبیتە کۆمەلا ژمارەیێن ڕاستی مەودایێ وێ دبیتە ژمارەیێن ڕاستی بێن موجەب $\{y/y>0\}$.



x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

بەرێ خو بدێ کو وێنەیێ ڕوونکرنێ یێ نەخشەیێ بەرە بەرە نێزیکی تەوەرێ x دبیت هەر چەند بهایێن x کێم ببن. هەروەسا وێنەیێ ڕوونکری ل تەوەرێ x ناکەڤیت،و ل ژووریا وێ دمینیت، چونکی بهایێ برێ 2^x بەردەوام موجەب دمینت هەر چەندبیت بهایێ x . تەوەرێ x دبیتە دەرکنارێ ئاسۆیی بۆ نەخشەیا $f(x)=2^x$. **دەرکنار** ڕاستەهێلەکە وێنەیێ ڕوونکرنێ یێ نەخشەیێ بەرە بەرە نزیکی وێ دبیت هەر چەند بهایێن x گەلەک مەزن بن یان گەلەک بچووک بن.

ل بیرتە بیت

ل پەیوەندیێ $y=b^x$، y گۆڕاوێ پشتبەستە بۆ گۆڕاوێ x ـ. چونکی بهایێ y ب بهایێ x دئێتە دیارکرن.

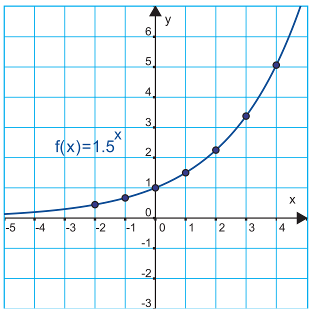
نەخشەیا $f(x)=ab^x$ ، دەمێ $a>0$ و $b>1$ دبیتە نەخشەیا **گەشەبوونا توانی** بهایێن وێ زێدە دبن هەکە بهایێن x زێدەببن . و نەخشەیا $f(x)=ab^x$ دەمێ $0<b<1$ دبیتە نەخشەیا **لێژەبوونا توانی** بهایێن وێ کێم دبن هەر چەند بهایێن x زێدەببن.

نموونــــه 1

وێنەیێ ڕوونكرنێ بۆ نەخشەیێن توانی

دیاربكە ئەرێ نەخشە نەخشەیەكا گەشەبوونا توانییە یان نەخشەیەكا لێژەبوونا توانییە، پاشی وێنەیێ بكێشە

أ $f(x)=1.5^x$



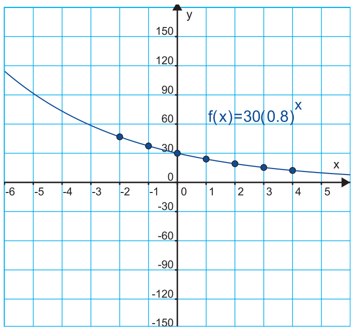
پێنگاڤ 1 بهایێ بنچینەیی دیاربكە.

$f(x)=1.5^x$ بنچینە 1.5 ژ 1 مەزنترە، نەخشە دبیتە نەخشەیا گەشەبوونا توانی.

پێنگاڤ 2 وێنەیێ ڕوونكرنێ بۆ نەخشەیێ وێنە بكە بكارئینانا خشتەیێ بهایان .

x	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.4	0.7	1	1.5	2.3	3.4	5.1

ب $f(x)=30(0.8)^x$



پێنگاڤ 1 بهایێ بنچینەیی دیاربكە.

$f(x)=30(0.8)^x$ بنچینە 0.8 ژ 1 بچووكترە، نەخشە دبیتە نەخشەیەكا لێژبوونا توانییە.

پێنگاڤ 2 وێنەیێ ڕوونكرنێ بۆ نەخشەیێ وێنە بكە بكارئینانا خشتەیێ بهایان .

x	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	30	19.2	12.29	7.86	5.03	2.22	2.06

هەولبدە **1.** دیاربكە ئەرێ نەخشەیا $f(x)=5(1.2)^x$ نەخشەیا گەشەبوونا توانییە یان نەخشەیا لێژبوونا توانییە، وێنەیێ ڕوونكرنێ بۆ نەخشەیێ وێنەبكە.

تو دشێی گەشە بوونێ یان لێژەبوونێ بنوێنی بكارئینانا ڕێژەیا سەدی یا ئەڤێ گەشەبوونێ یان لێژەبوونێ، هەكە $r\%$ ڕێژەیا سەدی بیت گەشەبوون یان لێژەبوونا برەكی دیاركری ل دەمەكی دیاركری (ساڵ یان هەیڤ یان حەفتیەك یان دەمژمێرەك. . .) بیت وەكی دانانا (ایداع) كۆژمەیەكێ پارەیی دبانكێدا، بكارئینانا ئەڤێ ڕێسایا ل خوارێ تو دشێی بهایێ ئەڤی كۆژمەیێ پارەیی بهەژمێری پشتی بۆ رینا t ماوەیێ دەمی.

$$A(t)=a(1\pm r)^t$$

گۆژمێ بنەڕەت (a) — ژمارا ماوەیێن دەمی (t) — گوژمێ دوماهیێ ($A(t)$) — تێكڕایێ گۆهۆڕینێ (r)

بنچینەیێ ئەڤێ نەخشەیا توانی دبیتە $1+r$ و ئەو ل بارێ گەشەبوونییە و دبێژنێ **هاوكۆلكەیێ گەشەبوونیە** و $1-r$ ل بارێ لێژەبوونیە و دبێژنێ **هاوكۆلكەیێ لێژەبوونێ**.

نموونە 2

بجهئینان ل سەر ئابووری

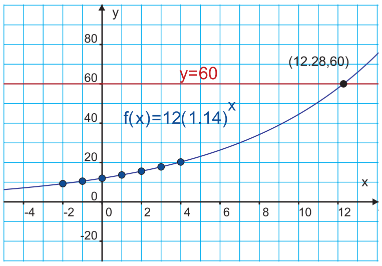
ل سالا 2000 گۆڤەندی گیتارەکا دەگمەنی کڕی ب 12 ملیۆن دیناران، کو مێژوویا وێ ڤەدگەڕیا سالا 1959. شارەزاییان وەسا خەملان کو بهایێ ئەوێ گیتارێ سالانە زێدەدبیت ب تێکڕایی 14%. ب وێنەیێ ڕوونکرنێ ئەوێ سالا بهایێ گیتارێ تێدا دبیتە 60 ملیون دینار دیاربکە.

پێنگاڤ 1 : نەخشەیەکی بنڤیسە کو سامپلەکی بۆ گۆهۆڕینا بهایێ گیتارێ بنوێنت.

$f(t)=a(1+r)^t$ نەخشیا گەشەبوونا توانی

$=12(1+0.14)^t$ ل جهێ a بهایێ وی 12 و ل جهێ r بهایێ وی 0.14 دانە.

$=12(1.14)^t$



پێنگاڤ 2 : ئەوان خالێن ل خشتەیێ دیارکری بنوێنە، پاشی چەماوەیەکی گونجایی بکێشە کو دوان خالانرا ببۆرت.

x	−8	−4	0	2	4	8
$f(x)$	4.21	7.1	12	15.6	20.27	34.23

پێنگاڤ 3 : ڕاستەهێلی $y=60$ بکێشە و پۆیێ x بۆ خالا ئێکودووبڕینا وی دگەل چەماوەیێ نەخشەیێ دیاربکە. ئەو دکەڤتە ناڤبەرا 12-13 . ئانکو بهایێ گیتارێ دبیتە 60 ملیون دینار ل سالا سێزدێ پشتی کڕینێ، ئانکو ل سالا 2013.

هەولبدە ژمارا نەهەنگێن کومدین ئوسترالی 350 نەهەنگ بوون لە سالا 1981 و ژمارا وان سالانە زێدەبوون ب تێکڕایێ 12%. نەخشەیەکا توانی بنڤیسە کو سامپلەکی بۆ ئەوێ زێدەوونێ (گەشەبوونێ) بنوێنت، پاشی چەماوەیێ ئەوێ نەخشەیێ وێنەبکە و بکاربینە بۆ دیار ئەوێ سالا ژمارا نەهەنگان تێدا دەبیتە 1500 نەهەنگ.

نموونە 3

بجهئینان ل سەر نزمبوونا بهاییان

بهایێ بارهەلگرەکا نوو 28 ملیون دیناربوو، بهایێ ئەوێ بارهەلگرێ ب تیکڕای 9.5% سالانە نزم دبوو. نەخشەیەکا توانی بنڤیسە کو سامپلەکێ بۆ ئەوێ نزمبوونێ بنوێنت. پاشی چەماوەیێ نەخشەیێ بکێشە و بکاربینە بۆ دیارکرنا ئەوێ سالا بهایێ بارهەلگرێ تێدا دبیتە 5 ملیۆن دینار.

پێنگاڤ 1 : نەخشەیەکێ بنڤیسە کو سامپلەکی بۆ گۆهۆڕینا بهایێ بارهەلگری بنوێنت.

$f(t)=a(1-r)^t$ نەخشە لێژبوونا توانییە

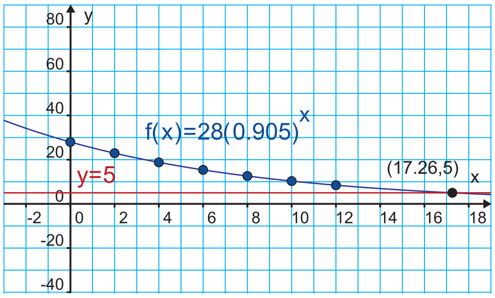
$=28(1-0.095)^t$ 28 ل جهێ a و 0.095 ل جهێ r دانە.

$=28(0.905)^t$

پێنگاڤ 2 : چەماوەیێ نەخشەیێ وێنەبکە.

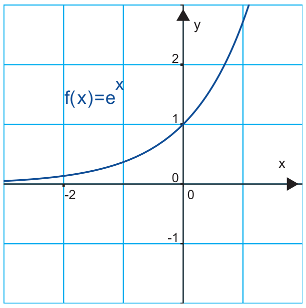
x	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	28	22.93	18.78	15.38	12.6	10.32	8.45

ئەوان خالێن ل خشتەیی دیارکری بنوێنە و چەماوەیەکی گونجای وێنەبکە کو دوان خالانرا ببۆرێت.



پێنگاڤ 3 : ڕاستەهێلی $y=5$ بۆ پۆتانێ خالا ئێكودووبڕینێ دگەل چەماوەیێ نەخشەیێ بخەملینە. ودیاردبیت كو پۆیێ ئەوێ خالی دكەڤیتە ناڤبەرا 17 و 18 ، ئانكو بهایێ بارهەلگری دێ بیتە 5 ملیون دینار ل سالا هەژدێ پشتی كڕینێ.

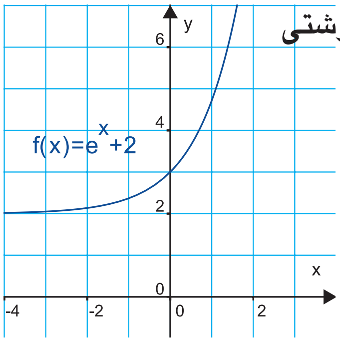
هەولبدە ماتۆرسكلەك بهایێ وی ئێك ملیون دینارە و بهایێ وی سالانە ب تكێراییێ 15%كێم دبیت، نەخشەیەكا توانی بنڤیسە كو سامپلەكی بۆ ئەوێ كێمبوونێ بنوینت، پاشی وێنەیێ ڕوونكرنێ بۆ ئەوێ نەخشەیێ بكێشە بۆ دیاریكرنا ئەوێ سالا نرخێ وی دبیتە 100 هزار دینار.



جۆرەكی دیاركری ژ نەخشەیێن توانی هەیە كو ڕۆلەكی گرنگ ل بجهئینانێن ئابووری و كۆمەلایەتی و دارایی دبینت: ئەوژی نەخشەیەكە توانییە بنچینەیێ وی دبیتە ژمارا نیپەر Neper و هێمایێ e بۆ دهێتە دانان، ئەوە ژمارەیەكا نارێژەییە وەك π و بهایی وی $e=2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 4....$

نەخشەیا توانی ئەوا بنچینەیێ وی e بیت، دبێژنێ **نەخشەیا توانی یا سروشتی**. نەخشەیا توانی یاسروشتی هەموو سیفەتێن نەخشەیا توانی هەنە.

نموونە 4 وێنەكێشا وێنەیێ ڕوونكرنێ بۆ نەخشەیا توانی یاسروشتی



وێنەیێ ڕوونكرنێ بۆ نەخشەیا $f(x)=e^x+2$ وێنە بكە.

شیكار

خشتەیێ بهاییان بۆ ڤێ خشتەیێ دروستبكە، چونكی ژمارە e ژمارەیەكا نارێژەییە. تو دشێی بهایێن نەخشەیێ بۆ دەهێكێ نێزیكبكەی.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)=e^x+2$	2.0	2.1	2.4	3	4.7	9.4	22.1

هەولبدە **4.** وێنەیێ ڕوونكرنێ بۆ نەخشەیا $f(x)=e^x-3$ وێنەبكە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون د بیركارییێدا

1 نەخشەیەكا توانی بنچینەیێ وی دكەڤیتە ناڤبەرا 0 و 1 ، ئەرێ ئەو نەخشە، نەخشەیەكا گەشەبوونا توانییە یان نەخشەیەكا لێژبوونا توانییە؟

2 نەخشەیا توانی $f(x)=25\times 2^x$ گەشەبوونا كۆمەلەكا بەكتریان دنوێنت، ژمارە 25 چی دنوێنت؟ ژمارە 2 چ دنوێنت؟

3 نەخشەیا توانی $f(x)=25\times 2^x$ گەشەبوونا كۆمەلەكا بەكتریان دنوێنت. ڕێژەیا سەدی بۆ گەشەبوونا ئەڤێ كۆمەلێ چەندە؟

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

دیاربکە ئەرێ نەخشە نەخشەیەکا گەشەبوونا توانییە یان نەخشەیا لێژەبوونا توانییە.

4 $f(x)=32(0.5^x)$

5 $f(x)=0.5(1.2^x)$

6 $f(x)=0.4\left(\frac{3}{4}\right)^x$

7 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

8 $f(x)=\frac{1}{3}(1.3)^x$

9 $f(x)=10(2.7)^x$

10 $f(x)=2(10)^x$

11 $f(x)=0^x$

12 $f(x)=1(0.5)^x$

ڕاهێنان و بجهئینان

13 **بژمێر** بهایێ بژمێران سالانە ب ڕێژەیا 30% کێم دبیت، کاوەی بژمێرەکا پێشکەفتی ب 000 765 2 دیناران کڕی، ژمارا وان سالێن پێدڤی بخەملینە کو بهایێ ئەوێ بژمێرێ کێمتربیت ژ 000 350 دیناران؟

14 **بانك** بانك یاسایەکێ بۆ هەژمارتنا بهایێ نۆکە بۆ کۆژمەیەکی هاتیە دانان بکاردئینیت $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$، کو A گۆژمەیێ نۆکەیە و P گۆژمەیێ بنەڕەتیە یێ هاتیەدانان و r تێکڕایێ قازانجێ سالانەیە و t دەمە ب سالان و n ژمارا ماوەیێن د سالەکێدا پارە دهێتە هەژمارتن ئانکو هەژمارتنا قازانجی وزێدەکرنا وی ل سەر کۆژمەیێ هاتیە دانان. سروود 5 ملیون دینار ب تێکڕایێ قازانجێ سالانە 5% ب هەژمارتنەکا وەرزی (4 جار د سالەکێدا) دانان.

أ بهایێ گۆژمەیی دێ بیتە چەند پشتی 5 سالان.

ب کەنگی گۆژمەیێ هاتیەدانان دێ ژ 10 ملیون دیناران زێدەتربیت.

ج **دێ چ بیت هەکە...؟** سروود دێ چەند قازانج کەت پشتی 5 سالان هەکە هەژمارتن هەیڤانەبیت نەوەرزانە بیت؟

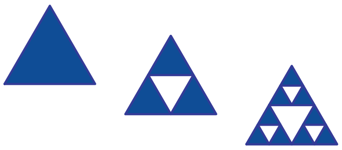
15 **خەملاندن** ئاکنجیێن ل سەر ئەردی ل سالا 2000 ب 6.1 ملیار کەس هاتنە خەملاندن، تێکڕایێ زێدەبوونێ ب 1.4% سالانە هاتەخەملاند. ژمارا ئاکنجیین ل سەر ئەردی بخەملینە ل سالا 2020 . نەخشەیەکێ بنڤیسە زێدەبوونا ئاکنجیین لسەر ئەردی پێ ژمارا سالان بنوێنت پشتی سالا 2000 (2000 =سالا 0). و ئەوێ نەخشەیێ بکاربینە بۆ بەراوردکرنا خەملاندنا تەیا بەرێ دگەل وی ئەنجامێ تە دیارکری بکارئینانا نەخشەیێ.

لێنێرینەك بۆ پاش

16 سیستەمێ هیلی ل خوارێ شیکاربکە.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=2 \\ 2x+y-3z=-1 \end{cases}$$

لێنێرینەك بۆ پێش



17 سێگۆشەیا سیربنسکی شێوەیەکە ب دەست تە دکەڤیت ژ سێگۆشەیەکا رێك ب وەرگرتنا سێگۆشەیەکا رێك ژ ناڤەراستێ سێگۆشەیا ئێکێ. پاشی ئەڤ کارە دووبارە دبیت لەسەر هەر سێگۆشەیەکا بدەست تە دکەڤیت. ژمارا سێگۆشەیان ل قوناغا پێنجێ دێ بیتە چەند؟

وانەیا 4

نەخشەیێن لۆگاریتمی

Logarithmic Functions

بۆچی؟
لۆگاریتمان بۆ پیڤانا ترشییا ئاڤێ بکاردئینن

ئارمانج

- شێوەیێن هاوتا بۆ نەخشەیێن توانی و لۆگاریتمی دنڤیسن.
- نەخشەیێن لۆگاریتمی دنڤیسن وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ وان وێنەدکەن و بهایێ وان د هەژمێرن.

زاراڤ
Vocabulary

لۆگاریتم	Logarithm
لۆگاریتما ئاسایی	Common logarithm
لۆگاریتما سروشتی	Natural logarithm
نەخشەیا لۆگاریتمی	Logarithmic function

چەندجاران دینارەکێ دوو جاران دکەی دا ببیتە 8 دینار؟ تو دشێی هاوکێشەیا $1\times(2)^x = 8$ بکاربینی بۆ نواندنی ڤی کاری. تو دشێی ئەڤێ هاوکێشەیێ ب هزری شیکاربکەی هەکە ل بیرا تەبیت کو $2^3 = 8$ ، دڤێت تو دینارەکێ 3 جاران دووجاران بکەی دا 8 دینار بدەست تە بکەڤن.

دینارەکێ دێ چەند جاران دووجاران کەی دا ببیتە 512 دینار؟ تو دشێی ڤێ پرسیارێ شیکاربکەی هەکە تو بشێی هاوکێشەیا $2^x = 512$ شیکاربکەی. بکارئینانا کردارەکا بەرۆڤاژیا بلندکرنا ژمارەیەکێ بۆ هێزەکێ ب توانەکا دیارکری. ئەڤ کردارا بەرۆڤاژی دبیتە هەژمارتنا لۆگاریتمی . **لۆگاریتم** دبیتە توانا ئەوێ هێزا ژمارەیەکا (بنچینە) دیاریکری بۆ وێ هاتبیتە بلندکرن دا بهایێ پێدایی بدەست تە بکەڤیت.

تو دشێی هاوکێشەیا توانی ب شێوەیێ لۆگاریتمی بنڤیسی و بەرۆڤاژی.

هاوکێشەیا توانی	هاوکێشەیا لۆگاریتمی
$b^x = a$	$\log_b a = x$

$$b > 0,\ b \neq 1$$

نموونە 1

گوهۆڕین ژ شێوەیێ توانی بۆ شێوەیێ لۆگاریتمی

هەر هاوکێشەیەکا توانی ل سەر شێوەیێ لۆگاریتمی بنڤیسە.

	هاوکێشەیا توانی	هاوکێشەیا لۆگاریتمی	
أ	$2^6 = 64$	$\log_2 64 = 6$	بنچینەیێ هێزێ دبیتە بنچینەیێ لۆگاریتمی.
ب	$4^1 = 4$	$\log_4 4 = 1$	توانا هێزێ دبیتە لۆگاریتم.
ج	$5^0 = 1$	$\log_5 1 = 0$	هێزا هەر ژمارەیەکێ ژ بلی سفرێ ب توانا سفری دبیتە 1
د	$5^{-2} = 0.04$	$\log_5 0.04 = -2$	چێدبیت توان یان (لۆگاریتم) یا سالب بیت.
هـ	$3^x = 81$	$\log_3 81 = x$	چێدبیت لۆگاریتم (یان توان) گۆڕاوەک بیت.

هەولبدە هاوکێشەیا توانی ل سەر شێوەیێ لۆگاریتمی بنڤیسە.

أ $9^2 = 81$ ب $3^3 = 27$ ج $x^0 = 1 (x \neq 0)$

نموونە 2

گوهۆڕین ژ شێوەیێ لۆگاریتمی بۆ شێوەیێ توانی

هەرهاوکێشەیەکا لۆگاریتمی ل سەر شێوەیێ توانی بنڤیسە.

	هاوکێشەیا لۆگاریتمی	هاوکێشەیا توانی	
أ	$\log_{10} 100 = 2$	$10^2 = 100$	بنچینەیێ لۆگاریتمی دبیتە یێ هێزێ.
ب	$\log_7 49 = 2$	$7^2 = 49$	لوگاریتم توانا هێزێیە.
ج	$\log_8 0.125 = -1$	$8^{-1} = 0.125$	چێدبیت لۆگاریتم یا سالب بیت.
د	$\log_5 5 = 1$	$5^1 = 5$	
هـ	$\log_{12} 1 = 0$	$12^0 = 1$	

هەولبدە هاوکێشەیا لۆگاریتمی ل سەر شێوەیێ توانی بنڤیسە.

أ $\log_{10} 10 = 1$ ب $\log_{12} 144 = 2$ ج $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

لۆگاریتم توانە، لەوا دشێن یاسایێن هێزێ ل سەر لۆگاریتمێ بجهبینن. چێدبیت تە سەرنجێ وان سیفەتان کر بیت ل نموونەیا دوماهیکێ.

هەندێک سیفەتێن لۆگاریتمان

b هەر بنچینەیەک بیت و $b > 0$ و $b \neq 1$.

شێوەی لۆگاریتمی	شێوەی توانی	نموونە
لۆگاریتما b ب بنچینەی b $\log_b b = 1$	$b^1 = b$	$\log_{10} 10 = 1$ $10^1 = 10$
لۆگاریتما 1 $\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$ $10^0 = 1$

لۆگاریتما ئاسایی لۆگاریتما بنچینە 10 . هەکە بنچینەی لۆگاریتمێ دیار نەکربیت ئەو 10.

نموونە: $\log 5 = \log_{10} 5$

نمـــوونـــــه 3

هەژمارتنا بهایێ لۆگاریتمێ ب هزری:

بهایان ب هزری بهەژمێره.

أ $\log 1000$

$10^{?} = 1000$

$10^{3} = 1000$

$\log 1000 = 3$

ب $\log_4 \frac{1}{4}$

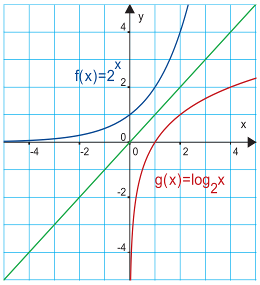
$4^{?} = \frac{1}{4}$

$4^{-1} = \frac{1}{4}$

$\log_4 \frac{1}{4} = -1$

هەولبدە **بهایێ هەر برەکی ب هزری بهەژمێرێ.**

أ $\log 0.00001$ **ب** $\log_{25} 0.04$

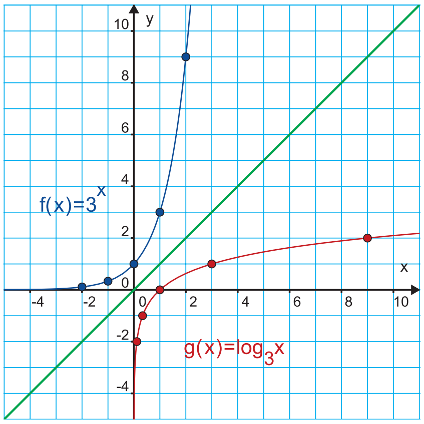


چونکی تو دشێی شێوەیێ توانی بگۆهۆری بۆ شێوەیێ لۆگاریتمی و بەروڤاژی، دێ هەر نەخشەیەکا توانی $f(x)$ نەخشەیەکا نوی پەیداکەت $g(x)$ کو ل سەر شێوەی لۆگاریتمی دهێتە نڤیسین و دبێژنێ **نەخشەیا لۆگاریتمی یا بەروڤاژی**. هەکە $f(x) = b^x$ دێ $g(x) = \log_b x$ بوارێ نەخشەیا $g(x)$ دبیتە مەودایێ نەخشەیا $f(x)$ و مەودایێ نەخشەیا $g(x)$ دبیتە بوارێ نەخشەیا $f(x)$. ل وێنەیێ بەرامبەر وێنەیێ رۆونکرنێ بۆ نەخشەیا $f(x) = 2^x$ و وێنەیێ رۆونکرنێ بۆ نەخشەیا لۆگاریتمی یا بەروڤاژی $g(x) = \log_2 x$ و راستەهێلێ $y = x$ دیاردبیت. بەرێ خو بدێ کو هەردوو رۆونکرنێ یێ نەخشەیا توانی و نەخشەیا لۆگاریتمی یا بەروڤاژی د هاوجێنە لدۆر ئەوی راستەهێلی.

نمـــوونـــــه 4

وێنەکێشانا وێنەیێ رۆونکرنێ بۆ نەخشەیا لۆگاریتمی

بهایێن پێدایێن گۆڕاوێ x بۆ کێشانا وێنەیێ رۆونکرنێ بکاربینە، پاشی وێنەیێ رۆونکرنێ بۆ نەخشەیا لۆگاریتمی یا بەروڤاژی وێنەبکە. بوار و مەودایێ نەخشەیا لۆگاریتمی دیاربکە.



أ $f(x) = 3^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2$

وێنەیێ رۆونکرنێ بۆ نەخشەیا $f(x) = 3^x$ وێنەبکە بکارئینانا خشتەیێ بهایان.

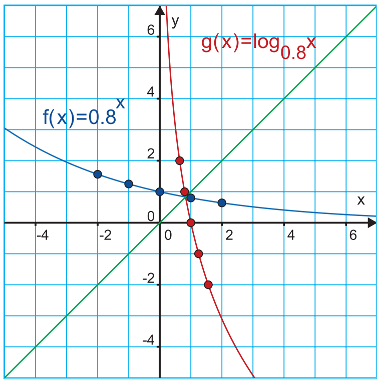
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

بۆ کێشانا وێنەیێ رۆونکرنا نەخشەیا لۆگاریتمی $g(x) = \log_3 x$ ناڤبەرا بهایێن x و $f(x)$ بگۆهۆرە.

$g(x)=\log_3 x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
x	-2	-1	0	1	2

بوارێ نەخشەیا لۆگاریتمی g دبیتە $\{x | x > 0\}$ و مەودایێ وێ دبیتە R.

ب $x = -3,0,1,4,7$ ؛ $f(x) = 0.8^x$



وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا $f(x) = 0.8^x$ وێنەبکە بکارئینانا خشتەیێ بهایان.

x	−3	0	1	4	7
$f(x) = 0.8^x$	2	1	0.8	0.4	0.2

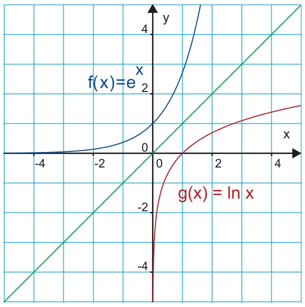
بۆ وێنەکێشانا وێنەیێ ڕوونکرنێ نەخشەیا لۆگاریتمی $g(x) = \log_{0.8} x$ ، ناڤبەرا بهایێن x و $f(x)$ دخشتەیدا بگۆهۆڕە.

$g(x) = \log_{0.8} x$	2	1	0.8	0.4	0.2
x	−3	0	1	4	7

بوارێ نەخشەیا لۆگاریتمی $g(x)$ دبیتە $\{x \mid x > 0\}$ و مەودایێ وێ دبیتە R .

هەولبدە بهایێن $x = -2, -1, 1, 2, 3$ بکاربینە بۆ وێنەکێشانا وێنەیێ ڕوونکرنێ یێ نەخشەیا $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ ، پاشی وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا لۆگاریتمی یا بەرۆڤاژی وێنەبکە، بوار و مەودایێ نەخشەیا لۆگاریتمی دیاربکە.

لۆگاریتما سروشتی لۆگاریتمە ب بنچینەیێ e .
هێمایێ ln بۆ لۆگاریتما سروشتی بکاردئێنن. ئەوێ لۆگاریتمی هەمان سیفەتێن لۆگاریتما ئاسایی (دەهی) و لۆگاریتمێن دی هەنە.



نەخشەیا لۆگاریتما سروشتی $f(x) = \ln x$ دبیتە نەخشەیا لۆگاریتمی یا بەرامبەری نەخشەیا توانی یاسروشتی. ئانکو ئەو نەخشەیا لۆگاریتمیە ب بنچینەیێ e. بوارێ وێ دبیتە کۆمەلا ژمارەیێن ڕاستیێن مووجەب و مەودایێ وێ دبیتە هەموو ژمارەیێن ڕاستی و وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ وێ دبیتە ئەو وێنەیێ بەرامبەر.

نموونە 5 سادەکرنا برێن توانی و لۆگاریتمێن سروشتی

هەر برەکی ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

أ $\ln e^{-2t}$　　ب $e^{\ln(x-1)}$　　ج $e^{5\ln x}$

شیکار

$\ln e^{-2t} = -2t$　　$e^{\ln(x-1)} = x-1$　　$e^{5\ln x} = e^{\ln x^5} = x^5$

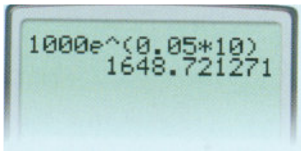
هەولبدە هەر برەکی ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

أ $\ln e^{3.2}$　　ب $e^{2\ln x}$　　ج $\ln e^{x+4y}$

هەکە ئەم ڤەگەرێینە ریسایا مفایێ ئاوێتە. ئەو یاسایە دبیتە $A = pe^{rt}$ دەمێ دانانا پارەیی بەردەوام بیت.

نموونە 6 بجهئینان ل سەر ئابووری

ئێك ملیون دینار بۆ دەمێ 10 سالان ب مفایەکی سالانە رێژەیا وی ب تێکرایێ 5% دانان. کو هەژمارتنا وی پارەی ب شێوەیەکی بەردەوام بیت. ئەو پارە پشتی 10 سالان دێ بیتە چەند؟



$A = pe^{rt}$　　یاسا

$A = 1000\ 000\ e^{0.05\times10}$　　لجهدانانێ بکاربینە

$A \approx 1\ 648\ 720$　　بژمێر بکاربینە

ئەو پارە پشتی 10 سالان دبیتە 720 648 1 دینار ب نێزیکی.

هەولبدە 000 100 دینار پشتی 8 سالان دبیتە چەند، هەکە هەژمارتنا وی پارەی ب شێوەیەکی بەردەوام بیت، ب مفایەکی سالانە رێژەیا وی 3.5% بیت؟

راهێنان

بەردەوامبوون دبیرکارییێدا

1 هەکە بزانی کو $\log_{10} 5 = 0.6990$ ، روونبکە چەوا $\log_{10} 0.005$ و $\log_{10} 500$ دێ هەژمێری.

2 جیاواز چییە لناڤبەرا نەخشەیا لۆگاریتما سروشتی و نەخشەیا لۆگاریتما ئاسایی.

3 بهایێ نەخشەیا لۆگاریتمی دەمێ $x = 1$ چەندە؟ دەرئەنجامبکە، کو وێنەیێن روونکرنێ یێن هەموو نەخشەیان دخالەکا دیاریکری را دبۆرن، ئەوێ خالێ دیاربکە؟

ڕاهێنانێن ئاڕاستەکری

هەر هاوکێشەیەکا توانی ل سەر شێوەیێ لۆگاریتمی بنڤیسە.

4 $2.4^0 = 1$ **5** $4^{1.5} = 8$ **6** $10^{-2} = 0.01$ **7** $3^x = 243$

هەر هاوکێشەیەکا توانی ل سەر شێوەیی توانی بنڤیسە.

8 $\log_4 0.0625 = -2$ **9** $\log_x(-16) = 3$ **10** $\log_{0.9} 0.81 = 2$ **11** $\log_6 x = 3$

وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ هەر نەخشەیەکێ بکێشە بکارئینانا بهایێن پێدایی، پاشی وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا لۆگاریتمی یا بەرۆڤاژی وێنەبکە. بوار و مەودایێ نەخشەیا لۆگاریتمی دیاربکە.

12 $f(x) = 5^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 1.5$ **13** $f(x) = 3^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2$

ڕاهێنان و بجهئینان

هاوکێشەیا توانی ل سەر شێوەیێ لۆگاریتمی بنڤیسە.

14 $x^{2.5} = 32$ **15** $6^x = 216$ **16** $1.2^0 = 1$ **17** $4^{-1} = 0.25$

هاوکێشەیا لۆگاریتمی ل سەر شێوەیێ توانی بنڤیسە.

18 $\log_5 625 = 4$ **19** $\log_2 x = 6$ **20** $\log_{4.5} 1 = 0$ **21** $\log_\pi \pi = 1$

وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ هەر نەخشەیەکێ وێنەبکە بکارئینانا بهایێن پێدایی، پاشی وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا لۆگاریتمی یا بەرۆڤاژی وێنەبکە، بوار و مەودایێ نەخشەیا لۆگاریتمی دیاربکە.

22 $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ **23** $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$

24 **خەملاندن** $\log 2 \simeq 0.30$ بکاربینە بۆ خەملاندنا $\log 200$ و $\log 2000$.

25 کیژ ئەڤانێن ل خوارێ دبیتە شێوەیێ لۆگاریتمی بۆ $2^7 = 128$ ؟

(أ) $\log_2 128 = 7$ (ج) $\log_2 7 = 128$

(ب) $\log_7 2 = 128$ (د) $\log_7 128 = 2$

لێنێرینەك بۆ پاش

26 هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ بهەژمێرە؟

27 هاوکۆلکەیێ گەشەبوونا توانی بۆ کۆژمەیەکی ل بانکێ هاتییە دانان ب مفایەکی ڕێژەیا وی %7.3 بیت چییە؟

لێنێرینەك بۆ پێش

28 بەرێ خۆ بدە ڤان ژمارەیان و لێکۆلینێ ل سەر بکە ژ ڕەخێ ڕاستێ بۆ ڕەخێ چەپێ:

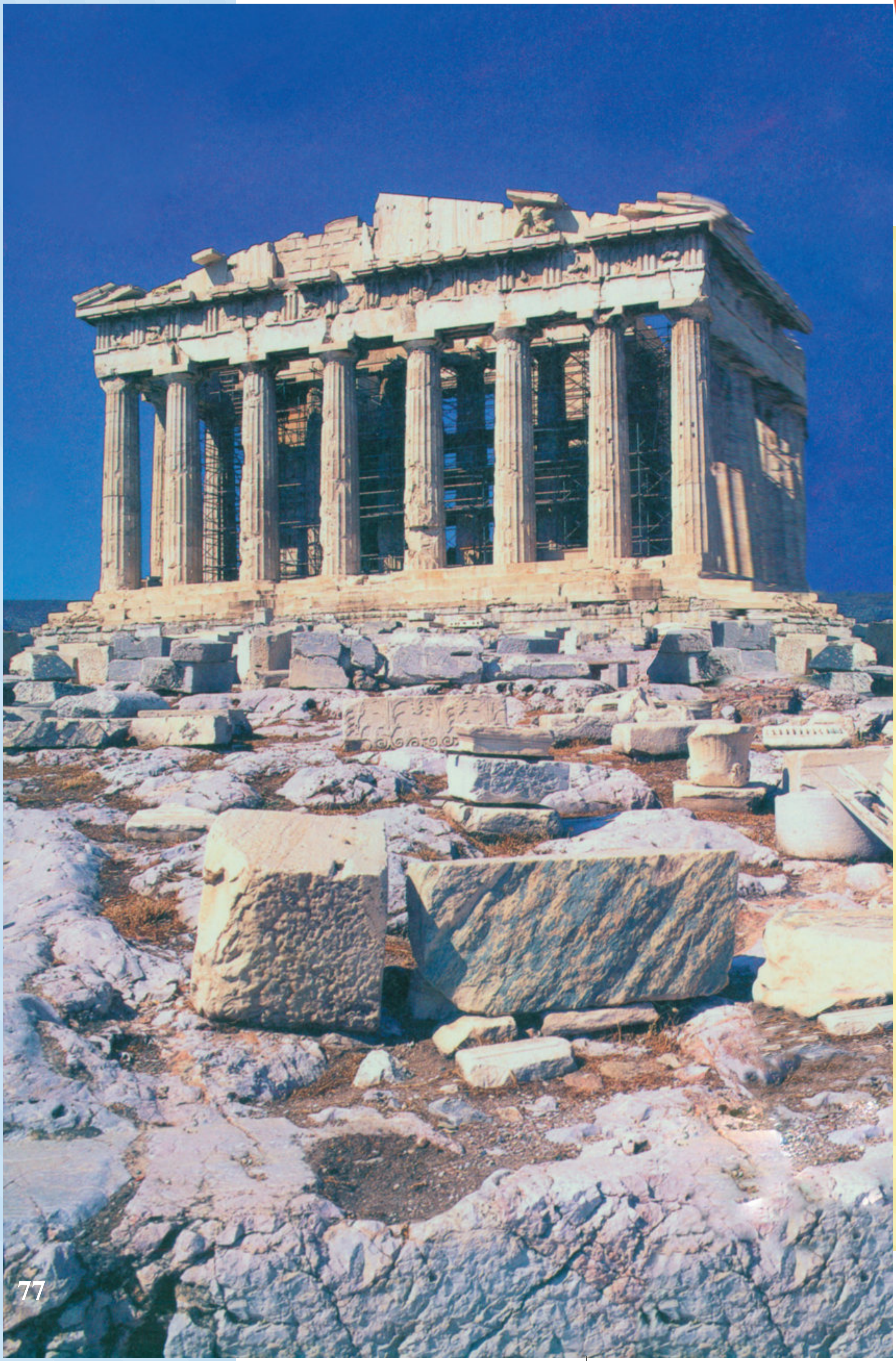
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

چەوا ژمارەیەکی بۆ ژمارەیەکا دی ل دووڤ وێ د چی ژ ڕەخێ چەپێ بۆ ڕەخێ ڕاستێ دەستپێکرن ژ ژمارە 2 ؟ ژمارەیا ل دویڤ ژمارە 21 چەندە؟

ئێك ل دووڤ ئێك

Sequences

بەشێ 4



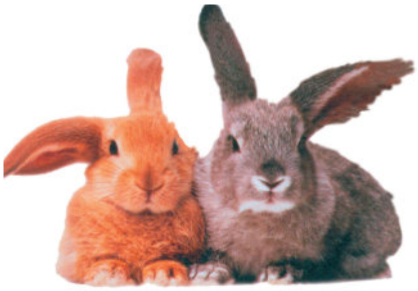
وانە

1. ئێك ل دووڤ ئێكێن ژمارەیی
2. ئێك ل دووڤ ئێكێن ئەندازەیی

وانەیا 1

ئێك ل دووڤ ئێكێن ژمارەیی

Arithmetic Sequences



بۆچی؟

ئێك ل دووڤ ئێكان بۆ دروستكرنا هندەك سامپلان بكاردئینن ئارمانجا وان ئەنجامدانا ڤەكۆلینانە ل سەر گەلەك ڕووداێن سروشتی، وەك گوهۆڕینا ژمارەكا كێڤریشكا د كۆمەڵەكێدا دگەل بۆڕینا دەمی.

شڤانی ترۆمبێلەكا نوی ب 000 750 17 دیناران كڕی، ڕێڤەبەریا باجا دەرامەتان بهایێ ڤێ ترومبێلێ سال ل دووڤ سالێ ب شێوەیێ ل خوارێ دخەملینیت.

ساڵ	1	2	3	4
بها	17750000	16250000	14750000	13250000

ئەڤ ژمارە ئێك ل دووڤ ئێكەكێ پێكدئینن. هەر ئێك ژ ڤان ژمارەیان دبیتە **ڕادەیەك** ژ ڕادەیێن ئێك ل دووڤ ئێكێ. چێدبیت ئێك ل دووڤ ئێكێ ژمارەیەكا بێ سنوور یا ڕادەیان هەبیت، و دبێژنێ **ئێك ل دووڤ ئێكا بێ دوماهیك**، و چێدبیت ژمارەیەكا سنووردار یا ڕادەیان هەبیت و دبێژنێ **ئێك ل دووڤ ئێكا بدوماهیك** وەكی نموونەیا بۆری. چێدبیت تو بێژی ئێك ل دووڤ ئێك نەخشەیەكە بوارێ وێ ژ ژمارەیێن تەواو یێن موجەب و ژ (١)ێ دەستپێكری پێكدهێت، و مەودایێ وێ ژ وان ژمارەیێن ڕاستی پێكدهێت ئەوێن دبنە ڕادە بۆ وێ ئێك ل دووڤ ئێكێ.

ئەوێن ل بوارێ بیركاریێ كار دكەن، نڤیسینا $a(n)$ بكاردئینن ل جهێ نڤیسینا نەخشەیا a_n بۆ ڕادەیێن ئێك ل دووڤ ئێكێ. ڕادەیێ ئێكێ a_1 و ڕادەیێ دوویێ a_2 ...... و ڕادەیێ خانەیا n دبیتە a_n ، و دبێژنێ **ڕادەیێ نونی** n یێ ئێك ل دووڤ ئێكێ.

گرنگی ب دوو جۆرێن ئێك ل دووڤ ئێكان دهێتە دان. ل جۆرێ ئێكێ جوداهی ل ناڤبەرا هەر ڕادەیەكی و ڕادەیێ ل پێش وی بەهایەكێ نەگۆڕە. و ل جۆرێ دوویێ ڕێژا ل ناڤبەرا هەر ڕادەیەكی و ڕادەیێ ل پێش وی بەهایەكێ نەگۆڕە. دبێژنە ئێك ل دووڤ ئێكێن جۆرێ ئێكێ، ئێك ل دووڤ ئێكێن ژمارەیی، و دبێژنە ئێك ل دووڤ ئێكێن جۆرێ دوویێ ئێك ل دووڤ ئێكێن ئەندازەیی.
ل ڤێ وانێ دێ فێری ئێك ل دووڤ ئێكێن ژمارەیی بین، و ل وانەیا دوویێ دێ فێری ئێك ل دووڤ ئێكێن ئەندازەیی بین. هەكە تو ڤەگەڕییە وێ ئێك ل دووڤ ئێكا ل دەستپێكا وانێ هاتی، دێ بینی كو جوداهییێن ل ناڤبەرا ڕادەیان دبنە:

$$16\,250\,000 - 17\,750\,000 = -1\,500\,000$$
$$14\,750\,000 - 16\,250\,000 = -1\,500\,000$$
$$13\,250\,000 - 14\,750\,000 = -1\,500\,000$$

و ژ ڤێ دیار دبیت كو ئەو دبیتە ئێك ل دووڤ ئێكا ژمارەیی.

دبێژنە بەهایێ نەگۆڕ بۆ جوداهییێن دناڤبەرا ڕادەیێن ئێك ل دووڤ ئێكێدا **بنچینە** Common difference بنچینەیێ وێ ئێك ل دووڤ ئێكێ دبیتە (1 500 000)

ڕادە	a_1	a_2	a_3	a_4
بەها	17750000	16250000	14750000	13250000

−1500000 −1500000 −1500000

ئارمانج

- دیاركرنا ڕادەیەكێ داخوازكری د ئێك ل دووڤ ئێكەكا ژمارەیی دا.
- هەژمارتنا سەرجەمێ بەشە كۆمەڵەكا ڕادەیان د ئێك ل دووڤ ئێكەكا ژمارەیی دا.

زاراڤ
Vocabulary

ئێك ل دووڤ ئێك
Sequence

ڕادەیێ ئێك ل دووڤ ئێكەكێ
Term of a sequence

ئێك ل دووڤ ئێكا بێ دوماهیك
Infinite sequence

ئێك ل دووڤ ئێكا بدوماهیك
Finite sequence

ئێك ل دووڤ ئێكا ژمارەیی
Arithmetic sequence

نموونە 1

جوداکرنا ئێك ل دووف ئێکا ژمارەیی

دیاربکە ئەرێ ئەڤ ئێك ل دووف ئێکە یا ژمارەییە یان نە. هەکە یا ژمارەی بیت، بنچینەیی و ڕادەیێ ل دووف ڕادەیێ ل دوماهیکێ دیارکری بهەژمێرە. .... ,17 ,12 ,7 ,2 ,3−

أ

ڕادە	17	12	7	2	-3
جوداهی	5	5	5	5	

ئێك ل دووف ئێکا ژمارەییە، و بنچینەیێ وێ 5 ، و ڕادەیێ داخوازکری دبیتە $5 + 17 = 22$.

ب ... ,60− ,40− ,24− ,12− ,4−

ڕادە	−60	−40	−24	−12	−4
جوداهی		−20	−16	−12	−8

ئەو نابیتە ئێك ل دووف ئێکا ژمارەیی. چونکی جوداهی ل ناڤبەرا هەر ڕادەیەکی و ڕادەیێ ل پێش وی نابیتە بەهایەکێ نەگۆڕ.

هەوڵبدە

دیاربکە ئەرێ ئەڤ ئێك ل دووف ئێکە یا ژمارەییە یان نە، هەکە یا ژمارەیی بوو، بنچینەیی و ڕادەیی ل دووف ڕادەیێ دیارێ دوماهیکێ بهەژمێرە.

أ ... ,0.9− ,0.2− ,0.5 ,1.2 ,1.9   ب $\frac{11}{2}, \frac{11}{3}, \frac{11}{4}, \frac{11}{5}, \frac{11}{6}, \ldots$

بەرێ خۆ بدە شێوازێ و خشتەیێ بەرامبەر دا، هەر ڕادەیەك یەکسانە ڕادەیێ ئێکێ کۆی ئێك ژ چەند جارانێن بنچینەیی.

ڕادەیێ دووێ = ڕادەیێ ئێکێ + بنچینەیی

ڕادەیێ سێیێ = ڕادەیێ ئێکێ + 2 × بنچینەیی

و هەروەسا . . .

تو دشێی ڤی شێوازی ب یاسایا ل خوارێ دەرببڕی.

بەهایێ ترومبێلێ پشتی بۆرینا ساڵەکێ

n	a_n
1	$a_1 = 17\,750\,000 + 0 \times (-1500\,000)$
2	$a_2 = 17\,750\,000 + 1 \times (-1500\,000)$
3	$a_3 = 17\,750\,000 + 2 \times (-1500\,000)$
4	$a_4 = 17\,750\,000 + 3 \times (-1500\,000)$
5	$a_5 = 17\,750\,000 + 4 \times (-1500\,000)$

یاسایا ڕادەیێ گشتی بۆ ئێك ل دووف ئێکا ژمارەیی

ڕادەیێ نوونی یێ ئێك ل دووف ئێکا ژمارەیی ب یاسایا ل خوارێ دهێتە هەژمارتن:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n = a_m + (n-m)d$$

a_1 ڕادەیێ ئێکێیە بۆ ئێك ل دووف ئێکێ، و d بنچینەیە.

نموونە 2

هەژمارتنا ڕادەیێ نوونی یێ ئێك ل دووف ئێکا ژمارەیی

ڕادەیێ دەهێ د ئێك ل دووف ئێکا ژمارەیی دا: ... ,4 ,11 ,18 ,25 ,32 بهەژمێرە.

پێنگاڤ 1 بنچینەیێ ئێك ل دووف ئێکێ بهەژمێرە $d = 25 - 32 = -7$.

پێنگاڤ 2 ڕادەیێ دەهێ بکارئینانا یاسایێ بهەژمێرە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ یاسا

$a_{10} = 32 + (10-1)(-7)$ لجهدانان

$= -31$ سادەبکە

ڕادەیێ دەهێ یێ ڤێ ئێك ل دووڤ ئێكێ دبیتە 31- .

ساخبکە ڤێ ئێك ل دووڤ ئێکێ تەمامبکە.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	32	25	18	11	4	−3	−10	−17	−24	−31

هەوڵبدە ڕادەیێ یازدێ بۆ ئێك ل دووڤ ئێکێن ژمارەی ل خوارێ بهەژمێرە:

أ $-3, -5, -7, -9, \ldots$ ب $9.2, 9.15, 9.1, 9.05, \ldots$

نموونە 3

هەژمارتنا ڕادەیێن نەدیار

ڕادەیێن نەدیار بۆ ئێك ل دووڤ ئێکا ژمارەی **11, ▢, ▢, ▢, −17** بهەژمێرە.

پێنگاڤ 1 بنچینەیی بهەژمێرە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ یاسا

$-17 = 11 + (5-1)d$ لجهدانان

$-7 = d$ سادەبکە

پێنگاڤ 2 ڕادەیێن نەدیار بکارئینانا $a_1 = 11$ و $d = -7$ بهەژمێرە.

$a_2 = 11 + (2-1)(-7) = 4$

$a_3 = 11 + (3-1)(-7) = -3$

$a_4 = 11 + (4-1)(-7) = -10$

هەوڵبدە ڕادەیێن نەدیار بۆ ئێك ل دووڤ ئێکا ژمارەی **2, ▢, ▢, ▢, 0** بهەژمێرە.

زانینا دوو ڕادەیان بەسە بۆ هەژمارتنا بنچینەی، هەکە دوو ڕادەیێن ئێك ل دووڤ ئێکێ بزانی، چونکی جوداهی یا نەگۆڕە.

نموونە 4

هەژمارتنا ڕادەیێ نوونی (ڕادەیێ nی) یێ ئێك ل دووڤ ئێکەکا ژمارەی ب زانینا دوو ڕادەیان.

ڕادەیێ شەشێ یێ ئێك ل دووڤ ئێکەکا ژمارەی بهەژمێرە، هەکە $a_9 = 120$ و $a_{14} = 195$

پێنگاڤ 1 بنچینەی بهەژمێرە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ یاسایا ڕادەیێ گشتی.

$a_{14} = a_1 + (14-1)d = a_1 + 13d$ یاسا.

$a_9 = a_1 + (9-1)d = a_1 + 8d$ یاسا.

$a_{14} - a_9 = 5d$ لێکدەربکە.

$195 - 120 = 5d$ لجهدانان.

$15 = d$ شیکاربکە.

پێنگاڤ 2 a_1 بهەژمێرە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	یاسا.
$120 = a_1 + (9-1)(15)$	لجهدانان.
$120 = a_1 + 120$	سادەبکە.
$0 = a_1$	شیکاربکە.

پێنگاڤ 3 ڕادەیێ شەشێ a_6 بهەژمێرە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	یاسا.
$a_6 = 0 + (6-1)15$	لجهدانان.
$= 75$	سادەبکە.

ڕادەیێ شەشێ یێ ڤێ ئێك ل دووڤ ئێكێ دبیتە75 .

هەوڵبدە ڕادەیێ یازدێ بۆ هەر ئێك ل دووڤ ئێكەكا ژمارەی ل خوارێ بهەژمێرە هەكە:

أ $a_2 = -133$ و $a_3 = -121$ **ب** $a_3 = 20.5$ و $a_8 = 13$

زۆربەی جاران شیكاركرنا پرسیارەكێ پێدڤی ب هەژمارتنا سەرجەمێ هندەك ڕادەیێن دەستپێكێ یێن ئێك ل دووڤ ئێكەكا ژمارەی هەیە. هەر وەك پێدڤی ب سەرجەمێ دەه ڕادەیێن ئێكێ هەبیت. هەكە تە هێمایێ S_n بۆ سەرجەمێ وان ڕادەیێن ژ دەستپێكێ هەتا پلەیا n بكارئینانا :

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

ئانكو

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$

سەرجەمێ ڕادەیێن دەستپێكێ یێن ئێك ل دووڤ ئێكەكا ژمارەی

ب پەیڤان	ب ژمارەیان	ب جەبرێ
سەرجەمێ ڕادەیێن ئێكێ یێن ئێك ل دووڤ ئێكەكا ژمارەی دبیتە ئەنجامێ لێكدانا ژمارەیا وان ڕادەیان دگەل ناڤەندێ ڕادەیێ ئێكێ و ڕادەیێ دوماهیكێ.	سەرجەم $2+4+6+8+10$ دبیتە $S_5 = 5\left(\frac{2+10}{2}\right) = 5(6) = 30$	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ n ژمارا ڕادەیانە، a_1 ڕادەیێ ئێكێیە. و a_n ڕادەیێ دوماهیكێ.

نموونە 5 **هەژمارتنا سەرجەمێ بەشە كۆمەڵەكا ڕادەیێن ئێك ل دووڤ ئێكەكا ژمارەی**

سەرجەمێ داخوازكری بۆ هەر زنجیرەیەكا ژمارەی بهەژمێرە:

أ S_{15} بۆ ئێك ل دووڤ ئێكا ژمارەی

$25, 12, (-1), (-14), \ldots$

پێنگاڤ 1 بنچینەی بهەژمێرە.

$d = 12 - 25 = -13$

ب S_{12} بۆ ئێك ل دووڤ ئێكەكێ ڕادەیێ نوونی $a_n = 3 + 4n$ بیت.

پێنگاڤ 1 هەردوو ڕادەیان a_1 و a_{12} بهەژمێرە.

$a_1 = 3 + 4 \times 1 = 7$

$a_{12} = 3 + 4 \times 12 = 51$

پێنگاڤ 2 ڕادەیێ a_{15} بهەژمێره.

$$a_{15} = 25 + (15-1)(-13)$$
$$= -157$$

پێنگاڤ 3 ڕادەیێ S_{15} بهەژمێره.

$$S_{15} = n\left(\frac{a_1 + a_{15}}{2}\right)$$
$$= 15\left(\frac{25+(-157)}{2}\right)$$
$$= 15\left(\frac{-132}{2}\right) = -990$$

پێنگاڤ 2 S_{12} بهەژمێره.

$$S_{12} = n\left(\frac{a_1 + a_{12}}{2}\right)$$
$$= 12\left(\frac{7+51}{2}\right)$$
$$= 348$$

هەولبدە سەرجەمێ داخوازکری ل هەرئێك ل دووڤ ئێکەکا ژمارەیی بهەژمێره.

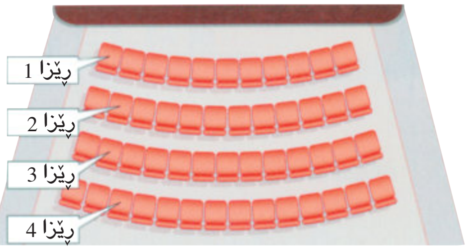
أ S_{16} بۆ ئێك ل دووڤ ئێکا

$12, 7, 2, (-3), \ldots$

ب S_5 بۆ ئێك ل دووڤ ئێکا ڕادەیێ وێ یێ

نوونی $a_n = 50 - 20n$

نموونە 6 **بجهئینان ل سەر شانۆیان**



ل ناڤەڕاستا شانۆیەکا جیهانی، ژمارا کورسییان ل 14 ڕێزێن ئێکێ ئێك ل دووڤ ئێکەکا ژمارەی پێکدئینن.

أ ژمارا کورسیێن ڕێزا 14 چەندە؟

بەرێ خۆ بدێ کو ژمارا کورسییان ل ڕێزەکێ بۆ ڕێزەکا دی (١) کورسی زێدە دبیت. یاسایێ بنڤیسە بکارئینانا $a_1 = 11$ ، $d = 1$

$a_n = a_1 + (n-1)d$ یاسایا ڕادەیێ نوونی بنڤیسە

$a_{14} = 11 + (14-1)(1)$ لجهدانان

$= 11 + 13$

$= 24$ سادەبکە

ل ڕێزا چاردێ 24 کورسی هەنە.

ب ژمارا کورسیان ل 14 ڕێزێن ئێکێ چەندە؟

S_{14} بهەژمێره بکارئینانا یاسایا سەرجەمێ ڕادەیێن دەستپێکی یێن ئێك ل دووڤ ئێکا ژمارەی

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ یاسا

$S_{14} = 14\left(\frac{11+24}{2}\right)$ لجهدانان

$= 14\left(\frac{35}{2}\right) = 245$ سادەبکە

ل 14 ڕێزێن ئێکێ 245 کورسی هەیە.

هەوڵبدە **دێ چ بیت هەکە ...؟** وەسادانە کو ژمارا کورسییان ل هەر ڕیزەکێ، ژ ڕێزا دووێ دوو کورسی زێدە دبن ژ ڕێزا پێش خۆ.

أ ژمارا کورسیێن ڕێزا 14 چەندە؟

ب ژمارا کورسییان ل 14 ڕیزێن ئێکێ چەندە؟

ڕاهێـــــــــنـــــان

بەردەوامبوون د بیرکارییێدا

1 ڕوونبکە چەوا ڕادەیێ نوونی بۆ ئێك ل دووڤ ئێکا ژمارەی... 14 ,8 ,2 ,4 – د هەژمێری.

2 ڕوونبکە بۆچی برێ ڕادەیێ نوونی $(n-1)d$ بخۆڤە دگریت بەلێ nd بخۆڤە ناگریت.

3 جوداهیا لناڤبەرا ئێك ل دووڤ ئێکا ژمارەی و ئێك ل دووڤ ئێکا ئەندازەی ڕوونبکە.

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

دیاربکە ئەرێ ئێك ل دویڤ ئێك یا ژمارەییە یان نە، هەکە یاژمارەیی بوو، بنچینەی و ڕادەیێ پشتی ڕادەیێ ل دوماهیکێ دیارکری بهەژمێرە:

4 $46, 39, 32, 25, 18, \ldots$

5 $28, 21, 15, 10, 6, \ldots$

ڕادەیێ هەشتێ بۆ هەرئێك ل دووڤ ئێکەکا ژمارەی بهەژمێرە.

6 $3, 8, 13, 18, \ldots$

7 $-3.2, -3.4, -3.6, -3.8, \ldots$

ڕادەیێ نەدیار بۆ هەر ئێك ل دووڤ ئێکەکا ژمارەی بهەژمێرە:

8 13, ▢, ▢, 25, ...

9 9, ▢, ▢, ▢, 37, ...

10 1.4, ▢, ▢, ▢, –1, ...

ڕادەیێ نەهێ بۆ هەر ئێك ل دووڤ ئێکەکا ژمارەی بهەژمێرە.

11 $a_5 = 19, a_4 = 27$

12 $a_4 = 12.6, a_3 = 12.2$

13 $a_6 = -11, a_3 = -5$

سەرجەمێ داخوازکری بهەژمێرە.

14 S_{15} بۆ ئێك ل دووڤ ئێکا $5, 9, 13, 17, \ldots$

15 S_{12} بۆ ئێك ل دووڤ ئێکا ڕادەیێ وێ یێ نوونی $a_n = -2 + 6n$ بیت.

16 کرێ بلندی دگەل کۆمپانیەکا زانیاران کارکری ب مووچەیەکێ سالانە برێ وی 26 000 000 دینار بوو، و ب مەرجەکێ ئەو مووچە سالانە 1 250 000 دیناران زێدە ببیت؟

أ ئەو مووچە دێ بیتە چەند ل سالا شەشێ؟

ب سەرجەمێ پارەیێ ئەول هەر شەش سالان وەرگرت دبیتە چەند؟

ڕاهێنان وبجهئینان

دیاربکە ئەرێ ئەو ئێك ل دووڤ ئێکە یاژمارەییە یان نە، هەکە یا ژمارەی بوو، بنچینەی و ڕادەیی پشتی ڕادەیێ ل دوماهیکێ دیارکری بهەژمێرە.

17 $288, 144, 72, 36, 18, \ldots$

18 $-2, -12, -22, -32, -42, \ldots$

ڕادەی یازدێ بۆ هەر ئێك ل دووڤ ئێکەکا ژمارەی بهەژمێرە.

19 $12, 11.9, 11.8, 11.7, \ldots$

20 $-3.0, -2.5, -2.0, -1.5, \ldots$

ڕادەی نادیار بۆ هەر ئێك ل دووڤ ئێکەکا ژمارەی بهەژمێرە.

21 77, ▢, ▢, ▢, 33, ...

22 –29, ▢, ▢, –2, ...

ڕادەییٚ دوازدیٚ بۆ هەر ئێك ل دووف ئێكا ژمارەیی بهەژمێرە.

23 $a_5 = 16.2, a_4 = 18.4$ **24** $a_8 = 46, a_4 = -2$ **25** $a_{25} = -58, a_{22} = -49$

سەرجەمیٚ داخوازکری بهەژمێرە.

26 S_{15} بۆ ئێك ل دووف ئێكا
$-18, -16, -14, ...$

27 S_{14} بۆ ئێك ل دووف ئێكا ژمارەی هەکە ڕادەییٚ نوونی یێ وێ $a_n = 14 - \frac{1}{2}n$ بیت.

28 **بکاربەر** کاژێنیٚ قەمیسەك ب قست کری، ل حەفتیا ئێکیٚ 15000 دینار دانە فرۆشیاری. و دگەل وی ڕێککەفت ل هەر هەفتیەکیٚ 5000 دیناران بۆ قیستیٚ زێدەبکەت.

أ چەند پارەی ل حەفتیا نەهیٚ دێ دەت؟

ب سەرجەمیٚ پارەییٚ ل دوماهیکا حەفتیا نەهیٚ ددەت چەندە؟

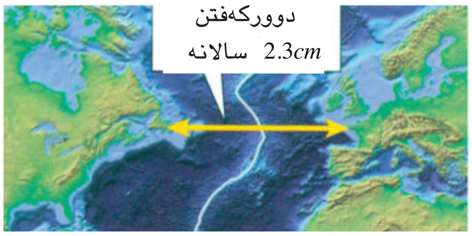
29 **ئاڤاهی** هەرەمیٚ لۆڤەر ل پاریس بەرامبەری مۆزەخانا لۆڤەر ل هەشتیێن سەدیٚ بیستێدا هاتە ئاڤاکرن بکارئینان پارچەیێن شوشەیی. ئەو هەرەمە ژ هندەك ئاستە یان پێکدهێت، ئاستیٚ سەری ژ 4 پارچان پێکدهێت و ژمارا وان پارچە یان بەرەڤ خواریٚ 4 پارچان زێدەدبیت.

أ پیٚ n ژمارا پارچە شووشان د ئاستیٚ n دا بنڤیسە.

ب هەکە ئەو هەرەمە ژ 18 ئاستان پێکبێت. ژمارا هەموو پارچەیێن شوشەی چەندە؟

ج ب ڕاستی ژمارا وان پارچەیێن ب دروستی هاتینە بکارئینان کێمترە ژ ژمارا وان پارچێن هاتینە هەژمارتن ب 11 پارچان، چونکی دەروازەیەك بۆ هەرەمیٚ هاتە دروستکرن ژمارا وان پارچێن هەرەم بخۆڤە دگریت چەندە؟

30 **زەڤی ناسی (جیۆلوجیا)** کیشوەریٚ ئەمریکا باکوور سالانە ژ کیشوەریٚ ئەوروپا دووردکەڤت.



أ پشتی 50 سالان کیشوەریٚ ئەمریکای باکور ب چەندیٚ ژ ئەوروپا دوور دکەڤت؟

ب پشتی چەند سالان هەردوو کیشوەر ب کێماسی 1 کیلومێتەر ژ ئێکو دوو دوردکەڤن.

لێنێرینەك بۆ پاش

دیاربکە ئەریٚ ئەڤ نەخشە نەخشەیەکا گەشەیە یان لێژەبوونە.

31 $f(x) = 1.25(0.75)^x$ **32** $f(x) = 1.43(5.32)^x$ **33** $f(x) = 0.92(0.64)^x$

لێنێرینەك بۆ پێش

34 ڕادەییٚ ئێکیٚ د ئێك ل دووف ئێکەکێدا دبیتە 2 . هەر ڕادەیەکی دی دبیتە دوو جارانی ڕادەییٚ ل پێش وی. دەه ڕادەیێن ئێکیٚ بۆ وێ ئێك ل دووف ئێکیٚ بنڤیسە.

وانەیا 2

ئێك ل دووڤ ئێكێن ئەندازەی
Geometric Sequences

بۆچی؟ پلاندانەرێن یاریێن وەرزشیێ ئێك ل دووڤ ئێكێن ئەندازەیی بكارئینن بۆ دیاركردنا ژمارا یاریان دهەر خولەكێدا .

ئامانج
- ناسكرنا ئێك ل دووڤ ئێكێن ئەندازەی.
- هەژمارتنا رادەیێ داخوازكری د ئێك ل دووڤ ئێكێن ئەندازەی دا.
- هەژمارتنا سەرجەمێ بەشە كۆمەڵەكا رادەیێن ئێك ل دووڤ ئێكێن ئەندازەی.

زاراڤ
Vocabulary
ئێك ل دووڤ ئێكێن ئەندازەیی Geometric Sequence

سیرینا ولیاس دناڤ 128 یاریكەران دا ل قارەمانیا یاریا تەنسیێ یا كچان ل ویمبلدون Wimbledon ل ساڵا 2003 پلەیا ئێكێ بدەست خۆڤە ئینا، ل دوماهیا هەر یارییەكێ دناڤبەرا دوو یاریكەران دا یاریكەرا بەر مە دكەڤیت بەردەوام دبیت، و یاریكەرا دەرنەچۆیی ژیاریێ دەردكەڤت. و راماناوێ ئەوە ل دووماهیا هەر خولەكێ ژمارا یاریكەران دبیتە نیڤا وان. و دشێن دەربرینا ژمارا یاریكەرێن دمینن ل دوماهیا هەر خولكێ بكارئینانا **ئێك ل دووڤ ئێكەكا ئەندازەی** بكەن.

ل ئێك ل دووڤ ئێكا ئەندازەی **Geometric sequence** رێژە ل ناڤبەرا هەر رادەیەكی و رادەیێ ل پێش وی یاگۆرە و نەیەكسانە 1 . دبێژنە ڤێ رێژەیێ **بنچینەیێ** Common ratio ئێك ل دووڤ ئێكێ و هێمایێ n بۆ بكاردئینن، ل نموونەیا بوریە بنچینە $\frac{1}{2}$.

خول	1	2	3	4
ژمارە	128	64	32	16
رێژە	$\frac{64}{128}=\frac{1}{2}$	$\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$	$\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$	

بۆ دیاركرنا ئێك ل دووڤ ئێكا ئەندازەیی، دڤێت رێژەیا هەر رادەیەكی و رادەیێ ل پێش وی یا نە گۆربیت .

نموونە 1 جوداكرنا ئێك ل دووڤ ئێكا ئەندازەی

دیاربكە ئەرێ ئێك ل دووڤ ئێكە یا ئەندازەییە یان یا ژمارەییە یان نەچوژوانن، هەكە یا ئەندازەی بیت، بنچینەی و رادەیێ پشتی رادەیێ ل دوماهیكێ دیاركری بهەژمێرە:

أ $8, 12, 18, 27, \ldots$

	8	12	18	27
جوداهی	4	6	9	
رێژە	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	

ئێك ل دووڤ ئێكەكا ئەندازەییە
بنچینە $r=\frac{3}{2}$
رادەی ل دویڤدا: 40.5

ب $8, 16, 24, 32, \ldots$

	8	16	24	32
جوداهی	8	8	8	
رێژە	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	

ئێك ل دووڤ ئێكا ژمارەییە:
بنچینە $d=8$
رادەی ل دووڤدا: 40

ج $6, 10, 15, 21, \ldots$

	6	10	15	21
جوداهی	4	5	6	
رێژە	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	

ئەو ئێك ل دووڤ ئێكە نەیا ژمارەییە و نەیا ئەندازەییە

هەوڵبدە

دیاربكە ئەرێ ئەو ئێك ل دووڤ ئێكەیا ئەندازەییە یان ژمارەییە، یان نە چ ژ وان، هەكە یا ئەندازەبوو، بنچینەیی و رادەیی پشتی رادێ ل دوماهیكێ دیاركری بهەژمێرە.

أ $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36}, \frac{1}{108}, \ldots$

ب $1.7, 1.3, 0.9, 0.5, \ldots$

ج $-50, -32, -18, -8, \ldots$

هەر ڕادەیەکی ئێك ل دووڤ ئێکا ئەندازەی پشتی ڕادەیێ ئێکێ، دبیتە ئەنجامێ لێکدانا ڕادەیێ ئێکێ دگەل هێزەکێ ژ هێزێن بنچینەیی، هەروەك خشتەیێ ل خوارێ دیاردکەت.

ژمارا یاریکەران ل هەر خولەکێ ویمبلدون					
خول	1	2	3	4	n
ژمارەیا یاریکەران	128	64	32	16	a_n
ڕێسا	$a_1 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$a_2 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$a_3 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$a_4 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$a_n = 128\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

یاسایا ڕادەیێ گشتی یێ ئێك ل دووڤ ئێکا ئەندازەی

ڕادەیێ نوونی a_n بۆ ئێك ل دووڤ ئێکا ئەندارەی ئەندازەیی ل دووڤ یاسایا ل خوارێ هەژماردکەن:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = a_m r^{n-m}$$

a_1 ڕادەیێ ئێکێیە بۆ ئێك ل دویف ئێکی و r بنچینەیە.

بۆ هەژمارتنا بنچینەیێ ئێك ل دووڤ ئێکا ئەندازەی، هەر ڕادەیەکی ل سەر ڕادەیی ل پێش وی دابەشبکە، ئەنجامێ دابەشکرنێ دبیتە بنچینە.

نموونە 2

هەژمارتنا ڕادەیێ نوونی a_n یێ ئێك ل دووڤ ئێکا ئەندازەی

ڕادەیێ نەهێ یێ ئێك ل دووڤ ئێکا ئەندازەیی... $-5, 10, -20, 40, -80$ بهەژمێرە.

پێنگاڤ 1 بنچینەیی بکارئینانا یاسا بهەژمێرە $\quad r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{-5} = -2$

پێنگاڤ 2 ڕادەیێ نەهێ بکارئینانا یاسایا ڕادەیێ گشتی بهەژمێرە.

$a_n = a_1 r^{n-1}$ یاسا

$a_9 = -5(-2)^{9-1}$ لجهدانان

$a_9 = -5(256) = -1280$ سادەبکە

ڕادەیێ نەهێ دبیتە -1280

ساخبکە تەمامکرنا ڤێ ئێك ل دووڤ ئێکێ.

$a_5 = -80$

$a_6 = -80(-2) = 160$

$a_7 = 160(-2) = -320$

$a_8 = -320(-2) = 640$

$a_9 = 640(-2) = -1280$ ✓

هەولبدە **ڕادەیێ نەهێ یێ هەرئێك ژ ئەڤان ئێك ل دووڤ ئێکێن ئەندازەیی بهەژمێرە.**

أ $\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{32}, \frac{3}{64}, \ldots$

ب $0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, \ldots$

نموونە 3 هەژمارتنا ڕادەیێ نوونێ یێ ئێك ل دووڤ ئێكا ئەندازەی ب زانینا دوو ڕادان.

ڕادەیێ دەهێ یێ ئێك ل دووڤ ئێكا ئەندازەی بهەژمێرە، هەكە $a_5 = 96$ $a_7 = 384$

ئاگەهداریە!

دەمێ دوو ڕادەیێن ئێك ل دووڤ ئێكێ دیاربن، دڤێت بهایێ r مووجەب و ب بهایێ سالب بۆ وەربگری هەكە یا دشیاندا بیت.

پێنگاڤ 1 بنچینەیێ بهەژمێرە.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	یاسایا گشتی.
$a_7 = a_1 r^{7-1} = a_1 r^6$	ل جهێ n بهایێ وی دانە.
$a_5 = a_1 r^{5-1} = a_1 r^4$	ل جهێ n بهایێ وی دانە.
$\frac{a_7}{a_5} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^4} = r^2$	دابەشبكە.
$\frac{384}{96} = r^2$	بجهدانانێ بكاربینە.
$4 = r^2$	سادەبكە.
$\pm 2 = r$	شیكاربكە.

پێنگاڤ 2 a_1 بهەژمێرە.

هەردوو بهایێن r جودا جودا وەربگرە.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = a_1 r^{n-1}$	یاسایا گشتی
$96 = a_1 (2)^{5-1}$	$96 = 6(-2)^{5-1}$	بجهدانانێ بكاربینە
$6 = a_1$	$6 = a_1$	سادەبكە

پێنگاڤ 3 ڕێسایا ئێك ل دووڤ ئێكێ بنڤیسە و بكاربینە بۆ هەژمارتنا a_{10}

$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = a_1 r^{n-1}$	یاسا
$a_n = 6(2)^{n-1}$	$a_n = 6(-2)^{n-1}$	لجهدانانێ بكاربینە
$a_{10} = 6(2)^{10-1}$	$a_{10} = 6(-2)^{10-1}$	لجهێ n دەهێ دانە
$a_{10} = 3072$	$a_{10} = -3072$	سادەبكە

ڕادەیێ دەهێ بۆ وێ ئێك ل دووڤ ئێكێ دبیتە 3072 دەمێ $v=2$ و -3072 دەمێ $v=-2$.

هەوڵبدە ڕادەیێ نەهێ یێ هەر ئێك ل دووڤ ئێكەكێ بهەژمێرە.

أ $a_4 = -8$ و $a_5 = -40$ ب $a_2 = 768$ و $a_4 = 48$

گەلەك جاران شیكاركرنا پرسیارەكێ پێدڤی ب هەژمارتنا سەرجەمێ ژمارەكا ڕادەیێن دەسپێكێ یێن ئێك ل دووڤ ئێكا ئەندازەی هەیە، وەك تە پێدڤی ب سەرجەمێ دەه ڕادەیێن ئێكێ هەیە. هەكە تە هێمایێ S_n بۆ سەرجەمێ وان ڕادەیێن ئێكێ هەتا پلەیا n بكارئینە

ئانكو

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

سەرجەمێ ڕادەیێن ئێكێ یێن ئێك ل دووڤ ئێكا ئەندازەی

سەرجەمێ ڕادەیێن دەسپێكێ (S_n) یێن ئێك ل دووڤ ئێكەكا ئەندازەی ... $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n,$ ب ڤێ یاسایێ دهەژمێرن:

$$S_n = a_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r}\right); r \neq 1$$

a_1 ڕادەیێ ئێكێیە، و r بنچینەیە.

نموونە 4 هەژمارتنا سەرجەمێ بەشەکی ئێك ل دووڤ ئێکەکا ئەندازەی

سەرجەمێ داخوازکری یێ هەر ئێك ل دووڤ ئێکەکا ئەندازەی بهژمێره

أ S_7 ل زنجیرەیا

3 (−6), 12, (−24), ...

پێنگاڤ 1 رێژەیێ بهەژمێره.

$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2$

پێنگاڤ 2 S_7 بهەژمێره $a_1 = 3$

و $r = -2$ و $n = 7$

$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$

$S_7 = 3\left(\frac{1-(-2)^7}{1-(-2)}\right)$

$= 3\left(\frac{1-(-128)}{3}\right) = 129$

ب S_5 بۆ ئێك ل دووڤ ئێکەکا ئەندازەی ڕادەیی نونی $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ بیت.

پێنگاڤ 1 a_1 بهەژمێره.

$a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 1$

پێنگاڤ 2 S_5 بهەژمێره.

$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$

$S_5 = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right) = \frac{1-\frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} \approx 1.49$

هەوڵبدە **سەرجەمێ داخوازکری ل هەرئێك ل دووڤ ئێکەکێ بهەژمێره.**

أ S_8 «بۆئێك ل دووڤ ئێکا... $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...$

ب S_6 بۆ ئێك ل دووڤ ئێکا ئەندازەی هەکە ڕادەیێ نونی $a_n = (-3)(2)^{n-1}$ بیت.

نموونە 5 بجهئینان ل سەر وەرزشێ

ل خۆلا ویمبلدون بۆ تەپا تەنسێ، 128 یاریکەران بەشداری کرن. ژمارا یاریکەران ل دوماهیا هەر خۆلەکێ بۆ نیڤا وان کێم دبیت. چەند یاری ل وێ پالەوانیێ هاتنە ئەنجامدان؟

پێنگاڤ 1 ئێك ل دووڤ ئێکەکێ بنڤیسە.

n = ژمارا خۆلان

a_k = ژمارایا یارییان د خۆلا k دا

S_n = سەرجەمێ ژمارا یاریان د n خولان دا.

$a_n = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ژمارا یارییان دخۆلا ئێکێ دا دبیتە $\frac{128}{2} = 64$ ، چونکی ژمارەیا یاریکەرا ل، هەر خۆلەکێ دبیتە نیڤا ژمارا وان ل خۆلا پێشتر.

پێنگاڤ 2 ژمارا خۆلان بهەژمێره.

$1 = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ل خولا دوماهیکێ یاری دهێتە ئەنجامدان .

$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ هەردوو لایان دابەشی 64 بکە.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\frac{1}{64}$ ل سەر شێوەیێ توانی بۆ بنچینە $\frac{1}{2}$ بنڤیسە.

$6 = n - 1$ هەردوو توانان یەکسان بکە.

$7 = n$ سادەبکە

پێنگاڤ 3 سەرجەمێ یارییان ل پالەوانیێ بهەژمێره.

$S_7 = 64\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = 127$ یاسایا سەرجەمێ زنجیرەیا ئەندازەی بکاربینە.

ل وێ پالەوانیێ 127 یاری هاتنە ئەنجامدان.

هەوڵبدە كۆمپانیەكا مەزن سالانە84 000 000 دیناران كرێیا بارەگایێ خو ددەت، ئەو پارە سالانە 8% زێدە دبیت. ئەو كۆمپانیە ل درێژیا دەمێ 6 سالان چەند پارەی ددەت؟

ڕاهێنان

بەردەوامبوون د بیركارییێدا

1 ڕۆنبكە چەوا ڕادەیێ نوونی بۆ ئێك ل دووڤ ئێكا ئەندازەی... ,4, 12, 36, 108 دهەژمێری.

2 ڕوونبكە بۆچی ڕادەیێ نوونی بڕێ $r^{(n-1)}$ بخۆڤە دگریت بەلێ بڕێ r^n بخۆڤە ناگریت.

3 كەنگی ڕادەیێن ئێك ل دووڤ ئێكا ئەندازەیی زێدە دبن؟ و كەنگی كێم دبن؟

ڕاهێنانێن ئاڕاستەكری

دیاربكە ئەرێ ئەو ئێك ل دووڤ ئێكەیا ئەندازەییە یان نا، هەكە یا ئەندازەی بوو، بنچینەی و ڕادەیی ل دوماهیكا ڕادەیێ دیاركری بهەژمێرە.

4 $320, 80, 20, 5, \ldots$

5 $\frac{1}{2}, 1, 2, 3, \ldots$

ڕادەیێ دەهێ بۆ هەرئێك ل دووڤ ئێكا ئەندازەی ل خوارێ بهەژمێرە.

6 $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$

7 $5000, 500, 50, 5, 0.5, \ldots$

ڕادەیێ شەشێ ل هەر ئێك ل دووڤ ئێكەكا ئەندازەی ل خوارێ بهەژمێرە، ب زانینا دوو ڕادان ژ ڕادەیێن وی:

8 $a_5 = -4, a_4 = -12$

9 $a_5 = 108, a_2 = 4$

10 $a_5 = 12, a_3 = 3$

سەرجەمێ داخوازكری بهەژمێرە.

11 S_8 بۆ ئێك ل دووڤ ئێكا $2, 0.2, 0.02, \ldots$

12 S_8 بۆ ئێك ل دووڤ ئێكا ئەندازەی هەكە ڕادەیێ نوونی $a_n = (-3)^{n-1}$ بیت.

13 **مووچە** ماموستایەكی زمانی مووچەیێ وی ل سالا ئێكێ 8 000 000 دیناربوو، و ئەو مووچە سالانە ب ڕێژا 5% زێدەدبوو. ل سالا بیستێ مووچەیێ وی دبیتە چەند؟ و ل درێژیا وی دەمی چەند پارەی وەردگرت؟

أ مووچەیێ وی ل سالا شەشێ دبیتە چەند؟

ب سەرجەمێ مووچەیێن ل شەش سالێن ئێكێ وەردگرت دبیتە چەند؟

ڕاهێنان و بجهئینان

دیاربكە ئەرێ ئێك ل دووڤ ئێكەیا ئەندازەییە یان یا ژمارەییە، یان چ ژ وان نینە، هەكە یا ئەندازەیی بوو، بنچینەیی و ڕادەیێ ل دوماهیكا ڕادەیێ دیاركری بهەژمێرە.

14 $-36, -49, -64, -81, \ldots$

15 $-2, -6, -18, -54, \ldots$

ڕادەیێ نەهێ ل هەر ئێك ل دووڤ ئێكەكا ئەندازەی بهەژمێرە.

16 $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \frac{1}{1250}, \ldots$

17 $3, -6, 12, -24, 48, \ldots$

ڕادەیێ دەهێ بۆ ئێك ل دووڤ ئێكا ئەندازەی بهەژمێرە ب زانینا دوو ڕادان.

18 $a_5 = 162, a_4 = 54$

19 $a_6 = -100, a_4 = -4$

سەرجەمێ داخوازکری ل هەر ئێك ل دووڤ ئێککا ئەندازەیی بهەژمێرە.

20 S_6 بۆ ئێك ل دووڤ ئێکا ... ,5, 25, 125

21 S_7 بۆ ئێك ل دووڤ ئێکەکێ هەکە ڕادەیێ نوونی $a_n = 8(10)^{n-1}$ بیت.

22 **باب و باپیر** تە دەیك و باب هەنە، و دوو باپیر و دوو داپیر هەنە، و 4 بابێن باپیران و 4 دایکێن داپیران هەنە.

أ ژمارا باپیرو داپیرین مەزن ل دەمێ 6ێ نفشێن بەری تە چەندە؟

ب **دێ چ بیت هەکە ...؟** ڕێسایا هەژمارتنا باپیر و داپیران دێ چەوا هێتە گۆهۆڕین هەکە تو نفشێ ئێکێ بی؟

23 **قستێن زانکۆیێ** ل ڕۆژا ژ دایکبوونا ڕوناکێ داپیر و باپیرێ وێ بریاردان قیستێن خۆاندنا ل زانکویێ بدەن. ل ڕۆژا ژ داێکبوونا وێ ئەوان 50 دینار بۆ هەلگرتن (دانان). بریاردان ل هەر ساڵەکێ دووجارانی ساڵا پێشتر بۆ دانن، دەمێ ژیێ ڕۆناکێ دبیتە 18 ساڵ، چەند پارەی بۆ وێ کۆم دبن؟ و دەمێ ژیێ وێ دبیتە 21 ساڵ چەند پارە بۆ وێ کۆم بن؟

24 **تەکنۆلوجیا** نامەیەکا ئەلیکترۆنی گەهشتە تە، داخوازیا بەختەکێ باش بۆتە دخواست، داخوازکر تو بۆ 5 هەڤالێن خۆ فرێکەی، و تێدا داخوازبکەی هەر ئێك ژ وان بۆ 5 هەڤالێن خۆ فرێکەت ... ژمارا وان نامەیان پشتی 10 ئاستان دبیتە چەند.

25 دەزگەهەکێ بارەگایەك بکرێ گرت،ل هەر هەیڤەکێ 750 000 دینار کرێ دان ل درێژیا ساڵا ئێکێ، ئەو پارە ساڵانە پشتی ساڵا ئێکێ ب ڕێژا 10% زێدەبیت.

أ ئێك ل دووڤ ئێکەکێ بنڤیسە، بۆ نواندنا برێ پارەێ ساڵانە ل درێژیا 5 ساڵان.

ب سەرجەمێ پارەێ ئەو دەزگەهە ل درێژیا 10 ساڵان ددەت بهەژمێرە.

26 **نۆژداری** نەخۆشخانەکێ 16 نەخۆشێن ئەنفلەوەنزێ ل حەفتیا ئێکێ و 56 نەخۆش ل حەفتیا دووێ و196 نەخۆش ل حەفتیا سێیێ تۆمارکرن.

أ ئێك ل دووڤ ئێکەکا ئەندازەی بنڤیسە، ژمارا نەخۆشان بنوێنت.

ب هەکە تووشبوون ب وێ نەخۆشیێ ب وێ شێوەیی بەلاڤبوو، ل کیژ حەفتیێ ژمارا نەخۆشان زێدەتر دبیت ژ 10 000 نەخۆشان؟

27 **بنڤیسە** چ ل سەر ڕادەیێن ئێك ل دووڤ ئێکەکا ئەندازەیی ڕوودەت، هەکە ڕادەیێ ئێکێ 3 جارانبوو؟ دێ چ ل سەر سەرجەمێ ڕادەیێن دەستپێکێ ڕوودەت؟

لێنێرینەك بۆ پاش

سەرجەمێ دەە ڕادەیێن ئێکێ بۆ هەر ئێك ل دووڤ ئێکەکا ژمارەیی بهەژمێرە.

28 ... ,78, 65, 52, 39, 25

29 ... ,1.7, 7.3, 12.9, 18.5, 24.1

لێنێرینەك بۆ پێش

داتاشراوێ هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە.

30 $f(x) = 4x^3$

31 $f(x) = x^{-3}$

32 $f(x) = 2x^7$

بەشێ 5

جیاکاری و تەمامکاری

Differentiation and Integration

وانە

1. بجهئینانێن جیاکاریێ
ل سەر ئابووریێ
2. تەمامکاری

ئارمانج 1

ئامانج

- هەژمارتنا جیاکاریێ بۆ دیارکرنا پیڤانێن پراویزێ ونەرمییێ ل ئابووریێ.
- داتاشراوێ بۆ دیارکرنا بهایێن مەزن وبهایێن بچووك بکاردئینن.

زاراڤ Vocabulary

پیڤانێن پەراویزی Marginal Measures

پیزی (نەجیگیر) Elasticity

بهایێ مەزنێ خۆجهی Local maximum

بهایێ بچووکێ خوجهی Local minimum

ڕێسایا داتاشراوێ ئێکێ Test of first derivative

بجهئینانێن داتاشراوێ ل سەر ئابووریێ

Applications of Differentiation to Economics

بۆچی؟

نەخشەیان بۆ دروستکرنا سامپلێن ئابووریێ بکاردئینن. وەك نەخشەیا پیشاندانێ ونەخشەیا داخوازیێ ونەخشەیا لێچویی ونەخشەیا مفای. ئابوورناس ڤان نەخشەیان وداتاشراوێن وان بۆ ڤەکولینا ڤان سامپلان بکاردئینن وبۆ دیارکرنا دەرئەنجامێن گونجای.

ل پۆلا یازدێ توفێری هەژمارتنا داتاشراوێ نەخشەیێ بووی. ل بیرا تەبیت داتاشراوێ نەخشەیێ ئەو نەخشەیە دهێتە هەژمارتن بکارئینانا داتاشراوێن بنەڕەتی و یاسایێن داتاشراوێ. خشتەیێ ل خوارێ داتاشراوێن بنەڕەتی ئەوێن ل هەردوو پۆلێن یازدێ ودووازدێ دهێتە بکارئینان دیاردکەت.

نەخشە	داتاشراو
$f(x) = c$ ، c ژمارەیەکا ڕاستییە	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$ ، n ژمارەیەکا ڕاستییە
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \ln(g(x))$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = e^{g(x)}$	$f(x) = g'(x)e^{g(x)}$

هەروەسا خشتەیێ ل خوارێ هندەك ڕێسایێن داتاشراوێ دیاردکەت:

ناڤێ ڕێسایی	داتاشراو
ڕێسایا لێکدان ل ژمارەکێ	$(af(x))' = af'(x)$
ڕێسایا داتاشراوێ سەرجەمی	$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
ڕێسایا داتاشراوێ جوداهیێ	$(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$
ڕێسایا لێکدانێ	$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
ڕێسایا دابەشکرنێ	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
ڕێسایا نەخشەیا نەخشەیی	$(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$

نموونە 1 **هەژمارتنا داتاشراوان**

داتاشراویێ هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە.

أ $f(x)=3x^4$ ب $f(x)=5x^4-2x^3$ ج $f(x)=\frac{3}{x}$ د $f(x)=e^{-2x}$

شیکار

أ $f'(x)=(3x^4)'=3(x^4)'=3(4x^3)=12x^3$

ب $f'(x)=(5x^4-2x^3)'=(5x^4)'-(2x^3)'=5(x^4)'-2(x^3)'$

$=5(4x^3)-2(3x^2)=20x^3-6x^2$

ج $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=3\left(\frac{1}{x}\right)'=3\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{3}{x^2}$

د $f'(x)=(e^{-2x})'=(-2x)'e^{-2x}=(-2)e^{-2x}=-2e^{-2x}$

هەولبدە **داتاشراویێ هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە:**

أ $f(x)=5x^7$ ب $f(x)=3x^6-3x^2$ ج $f(x)=\frac{-2}{x}$ د $f(x)=e^{3x}$

پیڤانێن پەراویزی دئابووریێدا

ل چالاکیێن دەزگەهێن پیشەسازیێ وبازرگانیێ، دکارن سێ تشتان جۆدابکەن:

لێچوون Cost (دبیتە ئەوتێچوونا دەزگەهـ بکاردئینیت دابشێت بکارێ خورابیت) و **دەستکەفت** Revenues (دبیتە دەستکەفتێن دەزگەهێ ژ ئەنجامێ کارێ وێ) ، **قازانج** Profits (دبیتە برێ وی پارەیێ بۆ دەزگەهی دمینیت پشتی لێدەرکرنا لێچوونان ژ دەستکەفتان).

ل پۆلا یازدێ تەزانی کو بەحسکرنا پیڤانەکا پراویزی ڤەدگەریت بۆداتاشراوی: **لێچوونا پەراویز** Marginal cost داتاشراویێ نەخشەیا لێچوونێیە، **دەستکەفتێ پەراویزی** Marginal revenue دبیتە داتاشراویێ نەخشەیا دەستکەفتی [داهات]. **مفایێ پەراویزی** Marginal Profit دبیتە داتاشراویێ نەخشەیا مفایی: ل بیرا تەبێت کو پیڤان پەراوێزی دەربرینێ ژ گۆهۆرینا پیڤانا گشتی دکەت دەمێ بەرهەم ئێك یەكێ زێدەدبیت: نموونە: لێچوونا پەراوێزی ل ئاستەکی دیارکری یێ بەرهەمی (500 بو نموونە)، دبیتە گۆهۆرینا ل سەرپیڤانا گشتی ئەنجام ددەت دەمێ بەرهەم ئێك یەکێ زێدەدبیت ئانکو هەکە بەرهەم بوو 501 . دوو هۆکار دەستکەفتی R[داهات] دیاردکەن: ژمارا یەکەیێن دهێنە فرۆتن Q و **بهایێ ئێك یەکێ** P ، ئانکو $R=P\times Q$. لێ لێچوون ب دووتشتان دیاردبیت: **لێچوونا گۆڕاو** Variable cost ئەو ناهێتە گۆهۆرین دگەل گۆهۆرینا ژمارا ڤان یەکەیان. و **لێچوونی نەگۆڕ** Fix cost ئەو ناهێتە گۆهۆرین دگەل گۆهۆرینا ژمارەیا یەکان.

نموونە 2 **دیارکرنا نەخشەیا مفایێ پەراویز**

کۆمپانیا زێڕ، ئێك جۆرێ قوتیێن زەیتوونا دفرۆشیت. نەخشەیا داخوازیێ بۆڤی جۆرێ زەیتوونا ئەڤەیە:

$$P(Q)=20000-\frac{Q}{10}$$

(ل بیراتەبیت کوبها دهێتە گۆهۆڕین ل دویڤ داخوازیێ بۆ قوتییان ل دویڤ یاسایا داخوازیێ وخستنە ڕوو)، Q هێمایە بۆ ژمارا قوتیێن هاتینە فرۆتن و P هێمایە بۆ نرخێ ئێك قوتیێ، نەخشەیا لێچوونێ $C(Q)=50000+3000Q$

أ ژمارە 50 000 دنەخشەیا لێچوونێدا چ دنوینت؟ ژمارە 3 000 دقێ نەخشێ دا چ دنوێنت؟

ب نەخشەیا مفایی بینەدەر.

ج نەخشەیا مفایێ پراوێزی بینەدەر.

شیکار

أ ژمارە 50 000 دنەخشەیا لێچونێدا، لێچوونا کارکرنا کۆمپانییە، هەر ژمارا توتیێن بینە فرۆتن چەندبیت، ئەو لێچوونەکا نەگۆرە، و 3 000 لێچوونا دروستکرنا ئێك قوتییە.

ب مفا دبیتە ئەنجامێ دەرکرنا لێچوونێ ژ داهاتی [دەستکەفتی]. نەخشەیا داهاتی ئەڤەیە:

$$R(Q) = P \times Q = 20000Q - \frac{Q^2}{10}$$

نەخشەیا مفایی:

$$S(Q) = 20000Q - \frac{Q^2}{10} - (50000 + 3000Q)$$

$$S(Q) = 17000Q - \frac{Q^2}{10} - 50000$$

ج نەخشا مفایێ پراوێزی: $S'(Q) = 17{,}000 - \frac{Q}{5}$

هەولبدە کارگەها فورات جۆرەکی پاکێتێن گونجای دفرۆشیت، نەخشەیا داخوازیێ ل سەر ڤی جۆرێ پاکێتان:

$$P(Q) = 17000 - \frac{Q}{20}$$

(ل بیرا تەبیت، بها دهێتە گۆهۆرین ل دووڤ داخووازیێ وخستنە ڕوو). Q ژمارا پاکێتێن دهێنە فرۆتن دنوێنیت، و P بەهایێ ئێك پاکێتێ دنوێنیت. نەخشەیا لێچوونێ:

$$C(Q) = 30000 + 8000Q$$

أ ژمارە 30 000 دنەخشەیا لێچوونێدا چ دنوێنت؟ ژمارە 8 000 دقێ نەخشەیێ دا چ دنوێنیت؟

ب نەخشەیا مفایی بینەدەر.

ج نەخشەیا مفایێ پراوێزی چ دنوێنیت؟

پیزی(نەجیگر) د ئابووریدا

دبێژن مفایەکی پیزە Elastic ، هەکە داخوازی ل سەر کێمبیت یان زێدەببیت ب شێوەیەکی دیار ژ ئەنجامێ نزمبوون یان زێدەبوونا بهایێ وی. ئابوورناس پیزیا متایەکی دپیڤن ل دووڤ نەخشەیا داخوازیێ ل سەر وی متایی. هەکە $P(Q)$ نەخشەیا داخوازیێ بیت: دێ پیزی بیتە: $e = \frac{P}{Q} \times \frac{1}{P'(Q)}$. دێ دانن ئەو متایەیی پیزە هەکە $|e| > 1$. ونەیی پیزە هەکە $|e| < 1$

نموونە 3

هەژمارتنا پێزیا متایەکی

نەخشەیا داخوازیێ بۆ متایەکی $P(Q)=50+Q-Q^2$ ، پێزیا وی متای ل $Q=4$ بهەژمێرە.

شیکار

$P(4)=50+4-4^2=50+4-16=50-12=38$ لەلایەکی دی، $P'(Q)=1-2Q$

و $P'(4)=1-2\times 4=1-8=-7$ ژ ڤێ دیاردبیت کو $e=\frac{P}{Q}\times\frac{1}{P'(Q)}=\frac{38}{4(-7)}=-\frac{38}{28}$

و $|e|=\left|-\frac{38}{28}\right|=\frac{38}{28}>1$ ژڤێ دیاردبیت کو ئەو متایەکێ دیێزە.

هەولبدە نەخشەیێ داخوازیێ بۆ متایەکی $P(Q)=10+2Q-3Q^3$ پێزیا وی متایی ل $Q=10$ بهەژمێرە.

دیارکرنا پەرە بەهایان

هەژمارتنا پەرە بەهایان بجهێنانەکا بنەڕەتیە ل سەر جوداکاریێ ویترین بکارئینانێن جوداکاریێ هەنە. بۆ نموونە، دیارکرنا ژمارا کارمەندێن دەزگەهەکی دا قازانجێ وێ بگەهیتە مەزنترین پلە، یان کێمکرنا ژمارا کارمەندان دا لێچوونا وێ بگەهیتە نزمترین پلە ژبەر وێ چەندێ، جوداکاری ڕێسایەکێ ددەتە مە دبێژنێ **ڕێسایا داتاشراویێ ئێکێ**.

ڕێسایا داتاشراویێ ئێکێ

هەکە نەخشەیا $f(x)$ پەرە بەها هەبن (مەزنترین یان بچووکترین بەها) ل $x=c$ ، دێ $f'(c)$ نەیا پێناسەکری بیت یان $f'(c)=0$.

لەورا، بۆ هەژمارتنا وان بەهایێن x ئەوێن پەرە بەهایەکی بۆ نەخشەیێ پەیدادکەن، وان بەهایێن x بهەژمێرە ئەوێن $f'(x)=0$ ساخدکەن.

نموونە 4

پێدایێن نموونە 2 بکاربینە بۆ دیارکرنا برێ مەزنترین قازانجی بۆ کارگەهێ دابین دکەت. بەهایێ قۆتیا زەیتونا دڤێت چەندبیت دا مەزنترین قازانج بدەست بکەڤیت؟ ئەڤ قازانجە چەندە؟

شیکار

نەخشەیا قازانجی ل نموونەیا 2

$$S(Q)=17\,000Q-\frac{Q^2}{10}-50\,000$$

بۆ دیارکرنا وی برێ مەزنترین قازانجی دابین دکەت، داتاشراویێ نەخشەیێ بهەژمێرە

$$S'(Q)=17\,000-\frac{Q}{5}.$$

پاشی هاوکێشەیا $S'(Q)=0$ شیکاربکە

$$Q=17\,000\times 5=85\,000.$$

ڤێجا فرۆتنا 85 000 قوتیێن زەیتوونا مەزنترین قازانجی دابین دکەت.

بهایێ ئێك قوتیا زەیتوونا کو مەزنترین قازانجی دابین دکەت دبیتە

$$P(Q) = 20\,000 - \frac{Q}{10} = 20\,000 - \frac{85\,000}{10} = 20\,000 - 85\,000 = 11\,500$$

ئانکو بهایێ قوتیا زەیتوونا دبیتە 11 500 دینار.

$$S(Q) = 17\,000 \text{ x } 85\,000 - \frac{(85\,000)^2}{10} - 50\,000 = 722\,450\,000$$

ئانکو 722 450 000 دینار.

هەوڵبدە هۆشیاری بارهەلگرەك هەیە و 5 000 دینارارن کرێ ددەتە شوفێرەکی بۆ هەر ئێك دەمژمێرێ. لێچوونا کار;رنا بارهەلگرێ دبیتە $\frac{v^2}{50}$ دینار دئێك کیلومێتەری دا. v هێمایە بۆ لەزا بارهەلگرێ ب کیلومێتەران دئێك دەمژمێرێ دا. لەزا وێ بارهەلگرێ دڤێت چەندبیت داوێ کێمترین لێچوون هەبیت؟

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون د بیرکارییێدا

1 بەحسێ پەیوەندیا ل ناڤبەرا داهاتی ولێچوونێ وقازانجێ بکە.

2 هەکە نەخشەیا $C(Q) = 0.025Q^3 - 0.05Q^2 + 12.4Q + 22$ نەخشەیا لێچوونێ بیت بۆ بەرهەم ئینانا مفایەکی دیارکری ل دووڤ برێ بەرهەمێ Q . نەخشەیا $Av(Q)$ پێ Q بنڤیسە، کو ئەو لێچۆنا ناڤەندی بۆ بەرهەم ئینانا ئێك یەکەیێ دنوینیت.

3 نموونەیەکێ ل سەر متایەکی بینە پێزیاوی گەلەك یا بچووك بیت.

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

داتاشراوێ هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە

4 $f(x) = x^2 - 3x$

5 $f(x) = x^{17} + 5x^6$

6 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

7 $f(x) = x^{-2}$

8 $f(x) = \sqrt{x}$

9 $f(x) = \frac{1}{x^7}$

10 $f(x) = 2x^5 + 7x - 4$

11 $f(x) = \frac{x^2 - 7}{4 - x}$

12 نەخشەیا $R(Q) = 25Q - 0.05Q^2$ نەخشەیا داهاتییە (ب هزاران دیناران) بۆ متایەکی دیارکری. Q ژمارا یەکەیێن دهێنە فرۆتن دنوێنیت.

أ $R(50)$ بهەژمێرە، ئەو بەرسڤە چ دنوێنیت ڕۆنبکە.

ب نەخشەیا داهاتێ پراوێزی $R_M(Q)$ بهەژمێرە.

ج داهاتێ پەراوێزی ل $Q = 50$ بهەژمێرە، ئەڤ بەرسڤە چ دگەهینیت پێ فرۆتنا یەکەیەکا زێدە.

د $R(51) - R(50)$ بهەژمێرە، پاشی ڕوونبکە کائەو جیاوازیە چ دنوێنیت.

ڕاهێنان و بجهێنان

داتاشراویێ هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە.

13 $f(x)=x^{-4}+3x^{4}-x+16$

14 $f(x)=(2x^{2}+3x-7)(4x-6)$

15 $f(x)=(4x-1)^{5}$

16 $f(x)=e^{2x-1}$

17 $f(x)=2x-4e^{-x}+7$

18 $f(x)=\ln(0.1x)$

19 نەخشەیا $P(Q)=160-0.1Q$ نەخشەیا داخوازییێ (ب هزاران دیناران) بۆ متیایەکێ دیارکرێ دنوێنیت. Q ژمارا یەکان دنوێنیت و P بەهایێ ئێك یەکەیێ دنوینیت

أ نەخشەیا داهاتی بۆ فرۆتنا Q یەکەیان هەژماربکە، ئەنجامێ داهاتێ فرۆتنا 500 یەکەیان چەندە؟

ب داهاتێ پراویزی بۆ فرۆتنا 500 یەکەیان چەندە، ڕوونکرنەکێ بو وێ دیاربکە.

ج کیژ هەردووان داهاتەکێ مەزنتر دابیندکەت: فرۆتنا ئێك یەکەیێ زێدەتر ژ ئاستێ فروتنا 500 یان ژئاستێ فروتنا 700 ؟

20 نەخشەیا $C(Q)=300+6Q+\frac{1}{20}Q^{2}$ نەخشەیا لێچوونێ (ب هزاران دیناران) بۆ متایەکێ دیارکرێ دنوێنیت. Q ژمارا یەکەیێن بەرهەمێ دنوینیت.

أ لێچوونا پراویزی ل $Q=8$ هەژماربکە، ئەڤ بەرسڤە چ دگەهینیت بۆ بەرهەمئینانا یەکەیەکە زێدە (سەربار)؟

ب $C(9)-C(8)$ هەژماربکە. لێچوونا ڕاستێ بۆ بەرهەمئینانا یەکەیا نەهێ چەندە؟

21 نەخشەیا $R(Q)=46Q$ نەخشەیا داهاتێ (ب هزاران دیناران) بۆ بەرهەمئینانا متایەکێ دیارکرێ دنۆێنیت، Q ژمارا یەکەیێن هاتینە فرۆتن دنوێنیت. ونەخشەیا $C(Q)=100+30Q+\frac{1}{10}Q^{2}$ نەخشەیا لێچوونێ دنوێنیت.

أ نەخشەیا قازانجی $S(Q)$ هەژماربکە.

ب $S(100)$ بهەژمێرە.

ج نەخشەیا قازانجێ پەراوێزی هەژماربکە.

د قازانجێ پەراوێزی ل $x=100$ هەژماربکە. ئەڤ بەرسڤە چ دگەهینیت بۆ بەرهەمئینانا یەکەیەکا زێدە؟

هـ $S(101)$ - $S(100)$ هەژماربکە. ڕوونبکە ئەڤ جۆداهیە چ دگەهینیت.

22 نەخشەیا $R(x)=\frac{50x}{x^2+36}$ ، $x\geq 0$ نەخشەیا داهاتێ حەفتیانەیە ب (ملیارێن دیناران) بۆ فیلمەکی پێ x، دنوێنیت. x ژمارا حەفتیێن ل سەر نمایشکرنا وی ڕابۆرین دنوێنیت.

أ بهاییێن داهاتێ پەراوێزی دکەنە سفر هەژماربکە.

ب ل کیژ حەفتیێ داهاتێ نمایشکرنا وی فیلمی گەهشتە بلندترین ڕادە؟

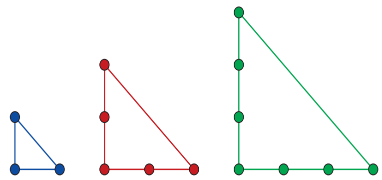
23 نەخشەیا داهاتی بۆ متایەکی ئەڤەیە $R(Q)=24Q-0.01Q^2$. Q ژمارا یەکەیێن هاتینە فرۆتن دنوێنیت. نەخشەیا داهاتێ پەراوێزی دیاربکە. بهایێ داهاتێ پەراوێزی ل ئاستێ فرۆتنا 100 یەکەیان چەندە؟ ڕامانا ئابوری بۆ ڤێ بهایی چییە؟

24 نەخشەیا $R(Q)=\frac{3000}{2Q+2}+80Q-1500$ نەخشەیا داهاتی (ب هزاران دیناران) بۆ فرۆتنا Q یەکەیێن متایەکی دیارکری دنوێنیت. داهاتێ پەراوێزی ل ئاستێ فرۆتنا 149 یەکەیان هەژماربکە.

25 سەرکەفتنا فیلمەکێ باش هاتیە چێکرن ب پارەکی کێم، ل سەر ڕیکلاما زارەکی ڕادوەستێت. هەکە نەخشەیا $A(x)=\frac{100x}{(x+10)^2}$ ژمارا بینەرێن وی فیلمی پشتی x حەفتیان بنوێنیت. گوهۆڕینێ ل ژمارا بینەران هەژماربکە پشتی پێشکێشکرنا وی فیلمی ل حەفتیەکا زێدە پشتی 10 حەفتیان ژ نمایشکرنا وی، پاشی 20 حەفتیان وان ئەنجامێن بدەست تەکەڤیتن ڕۆنبکە.

لێنێرینەك بۆ پاش

26 وێنەیێ بەرامبەر شێوازەکی ئەندازەی دیاردکەت:



أ ژمارا خالێن هەر وێنەکی ژ سێ وێنەیێن ل دووڤ ڤان دئێن دیاربکە.

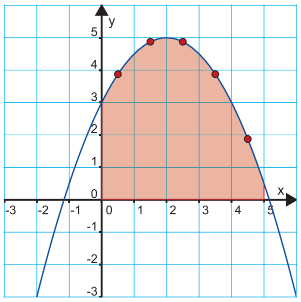
ب هەکەر a_n ژمارا خالێن وێنەیەکی ژ پلا n بیت ل ڤی شێوازی. ژمارا ڕادێن ئێك ل دووڤ ئێکی ژ $n=1$ هەتا $n=10$ بنڤیسە.

ج ئەرێ تو دکاری ڤێ ئێك ل دووڤ ئێکێ پۆلینبکەی؟ هۆیێن بەرسڤاخو بێژە.

د چەند خال دوێنەیێ پلا 100 دا هەنە؟

لێنێرینەك بۆ پێش

27 وێنەیێ بەرامبەر وێنەیێ ڕۆنکرنێ بۆ نەخشەیا $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+3$ و دەڤەرا سنووردایی ب تەوەرێ y و ڕاستەهێلێ $x=5$ وژۆریا تەوەرێ x و ژێریا وێنەیێ نەخشەی دنوینیت. دێ بەهایەکی نێزیککری بۆ ڕووبەرێ ڤێ دەڤەرا ڕەنگکری هەژمارکەی:



أ ئەوێ دەڤەرێ دابەشبکە بۆ 5 لاکێشەیان درێژیا بنکەیێ هەر ئێکێ 1 یەکەبیت. ژمارا وان لاکێشەیان چەندە؟

ب بلنداهیا هەر لاکێشەیەکێ هەژماربکە ب رێیا هەژمارکرنا بهایێ وێ نەخشێ ب دانانا بەهایێ x ئەوا دکەڤتە ناڤەڕاستا بنکەیێ لاکێشێ. خشتەیی تەمامبکە.

x	$f(x)$
0.5	
1.5	
2.5	
4.5	

ج سەرجەمێ ڕۆبەرێن ڤان لاکێشەیان بەهایەکی نێزیککری بۆ ڕووبەری وێ دەڤەرا ڕەنگکری دنوێنیت. ئەڤ بەهایە چەندە؟

وانەیا 2

تەمامکاری

Integration

ئارمانج

- تەمامکاریا بێسنوور بۆ نەخشەیەکێ هەژماردکەن
- تەمامکاریا سنووردار هەژماردکەن
- تەمامکاریا سنووردار و تەمامکاریا بێسنوور بۆ شیکارکرنا پرسیاران بکاردئینن

زاراڤ
Vocabulary

تەمامکاریا بێسنوور
Indefinite integral

تەمامکاریا سنووردار
Definite integral

نەخشەیا بنەڕەت (دژێ داتاشراوێ)
Antiderivative

نەگۆڕێ تەمامکاریێ
Constant of integration

بێ گومان توڤان ڕێسایێن داتاشراوێ یێن ل خوارێ دزانی:

- هەگە $f(x)=k$ دەمێ k ژمارەکا نەگۆڕبیت، دێ $f'(x)=0$.
- هەگە $f(x)=x^n$ دەمێ $n\neq 0$ و ژمارەکا ڕاست بیت دێ $f'(x)=nx^{n-1}$.
- هەگە $f(x)=e^{kx}$ دەمێ k ژمارەکا نەگۆڕبیت، دێ $f'(x)=ke^{kx}$.
- هەگە $f(x)=\ln kx$ دەمێ k ژمارەکا نەگۆڕبیت، دێ $f'(x)=\frac{k}{x}$.

ڕۆژەکێ تە پرسیارکرییە، ئەرێ کردارا داتاشراوێ کردارەکا بەرۆڤاژی هەیە، ئانکو هەگە $f(x)$ نەخشەیەك بیت، ئەرێ تو دشێی نەخشەیەکێ وەکو $f(x)$ دیاربکەی کو داتاشراوێ وێ $F(x)$ بیت، ئانکو $F'(x)=f(x)$.

تو دشێی هزرێ ل ڤی کاری بکەی وەولبدەی کردارێن بەرۆڤاژی داتاشراوێ ئەنجام بدەی.

بۆهەژمارتنا داتاشراوێ نەخشەیا $f(x)=x^n$ (1) ی ژ توانێ دەربکە، نەخشێ ل توانا بنەڕەت بدە و $f'(x)=nx^{n-1}$ بدەست تەدکەڤیت. هەکە توکردارێن بەرۆڤاژیا کردارێن داتاشراوێ ئەنجام بدەی. دڤێت تو (1)ی کۆمبکەی دگەل توانێ ونەخشەیێ ل سەر توانا نویدا دابەش بکەی وەهەروەسا:

- هەگە $f(x)=0$ ، دێ $F(x)=k$ دەمێ k ژمارەکا نەگۆڕبیت.
- هەگە $f(x)=nx^{n-1}$ ، $n\neq 0$ ژمارەکا نەگۆڕبیت، دێ $F(x)=x^n$.
- هەگە $f(x)=ke^{kx}$ دەمێ k ژمارەیەکی نەگۆڕبێت، دێ $F(x)=e^{kx}$.
- هەگە $f(x)=\frac{1}{x}$ ، دێ $F(x)=\ln x$.

دبێژنە نەخشەیا $F(x)$ نەخشەیا بنەڕەت بۆ نەخشەیا $f(x)$.

نموونە 1

نەخشەیا $f(x)$ ، بۆهەر نەخشەیەکا $F(x)$ هەژماربکە کو $F'(x)=f(x)$ ساخبکەت:

أ $f(x)=x^6$

ب $f(x)=\frac{5}{x}$

ج $f(x)=4e^{4x}$

شیکار

أ $F(x)=\frac{1}{6+1}x^{6+1}$ $\quad F(x)=\frac{1}{7}x^7$

ب $F(x)=5\ln x$ $\quad$ ج $F(x)=e^{4x}$

هەولبدە بۆهەر نەخشەیا $f(x)$ ، بۆهەرنەخشەیەکا $F(x)$ هەژماربکە کو $F'(x)=f(x)$ ساخبکەت.

أ $f(x)=x^{11}$ $\quad$ ب $f(x)=\frac{3}{x}$ $\quad$ ج $f(x)=5e^{5x}$

دەمێ تو ل داتاشراوێ نەخشەیەکێ دگەرِی، تونەخشەیەکا بتنێ (ئێك نەخشەیێ) دبینی. لێ ئەو کارەیی جودایە دەمێ تەبقێت نەخشەیا بنەرەت هەژماربکەی. بونموونەهەکە $f(x)=3x^2$ دێ نەخشەیا بنەرەت بیتە $F(x)=x^3$ وهەروەسا نەخشەیا $G(x)=x^3+C$ دێ بیتە نەخشەیا بنەرەت بۆ $F(x)$ ، دەمێ C ژمارەکا نەگۆرِبیت چونکی:

$$G(x)=\left(x^3+C\right)'=\left(x^3\right)'+\left(C\right)'=3x^2+0=3x^2=f(x)$$

تەمامکارییا بێسنوور

کردارا ل دووڤ گەریانا نەخشەیا بنەرەت دبێژنێ تەمامکاری. وئەوێن دبوارێ بیرکاریێ دا کاردکەن هێمایەکێ تایبەت بۆ تەمامکاریێ بکاردئینن. ئەڤ هێمایە $\int$ و نڤیسینا $\int f(x)dx$ دبیتە هێما بۆ نەخشەیا بنرەت. هەگە $f(x)$ نەخشەیا بنەرەت بیت بۆ نەخشەیا $f(x)$ دێ:

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

C ژمارەیەکا راستییە دبێژنێ نەگۆرِێ تەمامکاریێ.

تەمامکارییا بێسنوور

تەمامکارییا بێسنوور بۆ نەخشەیا $f(x)$ دهێتە نڤیسین ب شێوەیێ

$$\int f(x)dx \ .$$

ئانکو تەمامکارییا بێسنور دبیتە نەخشەیا بنەرەت بۆڤێ نەخشەیێ.

n

تو دزانی داتاشراوێ رێساهەنە، وچونکی تەمامکاری بەروڤاژی داتاشراوییە، لەورا تەمامکاریێ رێساهەنە، خشتەیێ ل خوارێ ژمارەکا رێسایێن داتاشراوێ و رێسایێن تەمامکاریێ ئەوێن ژوان پەیدادبن دیاردکەت.

ڕێسایا تەمامکاریێ	ڕێسایا داتاشراوێ
$\int 0dx=k$	$(k)'=0$
$\int x^p dx=\frac{1}{p+1}x^{p+1}+C$	$(x^n)'=nx^{x-1}$
$\int e^x dx=e^x+C$	$(e^x)'=e^x$
$\int \frac{1}{x}dx=\ln x+C$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
$\int u'(x)e^{u(x)}dx=e^{u(x)}+C$	$\left(e^{u(x)}\right)'=u(x)e^{u(x)}$
$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx=\ln n(x)+C$	$\left(\ln u(x)\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$
$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$	$\left(kf(x)\right)'=kf'(x)$
$\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$	$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$

نموونە 2 تەمامکاریا بێسنوور هەژماربکە

أ $\int 4x^3dx$ ب $\int(5x^4-2x^3)dx$ ج $\int\frac{3}{x}dx$ د $\int e^{-2x}dx$

شیکار

أ $\int 4x^3dx=4\int x^3dx=4\left(\frac{1}{4}x^{3+1}\right)+C=x^4+C$

ب $\int(5x^4-2x^3)=\int 5x^4dx-\int 2x^3dx=x^5-2\left(\frac{1}{4}x^4\right)+C=x^5-\frac{1}{2}x^4+C$

ج $\int\frac{3}{x}dx=3\int\frac{1}{x}dx=3\ln x+C$

د $\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int -2e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int(-2x)'e^{(-2x)}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$

هەوڵبدە تەمامکاریا بێسنوور هەژماربکە:

أ $\int 3x^5dx$ ب $\int(2x^5+7x^6)dx$ ج $\int\frac{5}{x}dx$ د $\int e^{3x}dx$

ل بیراتەبیت کوپیڤانێن پراویزی ل ئابووریێ دبنە داتاشراو. هەکە تو نەخشەیا پیڤانەکا پراوێزی بزانی، وەك لێچوونا پراوێزی بۆ بەرهەمئینانا متایەکی بۆنموونە، تو دێ شێی نەخشەیا لێچوونێ بۆ بەرهەمئینانا ڤی متایی هژماربکەی.

نموونە 3 هەژمارتنا نەخشەیا لێچوونێ

نەخشەیا لێچوونا پراویزی بۆ بەرهەمئینانا متایەکی ئەڤەیە. $C_m(Q)=3Q^2-20Q+36$

نەخشەیا لێچوونێ بۆ بەرهەمئینانا ڤی متایی هەژماربکە

شیکار:

نەخشەیا لێچۆنێ بۆ بەرهەمئینانا ڤی متایی دبیتە نەخشەیا بنەڕەت بۆ نەخشەیا لێچوونا پراویزی.

$$C(Q)=\int C_m(Q)dQ$$
$$=\int(3Q^2-20Q+36)dQ$$
$$=\int 3Q^2dQ-\int 20QdQ+\int 36dQ$$
$$=Q^3-10Q^2+36Q+k$$

K دبیتە نەگۆڕێ تەمامکاریێ، ویەکسانە بەهایێ لێچوونێ ل $Q=0$ ، ئانکو ئەو دبیتە لێچوونا نەگوڕبۆ بەرهەمئینانێ.

هەولبدە نەخشەیا لێچوونا پراویزی بۆ بەرهەمئینانا متایەکی ئەڤەیە:

$$C_m(Q) = 3Q^2 - 6Q + 5$$

نەخشەیا لێچوونێ بۆ بەرهەمئینانا متایەکی هەژماربکە، بۆ زانین لێچوونا نەگۆڕ بۆ بەرهەمئینانێ یەکسانە 10 .

تەمامکارییا سنووردار

ئەوێن ل بوارێ بیرکاریێ کاردکەن، تەمامکارییا بێسنوور بکاردئینن بۆ هەژمارتنا تەمامکارییا سنووردار.

تەمامکارییا سنووردار

تەمامکارییا سنووردار بۆ نەخشەیا $f(x)$ ل ناڤبەرا a و b دبیتە:

$$\int_a^b f(x) = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

دەمێ $F(x)$ نەخشەیا بنەڕەت بیت بۆ نەخشەیا $f(x)$.

بەرێ خو بدێ کو هەلبژارتنا نەخشەیا بنەڕەت $F(x)$ بۆ $f(x)$، کارتێکرنێ ناکەت ل سەر بەهایێ تەمامکارییا سنووردار. هەکە $G(x) = F(x) + C$ نەخشەیەکا دی یا بنەڕەت بیت بۆ نەخشەیا $f(x)$ دێ:

$$G(b) - G(a) = \big(F(b) + C\big) - \big(F(a) + C\big) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$$

نموونە 4 **هەژمارتنا تەمامکارییا سنووردار.**

تەمامکارییا سنووردار هەژماربکە.

أ $\int_1^5 2x\,dx$ ب $\int_0^3 (x^2 - 3x + 4)\,dx$ ج $\int_1^2 \frac{3}{x}\,dx$ د $\int_0^1 2e^x\,dx$

شیکار

أ $\int_1^5 2x\,dx = \left[x^2\right]_1^5 = 5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24$

ب
$$\int_0^3 (x^2 - 3x + 4)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_0^3$$
$$= \left[\frac{1}{3}3^3 - \frac{3}{2}3^2 + 4\times 3\right] - \left[\frac{1}{3}0^3 - \frac{3}{2}0^2 + 4\times 0\right]$$
$$= 9 - \frac{27}{2} + 12$$
$$= 9 - \frac{3}{2}$$
$$= \frac{15}{2}$$

ج $\int_1^2 \frac{3}{x}\,dx = \left[3\ln\right]_1^2 = 3\left[\ln x\right]_1^2 = 3(\ln 2 - \ln 1) = 3(\ln 2 - 0) = 3\ln 2$

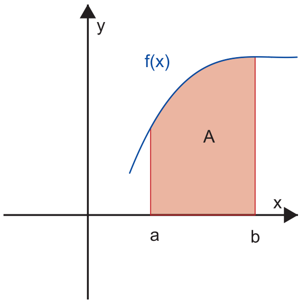
د $\int_0^1 2e^x\,dx = 2\int_0^1 e^x\,dx = 2\left[e^x\right]_0^1 = 2\left(e^1 - e^0\right) = 2(e - 1)$

هەولبدە ڤان تەمامکاریێن سنووردار هەژماربکە

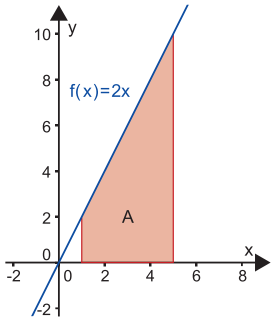
أ $\int_0^3 3x^2\,dx$ ب $\int_1^2 \left(3x^2+5x-4\right)dx$

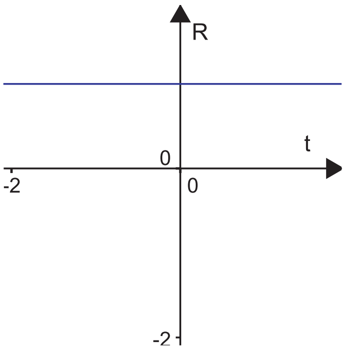
ج $\int_1^2 \frac{-2}{x}\,dx$ د $\int_1^2 -3e^x\,dx$

هەژمارکرنا رووبەری



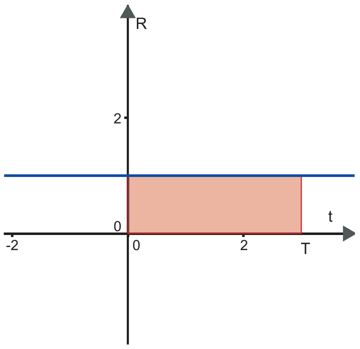
ئەوێن ل بوارێ بیرکاریێ کاردکەن، ئەڤە سەلماندن: هەگە $f(x)\geq 0$ ، بەهایێ x هەرچەندبیت دناڤبەرا a و b دا، تەمامکاریا سنووردار $\int_a^b f(x)dx$ دبیتە رووبەرێ ئەوێ دەڤەرا دهێتە سنووردان ب وێنەیێ رونکرنا نەخشەیا $f(x)$ ژ رەخێ سەریڤە وتەوەرێ x ژ رەخێ خوارێڤە ودکەڤتە ناڤبەرا هەردوو راستەهێلان $x=a$ ل رەخێ چەپێ و $x=b$ ل رەخێ راستێ هەگە ڤەگەرینە نموونەیا $\int_1^5 2xdx$ ، ئەڤ تەمامکاریا سنووردار یەکسانە رووبەرێ ئەوێ نیمچە لاتەریبا رەنگکری.





هندەک گۆراوێن ئابووری، وەک داهات (دەست کەفت) دهێتە گوهۆرین ل دووڤ گوهۆرینا دەمی. وەسادانە کو داهاتێ کارگەهەکێ ب تێکرایەکێ نەگۆربرێ وی هزار ملیون دینار دسالەکێ دا دهێتە دیارکرن. تودشێی نەخشەیا داهاتێ پراوێزی وەک نەخشەیەک پێ دەمی (ب سالان) بنیڤسی، هەروەکی ل خوارێ دیارکری:

$$R_m \quad R(t)=1000$$



وێنەیێ رونکرنێ بۆڤێ نەخشەیێ راستەهێلەکی ئاسۆییە. سەرجەمێ داهاتێ ل ناڤبەرا سالا $t=0$ و $t=T$ چەندە؟ ئەو داهاتە دبیتە $1000T$ دینار. دشێن ئەڤێ سەرجەمی ب دەڤەرا رەنگکری ل وێنەیێ بەرامبەر بنوێنن.

تودشیێ ئەوێ ڕوونبکەی، کو ئەودبیتە تەمامکارییا سنوور بۆ نەخشەیا $R(t)=1000$ ل ناڤبەرا $t=0$ و $t=T$، ئانکو

$$\int_0^T 1000\,dt=\left[1000\,t\right]_0^T=1000\,T$$

چێدبیت تێکرایێ (ناڤەند) داهاتی نەیی نەگوڕبیت، وچێدبیت ل دووڤ دەمی بێتەگۆهۆڕین، وئەڤە دیاردکەت کو نەخشەیا داهاتێ پراویزی یا جودایە ژ نەخشەیا نەگۆڕ. بەلێ سەرجەمێ داهاتان ل ناڤبەرا دوو دەمان $t=a$ و $t=b$ وەك تەمامكارییا سنووردارە ل ناڤبەرا a و b بۆ نەخشەیا پراویزی.

نموونە 5

نەخشەیا $R_m\,(Q)=16200-2Q$ نەخشەیا داهاتێ پراوێزییە بۆ کارگەهەکێ. داهاتێ کارگەهێ ژئەنجامێ فرۆتنا 1200 یەکان هەژماربکە.

شیکار

داهات ژ ئەنجامێ فرۆتنا 1200 یەکەیان ئەڤەیە

$$\int_0^{1200} RM\,(Q)\,dx$$

ئەڤێ تەمامکارییا سنووردار بهەژمێرە

$$\int_0^{1200} R_m\,(Q)\,dQ=\int_0^{1200}(16200-2Q)\,dx$$

$$=\left[16200Q-Q^2\right]_0^{1200}$$

$$=18000000$$

هەولبدە نەخشەیا لێچوونا پەراوێزی بۆ کارگەهەکێ ئەڤەیە $C_m\,(Q)=3Q^2-16Q+12$ لێچوونا بەرهەمئینانا 600 یەکەیان هەژماربکە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون د بیرکارییێدا

1. پەیوەندییا لناڤبەرا داتاشراوێ وتەمامکارییێ ڕۆنبکە.
2. جۆداهیا لناڤبەرا تەمامکارییا سنووردار وتەمامکارییا بێسنوور ڕۆنبکە.
3. تەمامکارییا سنووردار $\int_1^3 xdx$ ل ئەندازەیێ چ دگەهینیت

ڕاهێنانێن ئاڕاستەکری

تەمامکارییا بێسنوور بینەدەر

4. $\int 4x^3dx$
5. $\int(3x^2-2x)dx$
6. $\int x^{-2}dx$
7. $\int e^{2x}dx$

تەماكاريا سنووردار هەژماربكە

8 $\int_1^3 4x^3dx$

9 $\int_1^2 x^{-2}dx$

10 نەخشەیا قازانجی بۆ دەرگەهەکی هەژماربکە، بۆ زانین نەخشەیا داهاتیێ پەراویزی $R_m\ (Q)=22-2Q$ و نەخشەیا لێچوونا پەراوێزی ئەڤەیە $C_m\ MC(Q)=2Q^2-6Q+6$
لێچوونا نەگۆڕ بۆبەرهەمئینانێ نینە.

راهێنان و بجهئینان

تەماكاريا بێسنوور بهەژمێرە

11 $\int\left(x^{-1}+x\right)dx$

12 $\int\left(e^{ax}-1\right)dx$

13 $\int\left(e^{-x}+\frac{4}{x^2}\right)dx$

14 $\int e^{kx}dx$

تەماكاريا سنووردار بهەژمێرە

15 $\int_1^4 -2x^2dx$

16 $\int_{-1}^1\left(2x+e^{-x}\right)dx$

17 نەخشەیا لێچوونا پەراوێزی $C_m\ MC(Q)=3Q^2-28Q+84$ نەخشەیا لێچوونێ دیاربکە، بوزانین لێچوونا نەگۆڕ 92 .

18 نەخشەیا داهاتیێ پەراویزی $C_m\ MC(Q)=120-8Q$. نەخشەیا داهاتی دیاربکە. (تێبینی: داهات دبیتە 0 دەمێ $Q=0$).

19 نەخشەیا پاشکەفتیێ پەراویزی بۆ خێزانەکێ ئەڤەیە $f(R)=0.5+\frac{1}{\sqrt{R}}$ ، کو R داهاتی دەنوێنیت. نەخشەیا پاشکەفتیێ وێ خێزانێ $F(R)$ هەژماربکە. بۆزانین پاشکەفتێ وێ 20 دەمێ داهات 100 بیت.

20 نەخشەیا داهاتیێ پەراویزی بۆ دەزگەهەکی ئەڤەیە $R_m\ MR(Q)=84-4Q$
نەخشەیا داهاتیێ وێ دەزگەهێ هەژماربکە، بۆزانین داهات دبیتە 0 دەمێ $Q=0$.

21 نەخشەیا بکاربرنا پراویزی یاخێزانەکێ ئەڤەیە $f(R)=0.5+\frac{2}{\sqrt{R}}$ ، R داهاتی دەنوێنیت.
نەخشەیا بکاربرنێ بۆ وێ خێزانێ هەژماربکە، هەکەبزانی بکاربرن دبیتە 25 دەمێ داهات 25 بیت.

22 نەخشەیا داهاتیێ پراویزی یادەزگەهەکی $R_m\ (Q)=34-3$ و نەخشەیا لێچوونا پەراوێزی $C_m\ MC(Q)=Q^2-10Q+26$ و لێچوونا نەگۆڕ بۆ بەرهەمئینانێ نینە:

أ نەخشەیا قازانجی (مفایی) بۆ وێ دەزگەهێ هەژماربکە.

ب بهایێ Q دڤێت چەندبیت دا بلندترین قازانجێ دشیاندا بۆ دەزگەهی دابین بکەت.

$F(R)$

23 نەخشەیا پەراویزی بۆ بەرهەمئینانێ ل کارگەهەکێ $P(t) = Ae^{0.6t}$ ئەو برێ کارگەه بەرهەم دئینیت هەژماربکە ل ناقبەرا $t = 0$ و $t = 1$. پاشی ل ناقبەرا $t = 1$ و $t = 2$ رێژەیا زێدەبوونا بەرهەمئینانێ ل ماوەیێ دووێ بۆ ماوەیی ئێکێ چەندە؟

لێنێرینەك بۆ پاش

24 نەخشەیا داهاتی بۆ دەزگەهەکی دبیتە $R(Q) = 1400Q - 6Q^2$ و نەخشەیا لێچوونێ $C(Q) = 1500 + 80Q$. بهایێ Q ئەوێ بلندترین قازانجێ دشیاندا بۆ دەزگەهی دابین دکەت چەندە؟

25 نەخشەیا داهاتی بۆ وی دەزگەهی وەك خوما، ئانکو $R(Q) = 1400 - 6Q^2$ و نەخشەیا لێچوونێ هاتە گوهۆڕین بوو $C(Q) = 3000 + 80Q$.

أ بهایێ Q ئەوێ بلندترین قازانجی بۆ دەزگەهی دابین دکەت هەژماربکە.

ب ئەرێ بەرسڤاتە یا جیاوازە ژ بەرسڤا پرسیارا 25 ؟ ئەڤێ رۆنبکە.

لێنێرینەك بۆ پێش

26 رۆنبکە کو ئەو برێ بلندترین قازانجێ دشیاندا بۆ دەزگەهی دابین دکەت دبیتە ئەو برێ داهاتێ پەراوێزی لنك وی یەکسان بیت دگەل لێچوونا پەراوێزی.