

١٠



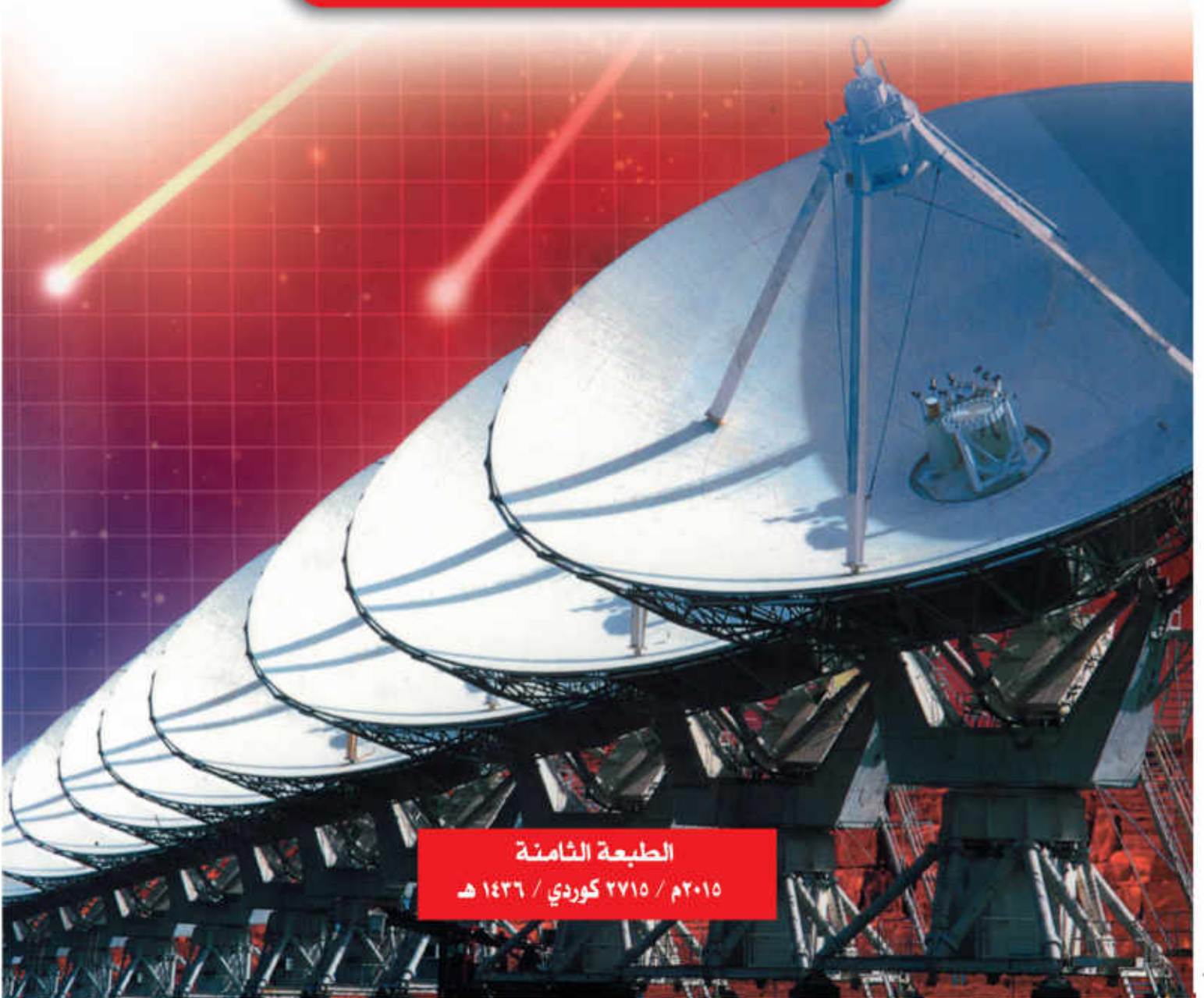
حكومة إقليم كردستان - العراق
وزارة التربية - المديرية العامة للمناهج والمطبوعات

الرياضيات للجميع

كتاب الطالب
الصف العاشر الأدبي

الطبعة الثامنة

٢٠١٥ م / ٢٧١٥ كوردي / ١٤٣٦ هـ



الأشراف الفني على الطبع

عثمان پیرداود کواز

آمانج اسماعیل عبدي

محتوى الكتاب

الفصل 1 المعادلات
EQUATIONS

الفصل 2 القوى والجذور
POWERS AND RADICALS

الفصل 3 الاحتمالات
PROBABILITIES

الفصل 4 القياسات الإحصائية
STATISTICAL MEASUREMENTS

الفصل 5 علم المثلثات
TRIGONOMETRY

محتوى الكتاب

1 Equations

المعادلات

1

- 1 مدخل إلى المعادلات
- 2.....Introduction to Equations
- 2 تحليل المقادير الجبرية التربيعية
- 7.....Factoring Algebraic Quadratic Expressions
- 3 حلّ المعادلة التربيعية بالقانون
- 16.....Solving Quadratic Equations By Formula



21 Powers and Radicals

القوى والجذور

2

- 22.....Powers القوى
- 31.....Radical Expressions المقادير الجذرية
- 39.....Logarithms اللوغاريتمات

45 Probabilities

الاحتمالات

3

- 46.....Introduction to Probability مدخل إلى الاحتمال
- 52.....Probability الاحتمال
- 3 قانون العدّ الأساسي
- 60.....Fundamental Counting Principle
- 4 التباديل والتراتب والتوافيق
- 64.....Permutations, Arrangements and Combinations

75 Stastical measurements

القياسات الإحصائية

4

- 76.....Measures of Central Tendency قياسات النزعة المركزية
- 86.....Measures of Dispersion قياسات التشتت



93 Trigonometry

علم المثلثات

5

- 1 النسب المثلثية وحلّ المثلث القائم
- 94.....Trigonometric Ratios and Solving Right Triangle

المعادلات

Equations

الفصل

1

كان كتاب الجبر والمقابلة للعالم محمد بن موسى الخوارزمي من أوائل الكتب التي تناولت الجبر. وقد أورت هذا الكتاب العالم كلمة الجبر التي تُستعمل في مختلف لغات العالم مع بعض التحوير في اللفظ. استعمل الخوارزمي كلمة «الجبر» في تعامله مع المعادلات بهدف حلّها. فجبر المعادلة بالنسبة إليه كان يعني زيادة أو إنقاص العدد نفسه على طرفي المعادلة لتحرير المجهول وتحديد قيمته. وقد استعان الخوارزمي بعلم الجبر للقيام بأبحاثه العلمية في ميادين الجغرافيا وعلم الفلك.

الدروس

1. المعادلات.
2. تحليل المقادير الجبرية التربيعية.
3. حل المعادلة التربيعية بالقانون.

كان الإسطرلاب من أوائل الأدوات التي استعملها العلماء لدراسة مواقع النجوم.

Introductions to Equations

مدخل إلى المعادلات



لماذا

نستطيع حل الكثير من مسائل الحياة اليومية باستعمال المعادلات. المعادلة تشبه الميزان، والتعادل يفرض أن نتعامل بالتساوي مع كل كفة (أو كل طرف في المعادلة).

الأهداف

- نتعرف خواص المساواة ونستعملها.
- نكتب معادلات خطية ونحلها جبرياً وبيانياً.

المعادلة Equation هي مساواة بين مقدارين يتضمّنان متغيّراً يدعى مجهولاً Unknown أو أكثر

$12x = 10$ ، هي معادلة في مجهول واحد هو x .

$2x - 3y = 12$ ، هي معادلة في مجهولين هما x و y .

كل عدد يحقق المعادلة بالتعويض (أي إنه يحوّلها إلى مساواة صحيحة بعد إحلال العدد محلّ المجهول) يدعى جذراً Root لها. فالعدد $\frac{5}{6}$ مثلاً هو جذر للمعادلة $12x = 10$ لأن التعويض عن المجهول بهذا العدد يؤدي إلى مساواة صحيحة: $12 \times \frac{5}{6} = 10$.

حل معادلة هو إيجاد مجموعة الأعداد التي تشكّل جذوراً لها. هذه المجموعة تدعى مجموعة الحل Solution Set للمعادلة. يمكن لهذه المجموعة أن تقتصر على عنصر واحد، كما يمكن أن تحتوي على أكثر من عنصر أو حتى على عدد غير منته من العناصر. ويمكن لمجموعة الحل أن تكون المجموعة الخالية \emptyset Empty Set، أي لا تحتوي على أي عنصر.

استعمل خواص المساواة بين الأعداد الحقيقية، وخاصية التعويض عند قيامك بحل المعادلات.

خواص المساواة Properties of Equality

$a = a$	خاصية الانعكاس Reflexive Property
$b = a$ فإن $a = b$ إذا كان	خاصية التناظر Symmetric Property
$a = b$ و $b = c$ فإن $a = c$	خاصية التعددي Transitive Property
$a + c = b + c$ فإن $a = b$ إذا كان	خاصية الجمع Addition Property
$a - c = b - c$ فإن $a = b$ إذا كان	خاصية الطرح Subtraction Property
$ac = bc$ فإن $a = b$ إذا كان	خاصية الضرب Multiplication Property
$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ فإن $a = b$ حيث $c \neq 0$	خاصية القسمة Division Property
$a = b$ فإن التعويض عن a بـ b	خاصية التعويض Substitution Property

في أي جملة رياضية صحيحة، يبقونها صحيحة.

يبدأ حل المعادلات دائماً بتبسيط المقادير وحذف رموز التجميع.

هناك مقياسان لدرجات الحرارة: المقياس المئوي (Celsius) ومقياس فهرنهايت (Fahrenheit). العلاقة بين المقياسين هي $F = \frac{9}{5}C + 32$ حيث يرمز F إلى درجة الحرارة على مقياس فهرنهايت، ويرمز C إلى درجة الحرارة على المقياس المئوي.

جاء في نشرة الأحوال الجوية أن درجة الحرارة اليوم كانت 86 درجة على مقياس فهرنهايت.

كم كانت درجة الحرارة على المقياس المئوي؟

1

مثال

تطبيقات

درجات الحرارة

الحل

القاعدة	$F = \frac{9}{5}C + 32$
عوّض عن F بالعدد 86	$86 = \frac{9}{5}C + 32$
اطرح 32 من كل طرف مستعملاً خاصية الطرح	$86 - 32 = \frac{9}{5}C + 32 - 32$
بسّط	$54 = \frac{9}{5}C$
اضرب كل طرف في $\frac{5}{9}$ مستعملاً خاصية الضرب	$\left(\frac{5}{9}\right)54 = \left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{9}{5}C\right)$
بسّط	$30 = C$
استعمل خاصية التناظر	$C = 30$

حاول كم ستكون درجة الحرارة على مقياس فهرنهايت لو كانت 35 درجة على المقياس المئوي؟

مثال

حلّ المعادلة $2x+7=5x-9$.

الحل

المعادلة

$$2x+7=5x-9$$

اطرح 7 من كل طرف مستعملاً خاصيّة الطرح

$$2x+7-7=5x-9-7$$

بسّط

$$2x=5x-16$$

اطرح $5x$ من كل طرف مستعملاً خاصيّة الطرح

$$2x-5x=5x-16-5x$$

بسّط

$$-3x=-16$$

اقسم كل طرف على -3 مستعملاً خاصيّة القسمة

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{-16}{-3}$$

بسّط

$$x = \frac{16}{3}$$

تحقق: $2 \times \frac{16}{3} + 7 = 5 \times \frac{16}{3} - 9$

$$\frac{32+21}{3} = \frac{80-27}{3}$$

$$\text{صواب} \quad \frac{53}{3} = \frac{53}{3}$$

إذاً $x = \frac{16}{3}$ هو جذر المعادلة.حاول حلّ المعادلة $3x+12=-5x+24$ ، وتحقق من الحل بالتعويض.

التمارين

التواصل في الرياضيات

اذكر الخواص التي تستعملها في حل المعادلة.

$$3x-5=2x-2$$

3

$$x+2.2=\frac{x}{5}$$

2

$$52=-2.7x-3$$

1

$$4x-7=4$$

4

تذكّر

تكون معادلتان متكافئتين إذا كانت لهما نفس الجذور.

تمارين موجهة

حلّ المعادلة وتحقق من الحل.

$$\frac{x}{5}+3=4$$

6

$$4x+12=20$$

5

$$7-6x=2x-9$$

8

$$-\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}=2-3x$$

7

تمارين وتطبيقات

حلّ المعادلة.

$$-2x-7=9 \quad 10$$

$$2x-5=1 \quad 9$$

$$20=6x-10 \quad 12$$

$$5x-3=12 \quad 11$$

$$3x+1=\frac{1}{2} \quad 14$$

$$4-5x=19 \quad 13$$

$$7x=-2x+5 \quad 16$$

$$4x+80=-6x \quad 15$$

$$4x-3=x+7 \quad 18$$

$$5x+3=2x+18 \quad 17$$

$$\frac{1}{4}x-\frac{5}{2}=-2 \quad 20$$

$$\frac{1}{5}x+3=2 \quad 19$$

$$\frac{1}{3}x=-x+4 \quad 22$$

$$\frac{1}{2}x+2=0 \quad 21$$

$$-\frac{1}{3}x+1=\frac{3}{2}x-1 \quad 24$$

$$x-5=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2} \quad 23$$

$$\frac{1}{4}x-3=6x \quad 26$$

$$\frac{2}{3}x+9=\frac{1}{2}x-4 \quad 25$$

$$\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}=x-3 \quad 28$$

$$\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}x-1 \quad 27$$

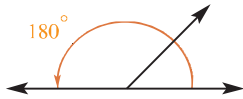
حلّ المعادلة باستعمال الحاسبة، واكتب الحلّ مقرباً إلى أقرب جزء من مئة.

$$0.24x+1.1=2.56x-1.5 \quad 29$$

$$1.05x-4.28=-2.65x+4.1 \quad 30$$

$$0.67x-8.75=-0.48x+3.99 \quad 31$$

$$5.9(0.33x-1.33)=1.03x-5.72 \quad 32$$



هندسة يبلغ قياس إحدى زاويتين متكاملتين ضعف قياس الزاوية الأخرى مضافاً إليه 45 درجة. اكتب معادلة واستعملها لتجد قياس كل زاوية.

ربط

اكتب معادلة مناسبة ثم حلّها.

34 تسليّة ثمن بطاقة الدخول إلى مدينة الألعاب 6000 دينار، ورسم الاشتراك في كل لعبة

1500 دينار. بكم لعبة يمكنك أن تشترك إذا كان معك 30 000 دينار؟

35 اقتصاد دفع رياض 1 750 000 دينار ثمناً لحاسوب جديد. يفقد هذا الحاسوب من قيمته

250 000 دينار في السنة. بعد كم سنة تصبح قيمة هذا الحاسوب صفراً؟

36 مدخول تلقى نبيل عرضين للعمل في متجر لبيع الملابس.


• الأول: 600 ألف دينار في الشهر يضاف إليها 10 آلاف دينار عن كل بدلة يبيعها.

• الثاني: 800 ألف دينار في الشهر يضاف إليها 8 آلاف دينار عن كل بدلة يبيعها.

ما عدد البدلات التي يُفترض أن يبيعها نبيل لكي يحصل على المردود نفسه

في العرضين؟

37 مدخول عرضت إحدى العائلات على امرأة وظيفة «مربية أطفال» مقابل 60 ألف دينار في الأسبوع، يضاف إليها مبلغ 7500 دينار عن كل ساعة عمل. كم ساعة على المرأة أن تعمل لكي تتمكن من شراء أدوات مطبخ ثمنها 120 ألف دينار في نهاية الأسبوع؟

نظرة إلى الوراء 

احسب المقدار .

39 $-(-5^2)^3$

38 $3(2-(5-3)-7)+2$

نظرة إلى الأمام 

اشرح ما تعنيه الجملة الرياضية.

41 $-3 < x < 3$

40 $y > -5$

43 $x \geq -3$

42 $-1 \leq y \leq 1$

تحليل المقادير الجبرية التربيعية

Factoring Algebraic Quadratic Expressions



لماذا
نستخدم المقادير الجبرية
التربيعية لوصف الكثير من الأنماط
في الحياة اليومية مثل نمط الحوض
في الصورة.

الدرس

2

الأهداف

- نحلّ مقداراً جبرياً تربيعياً.
- نستعمل التحليل لحلّ معادلة تربيعية

صمّم مهندس معماري حوضاً للحديقة العامة على الشكل المبين في الصورة أعلاه. رصف المهندس داخل الحوض عدداً من المكعبات المتشابهة على شكل إشارة الضرب \times وعلى عدة مستويات. عدد المكعبات في كل ذراع من أذرع الرمز يقلّ واحداً عن عددها في الذراع الذي يقع تحته مباشرة. تسمح القاعدة $m = 2n^2 - n$ بحساب عدد المكعبات m اللازمة لإنشاء حوض من n مستوى. ما عدد مستويات حوض فيها 66 مكعباً؟

تطبيقات هندسة معمارية

Factoring Algebraic Quadratic Expressions تحليل المقادير الجبرية التربيعية

عندما تعلّمت ضرب مقدارين مثل $2x$ و $x+3$ ، حوّلت ناتج ضرب المقدارين إلى مجموع حدود. التحليل Factoring هو العملية العكسية. فهو يمكّنك من تحويل مجموع حدود إلى ناتج ضرب. لتحليل مقدار يتضمّن حدّين أو أكثر، استخرج العامل المشترك الأكبر (ع م أ) *Greatest Common Factor (GCF)* للمقدارين كما هو مبين في المثال التالي:

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{\text{ضرب}} \\ 3x^2 + 6x = 3x(x+3) \\ \xrightarrow{\text{تحليل}} \end{array}$$

مثال

حلل المقدار التربيعي.

$$3m^2 - 12m \quad \boxed{\text{أ}}$$

الحل

استخرج العامل المشترك الأكبر.

$$3m^2 - 12m = 3m \times (m) - 3m \times (4) \quad \boxed{\text{أ}}$$

العامل المشترك الأكبر هو $3m$.

$$3m^2 - 12m = 3m \times (m) - 3m \times (4) \\ = 3m(m - 4)$$

$$3x(4x+5) - 5(4x+5) \quad \boxed{\text{ب}}$$

العامل المشترك الأكبر هو $(4x+5)$.

$$3x(4x+5) - 5(4x+5) \\ = (4x+5)(3x-5)$$

حاول حل كلٍّ من المقدارين $5x^2 + 15x$ و $4(2x-1) + (2x-1)x$.الصورة العامة للمقدار التربيعي هي $ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$.يمكنك تحليل الكثير من المقادير التربيعية جبرياً. أمعن النظر في تحليل المقدار أدناه. (حيث $a=1$)

حل المسائل ابحث عن نمط. انظر إلى الصورة التحليلية للمقدار التربيعي، ولاحظ أن مجموع الحدين الثابتين في العاملين يساوي معامل x في المقدار التربيعي قبل تحليله، وأن ناتج ضربهما يساوي الحد الثابت.

$$x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-2)$$

$(-5) + (-2) = -7$ $(-5) \times (-2) = 10$
 $x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$
 $(-5) + 2 = -3$ $(-5) \times (2) = -10$

$$x^2 + 7x + 10 = (x+5)(x+2)$$

$5 + 2 = 7$ $5 \times 2 = 10$
 $x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$
 $5 + (-2) = 3$ $5 \times (-2) = -10$

تسمح دراسة الأنماط السابقة باستخلاص قاعدة لتحليل المقدار التربيعي $x^2 + bx + c$.

لكي تحلل المقدار $x^2 + bx + c$ ، حيث b و c عددان صحيحان، ابحث عن عددين صحيحين r و s يكون مجموعهما b وناتج ضربهما c . بعد ذلك حلل المقدار كما يلي:

$$x^2 + bx + c = (x+r)(x+s)$$
عندما يكون c موجباً، حله إلى ناتج ضرب عددين لهما الإشارة نفسها. وهي إشارة b .

مثال 2

حلّ المقدار: $x^2 + 5x + 6$.

الحل

حل المسائل

خمن وتحقق ابدأ بكتابة $(x \quad)(x \quad)$. ابحث عن عاملين للعدد 6 لهما الإشارة نفسها ومجموعها 5:

$(x-2)(x-3)$	$(x-1)(x-6)$	$(x+2)(x+3)$	$(x+1)(x+6)$
$(-2)x + (-3)x$	$(-1)x + (-6)x$	$2x + 3x$	$1 \times x + 6x$
$\underline{\underline{5x}}$	$\underline{\underline{5x}}$	$\underline{\underline{5x}}$	$\underline{\underline{5x}}$
خطأ	خطأ	صواب	خطأ

إذًا، $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$.

لاحظ: عند تحليل المقدار $x^2 - 5x + 6$ كما سبق سنجد أن: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

حاول حلّ المقدار $x^2 - 10x - 11$.

عندما يكون c عددًا سالبًا في $x^2 + bx + c$ ، ابحث عن عاملين مختلفين في الإشارة.

مثال 3

حلّ المقدار $x^2 - 7x - 30$.

الحل

حل المسائل

خمن وتحقق ابدأ بكتابة $(x \quad)(x \quad)$. ابحث عن عاملين من عوامل العدد (-30) يكون مجموعهما -7. احرص أن يكون العاملان مختلفين في الإشارة.

$(x-2)(x+15)$	$(x+1)(x-30)$	$(x-1)(x+30)$
$(-2)x + 15x$	$1x + (-30)x$	$(-1)x + 30x$
$\underline{\underline{-7x}}$	$\underline{\underline{-7x}}$	$\underline{\underline{-7x}}$
خطأ	خطأ	خطأ
$(x+3)(x-10)$	$(x-3)(x+10)$	$(x+2)(x-15)$
$3 \times x + (-10)x$	$(-3)x + 10x$	$2x + (-15)x$
$\underline{\underline{-7x}}$	$\underline{\underline{-7x}}$	$\underline{\underline{-7x}}$
صواب	خطأ	خطأ

إذًا، $x^2 - 7x - 30 = (x+3)(x-10)$.حاول حلّ المقدار $3x^2 + 11x - 20$.

مثال

حلل المقدار: $8x^2 + 7x - 15$

الحل

$$8x^2 + 7x - 15 = (2x + 3)(4x - 5)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline +12x \\ \hline \end{array}$$

$$-10x + 12x = 2x$$

حلل الحد التربيعي إلى عاملين $(8x^2 = (2x) \times (4x))$ والحد الثابت إلى عاملين

$(-15 = (3)(-5))$ وتحقق من الحد الخطي.

مثال

حلل المقادير التالية:

$$6x^2 - 5x - 1 \quad \text{أ}$$

$$3x^2 + 11x - 20 \quad \text{ب}$$

$$3x^2 - 11x - 20 \quad \text{ج}$$

$$8x + 6x^2 - 30 \quad \text{د}$$

الحل

$$6x^2 - 5x - 1 = (6x + 1)(x - 1) \quad \text{أ}$$

$$3x^2 + 11x - 20 = (3x - 4)(x + 5) \quad \text{ب}$$

$$3x^2 - 11x - 20 = (3x + 4)(x - 5) \quad \text{ج}$$

$$8x + 6x^2 - 30 = 6x^2 + 8x - 30 \quad \text{د}$$

$$= 2(3x^2 + 4x - 15)$$

$$= 2(3x - 5)(x + 3)$$

في كل تحليل، استخرج العامل المشترك الأكبر قبل التحليل.

حاول حلل المقدار $3x^2 + 9x - 30$.

تفحص الآن ناتج ضرب المقدارين

فرق مربعين

 $x + 3$ و $x - 3$.

$$(x + 3)(x - 3) = x^2 + 3x - 3x - 9 = x^2 - 9 = x^2 - 3^2$$

تحليل فرق المربعين Factoring The Difference Of Two Squares

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4) \quad \text{مثلاً:}$$

تفحص نتيجة تربيع $x + 3$ ونتيجة تربيع $x - 3$.

$$(x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3)$$

$$= x^2 - 3x - 3x + 9$$

$$= x^2 - 6x + 9$$

$$= x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2$$

$$(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$$

$$= x^2 + 3x + 3x + 9$$

$$= x^2 + 6x + 9$$

$$= x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2$$

مربع كامل

تحليل المربع الكامل Factoring Perfect Squares

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

لاحظ: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ و $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

مثال 6

حل كل مقدار.

أ $x^4 - 16$

الحل

أ $x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4)$
 $= (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

ب $4x^2 - 24x + 36$
 $= 4(x^2 - 6x + 9)$
 $= 4[x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2]$
 $= 4(x - 3)^2$

حاول حل كل مقدار: $9x^2 - 49$ و $3x^2 - 6x + 3$.

حل المعادلات التربيعية بالتحليل Using Factoring to Solve Quadratic Equations

يمكنك، في بعض الأحيان، استعمال التحليل لحل معادلة.

خاصية الضرب الصفري Zero Product Property

إذا كان $p \times q = 0$ فإن $p = 0$ أو $q = 0$.

تكتب المعادلة التربيعية على الصورة العامة كما يلي: $ax^2 + bx + c = 0$. إذا تمكنت من تحليل المقدار $ax^2 + bx + c$ ، فإن تطبيق خاصية الضرب الصفري يسمح لك بحل المعادلة. كيف تطبق خاصية الضرب الصفري؟ حل المقدار التربيعي واكتب أن ناتج الضرب الحاصل يساوي 0.

مثال 7

حل المعادلة $x^2 + 6x = -5$.

الحل

ابدأ بكتابة المعادلة على الصورة العامة $x^2 + 6x + 5 = 0$ ، وحل المقدار $x^2 + 6x + 5$ لتحصل

على $x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1)$. بعد ذلك اكتب $(x + 5)(x + 1) = 0$.

كيف تحدد جذري المعادلة $(x + 5)(x + 1) = 0$ ؟

هذه المعادلة الأخيرة تعطيك، باستعمال خاصية الضرب الصفري، المعادلتين التاليتين:

$(x + 5) = 0$ أو $(x + 1) = 0$ ، أي $x = -5$ أو $x = -1$. جذرا المعادلة هما -1 و -5.

مثال 8

استخدم خاصية الضرب الصفري لحل كل معادلة.

$$2x^2 - 11x = 0 \quad \text{أ} \quad \text{و} \quad x^2 - 14x + 45 = 0 \quad \text{ب}$$

الحل

$$\begin{array}{ll} 2x^2 - 11x = 0 & \text{أ} \\ x(2x - 11) = 0 & \\ x = 0 \text{ أو } 2x - 11 = 0 & \\ x = 0 & x = \frac{11}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x^2 - 14x + 45 = 0 & \text{ب} \\ (x - 5)(x - 9) = 0 & \\ x - 5 = 0 \text{ أو } x - 9 = 0 & \\ x = 5 & x = 9 \end{array}$$

حاول

استخدم خاصية الضرب الصفري لحل كل معادلة.

$$3x^2 + 12x = 0 \quad \text{أ} \quad x^2 + 4x - 21 = 0 \quad \text{ب}$$

برهن أن للمعادلة $ax^2 + bx = 0$ ، حيث $a \neq 0$ ، جذرين هما 0 و $-\frac{b}{a}$.

فكر ناقد

مثال 9

بالعودة إلى مسألة الحوض الواردة في بداية الدرس، كم يكون عدد مستويات الحوض عندما

يكون عدد المكعبات 66؟

الحل

حلّ المعادلة $2n^2 - n = 66$ بالتحليل.

$$\begin{array}{ll} 2n^2 - n - 66 = 0 & \text{اكتب المعادلة على الصورة العامة} \\ (2n + 11)(n - 6) = 0 & \text{حلّ المقدار } 2n^2 - n - 66 \\ 2n + 11 = 0 \text{ أو } n - 6 = 0 & \text{استعمل خاصية الضرب الصفري} \\ n = -5.5 \text{ أو } n = 6 & \end{array}$$

عدد المستويات 6 لأن عدد المستويات لا يكون إلا عددًا صحيحًا موجبًا.

التمارين

التواصل في الرياضيات

- 1 كيف تجد m و n إذا كان $x^2 + 34x + 285 = (x + m)(x + n)$ ؟
- 2 ماذا تعرف عن تحليل المقدار التربيعي $x^2 + bx + c$ عندما يكون c موجبًا؟ عندما يكون c سالبًا؟ ما المعلومة التي توفرها إشارة b في كل حالة؟
- 3 ماذا يمكنك أن تقول عن b و c إذا كان ناتج ضربهما صفرًا ($bc = 0$)؟

تمارين موجهة

حلّ كل مقدار تربيعي.

$$\begin{array}{ll} 2x^2 - 8x & 5 \\ 4x(x + 3) - 7(x + 3) & 7 \\ 8d(9d - 5) + 3(9d - 5) & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2x^2 - 6x & 4 \\ 5x^2 - 15x & 6 \\ 3(4b + 7) - 2b(4b + 7) & 8 \end{array}$$

$x^2 + 8x + 7$ 11	$x^2 + 5x + 6$ 10
$x^2 - 4x - 12$ 13	$x^2 - 5x + 4$ 12
$x^2 + 10x - 24$ 15	$x^2 - 9x - 36$ 14
$3x^2 + 5x + 2$ 17	$2x^2 + 9x + 10$ 16
$8x^2 + 24x - 14x - 42$ 19	$5x^2 + 13x - 6$ 18
$72x^2 - 56x - 36x + 28$ 21	$12x^2 + 21x - 8x - 14$ 20
$2x^2 - 8$ 23	$x^2 - 81$ 22
$x^2 + 8x + 16$ 25	$16x^2 - 25$ 24

استعمل خاصية الضرب الصفري لحل كل معادلة.

$x^2 + 3x - 10 = 0$ 28	$x^2 + 6x + 9 = 0$ 27	$x^2 + 7x = 0$ 26
-------------------------------	------------------------------	--------------------------

هندسة **29** وصل سمير بين عدد من النقاط بقطع مستقيمة. رسم 63 قطعة مستقيمة. ما عدد النقاط، علمًا بأن ربط n نقطة يحتاج إلى $\frac{n(n-1)}{2}$ قطعة مستقيمة؟

تمارين وتطبيقات

حل كل مقدار.

$3x^2 + 18$ 31	$3x + 6$ 30
$x - 4x^2$ 33	$10n - n^2$ 32
$3x^2 - 15x$ 35	$6x - 2x^2$ 34
$(x + 3)(2x) + (x + 3)7$ 37	$5x(x - 2) - 3(x - 2)$ 36

حل كل مقدار.

$x^2 + 8x + 16$ 39	$x^2 - 16x + 15$ 38
$x^2 + 4x - 32$ 41	$x^2 - 26x + 48$ 40
$x^2 - 10x - 24$ 43	$x^2 + 7x - 30$ 42
$2x - x^2 - 24$ 45	$-22x - 48 + x^2$ 44
$56 + 10x - x^2$ 47	$x^2 - 56 - 10x$ 46
$24 + 10x - x^2$ 49	$30 + x - x^2$ 48
$2x^2 + 5x + 2$ 51	$3x^2 + 10x + 3$ 50
$3x^2 + 7x + 2$ 53	$2x^2 + 3x + 1$ 52
$3x^2 - 5x - 2$ 55	$12x^2 - 3x - 9$ 54

استعمل التحليل خاصية الضرب الصفري لحل المعادلة.

$3x^2 - 5x = 2$ 57	$15x^2 = 7x + 2$ 56
$3x^2 + 3 = 10x$ 59	$4x - 4 = -15x^2$ 58
$6x^2 - 17x = -12$ 61	$2x^2 - 15 = -7x$ 60
$t^2 - 9 = 0$ 63	$x^2 - 36 = 0$ 62
$x^4 - 1 = 0$ 65	$x^4 - 81 = 0$ 64
$25x^2 - 16 = 0$ 67	$4x^2 - 9 = 0$ 66
$x^2 + 4x + 4 = 0$ 69	$x^2 - 2x + 1 = 0$ 68
$4x^2 + 1 = 4x$ 71	$9x^2 = -6x - 1$ 70
$40x + 25 = -16x^2$ 73	$-4 + 20x - 25x^2 = 0$ 72
$9 - 6x + x^2 = 0$ 75	$64 + 16x + x^2 = 0$ 74

استعمل التحليل وخاصية الضرب الصفري لحل المعادلة.

$t^2 - 2t - 15 = 0$ 77	$x^2 - 7x + 10 = 0$ 76
$6x^2 + 3x - 9 = 0$ 79	$4x^2 + 4x - 24 = 0$ 78
$x^2 - 15x + 56 = 0$ 81	$t^2 + 7t - 60 = 0$ 80
$x^2 - 3x - 40 = 0$ 83	$x^2 + 8x + 12 = 0$ 82
$4x^2 - 8x + 3 = 0$ 85	$6x^2 + 20x - 16 = 0$ 84

حل كل مقدار.

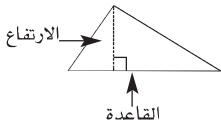
$x^{2n} - 2x^n + 1$ 88	$x^{2n} - 1$ 87	$(a+b)^4 - (a-b)^4$ 86
-------------------------------	------------------------	-------------------------------

تحديد

هندسة قاعدة حساب مساحة المثلث هي $A = \frac{1}{2}bh$ حيث يمثل b القاعدة و h الارتفاع النازل عليها. استعمل هذه المعلومة لحل التمرينين 89 و 90.

ربط

89 احسب ارتفاع مثلث مساحته 42 cm^2 وتزيد قاعدته 5 cm على ارتفاعه.
90 احسب قاعدة مثلث مساحته 12 cm^2 ويقل ارتفاعه 5 cm عن قاعدته.



نظرة إلى الوراء

حل المتباينة ومثل مجموعة الحل على محور الأعداد.

$2x - \frac{3}{4} \geq 7$ 92	$2x - 4 > 12 + 5x$ 91
-------------------------------------	------------------------------

$$-2\left(\frac{2}{3}x+5\right)-13<0 \quad 94$$

$$3(3x+7)-12\leq 8-\left(\frac{1}{2}x+9\right) \quad 93$$

اضرب.

$$(-2x+9)(-4x+7) \quad 96$$

$$(3x+4)(-x-5) \quad 95$$

$$\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}\right)(-5x-2) \quad 97$$

نظرة إلى الأمام 

حلّ المقدار التربيعي إذا كان ذلك ممكنًا.

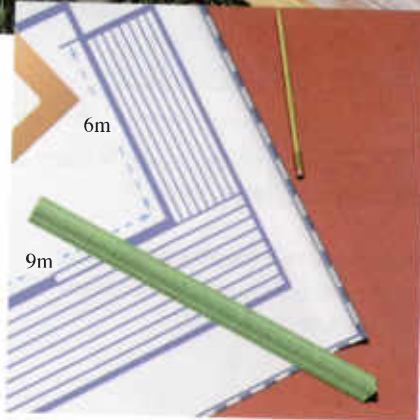
$$(x-1)^2-16 \quad 100$$

$$(x+9)^2+36 \quad 99$$

$$(x+2)^2-4 \quad 98$$

حلّ المعادلة التربيعيّة بالقانون

Solving Quadratic Equation By Formula



قرّرت عائلة نزار بناء ممرّ له عرض ثابت على
طول جانبي دارهم. لدى هذه العائلة مواد تكفي
لتغطية ممرّ مساحته 54m^2 . كم يجب أن يكون
عرض هذا الممرّ؟ يمكنك استعمال قانون المعادلة
التربيعية لحل هذه المسألة.

وضع علماء الرياضيات قانوناً لحل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة العامة،
 $ax^2 + bx + c = 0$. يستعمل هذا القانون مقداراً مهماً سمّوه المميّز.

التمييز Discriminant

يُدعى المقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ ، مميّز المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$
حيث $a \neq 0$.

الدرس 3

الأهداف

- نستعمل القانون لإيجاد
الجذور الحقيقية لمعادلة
تربيعية.

تطبيقات بناء

حل المعادلة التربيعية بالقانون Solving Quadratic Equation by Formula

المميز	عدد الجذور في مجموعة الأعداد الحقيقية
$\Delta > 0$	للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان هما $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$\Delta = 0$	للمعادلة التربيعية جذران متساويان $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	لا جذور للمعادلة التربيعية في مجموعة الأعداد الحقيقية.

استعمل القانون لحل المعادلة $x^2 + 5x - 14 = 0$.

مثال 1

الحل

إذا قارنت $x^2 + 5x - 14 = 0$ مع الصورة العامة للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ وجدت أن $a = 1$ و $b = 5$ و $c = -14$.
حلّ المعادلة على الشكل التالي:

1. احسب المميز عبر تعويض كل معامل بقيمته $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times (-14) = 25 + 56 = 81$$

2. بما أن المميز موجب، فإن للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين هما:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{و} & & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-5 - \sqrt{81}}{2} & & & &= \frac{-5 + \sqrt{81}}{2} \\ &= -7 & & & &= 2 \end{aligned}$$

حاول

حلّ $x^2 - 7x + 6 = 0$ باستعمال القانون.

نقطة مراقبة ✓

حلّ المعادلة $x^2 + 5x - 14 = 0$ بالتحليل، للتحقق من صحة الإجابة في المثال 1.

مثال 2

استعمل القانون لحل المعادلة $4x^2 = 8 - 3x$. اكتب الجذرين مضبوطين ثم قرّبهما إلى أقرب عُشر.

الحل

اكتب $4x^2 = 8 - 3x$ على الصورة العامة، تحصل على $4x^2 + 3x - 8 = 0$. معاملات المعادلة هي: $a = 4$ و $b = 3$ و $c = -8$.

احسب المميّز بالتعويض: $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 4(-8) = 9 + 128 = 137$.

للمعادلة جذران لأن المميز موجب. هذان الجذران مختلفان وهما:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \\ &= \frac{-3 - \sqrt{137}}{8} \quad \text{و} \quad = \frac{-3 + \sqrt{137}}{8} \\ &\approx -1.8 \quad \text{و} \quad \approx 1.1 \end{aligned}$$

حاول استعمل القانون لحل المعادلة $2x^2 - 6x = -3$. اكتب الجذرين مضبوطين، ثم قرّبهما إلى أقرب عشر.

استعمل القانون لحل المعادلة التربيعية $x^2 - 3x + 6 = 0$.

مثال 3

الحل

المعاملات هي: $a=1$ ، $b=-3$ ، $c=6$.

احسب المميّز بالتعويض:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 9 - 24 = -15$$

بما أن المميّز سالب فلا جذور للمعادلة في مجموعة الأعداد الحقيقية.

حاول حل المعادلة $4x + 2 = -3x^2$.

حل المعادلة $3x^2 + 12 = 12x$.

مثال 4

الحل

اكتب المعادلة التربيعية على الصورة العامة: $3x^2 - 12x + 12 = 0$.

احسب المميّز بالتعويض:

$$\Delta = 12^2 - 4 \times 3 \times 12 = 144 - 144 = 0$$

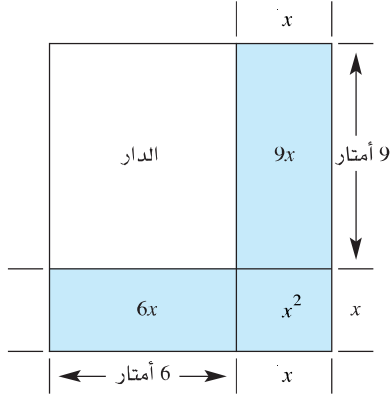
بما أن $\Delta = 0$ فإن للمعادلة جذرين متساويين:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{6} = 2$$

حاول حل المعادلة $x^2 - 14x = 49$.

مثال

بالعودة إلى أول الدرس، حدّد عرض الممرّ علماً أن عائلة نزار تملك من المواد ما يكفي لتغطية 54 متراً مربعاً.



الحل

المقدار الذي يمثّل المساحة هو

$$A(x) = x^2 + 9x + 6x = x^2 + 15x$$

المطلوب هو حلّ المعادلة $x^2 + 15x = 54$.

اكتب المعادلة على الصورة العامة وحدّد معاملاتها.

$$a = 1 \text{ و } b = 15 \text{ و } c = -54$$

احسب مميّز هذه المعادلة:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 225 - 4 \times 1 \times (-54) = 441$$

للمعادلة جذران مختلفان، لأن المميز موجب. هذان الجذران هما

$$x_2 = \frac{-15 - \sqrt{441}}{2} \text{ و } x_1 = \frac{-15 + \sqrt{441}}{2}$$

$$= -18 \text{ و } = 3$$

الجواب هو 3 لأن الجذر -18 غير مقبول، فعرض الممرّ لا يمكن أن يكون عدداً سالباً.

حاول حدّد عرض الممرّ إذا كانت المواد تكفي لتغطية 34 متراً مربعاً.

التمارين

التواصل في الرياضيات

1 اشرح كيف تستعمل قانون المعادلة التربيعية لحل المعادلة $x^2 + 2x - 3 = 0$.

تمارين موجّهة

استعمل القانون لتحديد جذري المعادلة.

$$2x^2 - 5x = 3 \quad 3$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad 2$$

تمارين وتطبيقات

استعمل القانون لحل المعادلة التربيعية. اكتب الحلول مضبوطة (من دون تقريب).

$$x^2 + 6x = 0 \quad 5$$

$$x^2 + 7x + 9 = 0 \quad 4$$

$$(x-4)(x+5) = 7 \quad 7$$

$$(x+1)(x-2) = 5 \quad 6$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \quad 9$$

$$t^2 - 9t + 5 = 0 \quad 8$$

$$x^2 - 5x - 6 = 18 \quad 11$$

$$x^2 + 9x - 2 = -16 \quad 10$$

$$4x^2 = -8x - 3 \quad 13$$

$$5x^2 + 16x - 6 = 3 \quad 12$$

$$x^2 + 3x = 2 - 2x \quad 15$$

$$x^2 + 10x = 5 \quad 17$$

$$5x^2 - 2x - 3 = 0 \quad 19$$

$$-x^2 - 3x + 1 = 0 \quad 21$$

$$3x^2 - 3 = -5x - 1 \quad 14$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \quad 16$$

$$-2x^2 + 4x = -2 \quad 18$$

$$-6x^2 + 3x + 19 = 0 \quad 20$$

نظرة إلى الوراء

22 ناتج ضرب عددين هو 90. أحد العددين يزيد 3 على ضعف الآخر. اكتب معادلة لتمثيل الحالة ثم حلها باستعمال خاصية الضرب الصفري.

استعمل التحليل وخاصية الضرب الصفري لحل كل معادلة.

$$4x^2 = 64 \quad 24$$

$$x^2 - 3x + 10 = 0 \quad 26$$

$$x^2 - 9x = 0 \quad 23$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0^{25} \quad 25$$

نظرة إلى الأمام

27 هل يمكنك أن تجد في مجموعة الأعداد الحقيقية حلاً للمعادلة التربيعية $2x^2 + 5x + 6 = 0$ ؟ اشرح مستعيناً بقانون حل المعادلة التربيعية.

القوى والجذور

Powers and Radicals

الفصل

2

عرف الإنسان باكراً القوى والجذور. كان الأمر يقتصر في البدء على قوة عدد صحيح موجب بأس صحيح موجب انطلاقاً من الضرب. وكانت الجذور تقتصر على الجذر التربيعي ومن ثم الجذر التكعيبي. وقد واجه الإنسان صعوبات كبرى عند ضرب القوى والجذور. ومع تقدم الملاحظة وعلم الفلك برزت بالحاح ضرورة القيام بعمليات حسابية معقدة تتضمن قوى. عمل علماء الرياضيات طويلاً على تحويل عمليات الضرب إلى عمليات جمع سريعة. وقد نجحوا في ذلك مع إدخال مفهوم اللوغاريتم.

الدروس

1. القوى.
2. الجذور.
3. اللوغاريتمات.

القوى Powers



يستعمل علماء الفلك القوى
للتعبير عن المسافات الكبيرة
كالمسافة بين الأرض وسديم
النسر (مثال 5).

لماذا

الدرس

1

الأهداف

- نكتب على أبسط صورة مقادير تتضمن قوى.
- نستعمل الصورة العلمية للأعداد.

القوى هي مقادير من النوع a^n حيث a عدد حقيقي مختلف عن الصفر، ويسمى أساس القوة، و n عدد صحيح، ويسمى أس القوة. عندما يكون n عدداً صحيحاً موجباً، فإن a^n يُعبّر عن ضرب العدد a في نفسه n مرة.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ مرة}}$$

الأس الأساس

استعمل القوسين للإحاطة بالأساس عندما لا يقتصر على رمز واحد.

الصورة التفصيلية	الأساس	الصورة الأساسية
$-2(x \times x \times x)$	x	$-2x^3$
$-(2x)(2x)(2x)$	$2x$	$-(2x)^3$
$(-2x)(-2x)(-2x)$	$-2x$	$(-2x)^3$

اكتب كل مقدار على الصورة التفصيلية.

مثال

الحل

$$(4y)^3$$

$$(4y)^3$$

$$(4y)(4y)(4y)$$

الأساس هو $4y$ والأس هو 3
 $4y$ مضروباً في نفسه 3 مرات

الأساس هو a والأس هو 3
 a مضروباً في نفسه 3 مرات

يتضمن هذا المقدار أساسين y و $x-3$ ، y مضروباً
 في نفسه مرتين و $x-3$ مضروباً في نفسه 3 مرات.

$$-a^3 \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$-a^2$$

$$-(a \times a \times a)$$

$$2y^2(x-3)^3 \quad \boxed{\text{ج}}$$

$$2y^2(x-3)^3$$

$$2(y)(y)(x-3)(x-3)(x-3)$$

حاول اكتب كل مقدار على الصورة التفصيلية.

$$-(2x-1)3y^2 \quad \boxed{\text{ج}}$$

$$3b^4 \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$(2a)^5 \quad \boxed{\text{أ}}$$

القوى التي أسها صفر أو عدد صحيح سالب

أيًا يكن العددين الحقيقيان a و b المختلفان عن 0 وأيًا يكن العدد الصحيح الموجب n ،

بالكلمات	مع الأعداد	في الجبر
خاصية الأس الصفري قوة عدد حقيقي مختلف عن 0 بأس 0 هي 1.	$100^0 = 1$	$a^0 = 1$
خاصية الأس السالب قوة عدد مختلف عن 0 بأس سالب هي قوة مقلوب هذا العدد بأس يساوي معكوس الأس الأصلي.	$7^{-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{7^2}$ $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$	$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

مثال

اكتب كل مقدار على أبسط صورة .

أ 2^{-3}

ب $-\left(\frac{3}{4}\right)^4$

أ $\frac{1}{2^3}$

مقلوب العدد 2 هو $\frac{1}{2}$

ب $-\left(\frac{4}{3}\right)^4$

مقلوب العدد $\frac{3}{4}$ هو $\frac{4}{3}$

$\frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$

$-\frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = -\frac{256}{81} = -3\frac{13}{81}$

حاول

اكتب كل مقدار على أبسط صورة .

أ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

ب $(-5)^{-5}$

يمكنك استعمال خصائص القوى لكتابة المقادير التي تتضمن قوى على أبسط صورة.

خصائص القوى

أيًا يكن العددين الحقيقيين a و b المختلفان عن 0 وأيًا يكن العددين الصحيحان m و n

بالكلمات	مع الأعداد	في الجبر
خاصية ضرب القوى لضرب قوتين من الأساس نفسه، اجمع الأسين.	$4^3 \times 4^2 = 4^{3+2} = 4^5$	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
خاصية قسمة القوى لكي تقسم قوة على أخرى من الأساس نفسه، اطرح أس الثانية من أس الأولى.	$\frac{3^7}{3^2} = 3^{7-2} = 3^5$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
خاصية قوة القوة لكي ترفع قوة بأس m إلى أس n اضرب الأسين واحتفظ بالأساس.	$(4^3)^2 = 4^{3 \times 2} = 4^6$	$(a^m)^n = a^{mn}$
خاصية قوة ناتج الضرب لكي ترفع ناتج ضرب عددين بأس معين ارفع كلا منهما إلى هذا الأس واضرب القوتين الناتجتين.	$(4 \times 3)^2 = 4^2 \times 3^2$	$(a \times b)^n = a^n \times b^n$
خاصية قوة ناتج القسمة لكي ترفع ناتج قسمة عدد على آخر بأس معين ارفع كلا منهما إلى هذا الأس واقسم قوة الأول على قوة الثاني.	$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

يكون المقدار الجبري على أبسط صورة عندما لا يتضمن قوى بأس سالب ولا رموز تجميع ولا حدودًا متشابهة .

مثال 3

اكتب كل مقدار على أبسط صورة مفترضًا جميع المتغيرات مختلفة عن 0 .

الحل

$$\begin{aligned} & \left(\frac{ab^4}{b^7}\right)^2 \quad \text{ب} & 2x^3(-5x) \quad \text{أ} \\ & (ab^{4-7})^2 = (ab^{-3})^2 & 2(-5)x^3x^1 \\ & \text{خاصية قسمة القوى} & -10x^{3+1} \\ & \text{خاصية قوة ناتج الضرب} & -10x^4 \\ & = a^2(b^{-3})^2 & \\ & \text{خاصية قوة القوة} & \\ & = a^2b^{(-3)\times 2} & \\ & \text{خاصية الأس السالب} & \\ & a^2b^{-6} = \frac{a^2}{b^6} & \end{aligned}$$

حاول

اكتب كل مقدار على أبسط صورة مفترضًا جميع المتغيرات مختلفة عن 0 .

$$\begin{aligned} & (-2x^3y)^{-3} \quad \text{ب} & (5x^6)^3 \quad \text{أ} \end{aligned}$$

الصورة العلمية لعدد هي كتابته باستعمال قوى العدد 10 على الشكل التالي $m \times 10^n$ حيث m عدد حقيقي يُحقق الشرط $1 \leq m < 10$ وحيث n عدد صحيح.

الصورة الرقمية	حرك النقطة العشرية	الصورة العلمية
12 750 000	7 منازل إلى اليمين	1.275×10^7
0.00000035	7 منازل إلى اليسار	3.5×10^{-7}

يُمكنك استعمال قوانين القوى للقيام بعمليات حسابية على أعداد مكتوبة على الصورة العلمية.

مثال 4

اكتب كل مقدار على أبسط صورة. اكتب الجواب على الصورة العلمية.

الحل

$$\begin{aligned} & \frac{9.1 \times 10^{-3}}{1.3 \times 10^8} \quad \text{أ} \\ & \left(\frac{9.1}{1.3}\right) \times \left(\frac{10^{-3}}{10^8}\right) \\ & 7.0 \times 10^{-11} \\ & \text{اقسم 9.1 على 1.3 واتر ح الأسين } -3-8=-11 \end{aligned}$$

$$\boxed{ب} \quad (3.5 \times 10^8)(5.2 \times 10^5)$$

$$(5.2)(3.5) \times (10^8)(10^5)$$

$$18.2 \times 10^{13}$$

$$1.82 \times 10^{14}$$

اضرب 3.5 في 5.2 واجمع الأسين $8+5=13$
بما $10 < 18.2$ حرك الفاصلة العشرية إلى اليسار
وزد 1 إلى الأس.

حاول

اكتب كل مقدار على أبسط صورة. اكتب الجواب على الصورة العلمية.

$$\boxed{ب} \quad (4 \times 10^{-6})(3.1 \times 10^{-4})$$

$$\boxed{أ} \quad \frac{2.325 \times 10^6}{9.3 \times 10^9}$$

مثال

5

تطبيق على حل المسائل.

يجتاز الضوء الفضاء بسرعة $3 \times 10^5 \text{ km/sec}$ تقريباً. كم دقيقة يستغرق الضوء ليجتاز المسافة بين الشمس والمشتري؟

المسافة بين الشمس والكواكب بالامتار	
المسافة	الكوكب
5.8×10^{10}	عطارد
1.1×10^{11}	فينوس
1.5×10^{11}	الأرض
2.3×10^{11}	المريخ
7.8×10^{11}	المشتري
1.4×10^{12}	زحل
2.9×10^{12}	أورانوس
4.5×10^{12}	نبتون
5.9×10^{12}	بلوتو

1. افهم المسألة

المطلوب هو حساب المدة التي يستغرقها الضوء المنطلق من الشمس لكي يصل إلى المشتري.

أنشئ لائحة بالمعلومات المهمة

• سرعة الضوء في الفضاء هي $3 \times 10^5 \text{ km/sec}$ تقريباً.

• المسافة بين الشمس والمشتري هي:

$$7.8 \times 10^{11} \text{ m}$$

2. خطط لحل المسألة

استعمل العلاقة التي ترتبط بين السرعة والمسافة والزمن.

$$\text{السرعة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} \quad \text{وبالتالي} \quad \text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$$

3. حل المسألة

ابدأ بتحويل سرعة الضوء من $\frac{\text{كيلومتر}}{\text{الثانية}}$ إلى $\frac{\text{متر}}{\text{الدقيقة}}$

$$\text{هناك } 10^3 \text{ m} = 1000 \text{ m} \text{ في الكيلومتر الواحد} \quad 3 \times 10^5 \frac{\text{km}}{\text{sec}} \left(\frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) \left(\frac{60 \text{ sec}}{1 \text{ min}} \right)$$

$$(3 \times 60) \times (10^5 \times 10^3) \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

$$180 \times 10^8 \text{ m/min} = 1.8 \times 10^{10} \text{ m/min}$$

سرعة الضوء إذاً هي 1.8×10^{10} متراً في الدقيقة.
استعمل الآن العلاقة بين السرعة والمسافة والزمن لحساب عدد الدقائق التي يستغرقها الضوء لينتقل من الشمس إلى المشتري.

$$\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{7.8 \times 10^{11}}{1.8 \times 10^{10}} \approx 43.33$$

4. **تحقق** يستغرق الضوء ما يقارب 43.33 دقيقة ليجتاز المسافة بين الشمس والمشتري.
بما أن الضوء يسير بسرعة $3 \times 10^5 \text{ km/s}$ وبما أنه يستغرق حوالي $43.33 \times 60 \approx 2600$ ثانية ليقطع المسافة بين الشمس والمشتري، فإن هذه المسافة تُساوي
 $3 \times 10^5 \times 2600 = 7.8 \times 10^8$
 $7.8 \times 10^8 \text{ km}$ أو $7.8 \times 10^{11} \text{ m}$ إذاً الجواب معقول.

حاول كم دقيقة يستغرق الضوء لينتقل من الشمس إلى الأرض؟

التمارين

التواصل في الرياضيات

1 اذكر متى يكون عدد مكتوباً على الصورة العلمية.

تمارين موجّهة

اكتب كل مقدار على الصورة التفصيلية.

2 $4(a-b)^2$ 3 $(12xy)^4$ 4 $-x^2(-2y)^5$ 5 $(-\frac{1}{2}b)^3$

اكتب كل مقدار على أبسط صورة .

6 $(-\frac{3}{5})^{-2}$ 7 5^0 8 $(-\frac{2}{3})^{-3}$ 9 10^{-1}

اكتب كل مقدار على أبسط صورة مفترضاً جميع المتغيرات مختلفة عن 0 .

10 $(-3a^2b^3)^2$ 11 $c^3d^2(c^{-2}d^4)$ 12 $\frac{5uv^6}{u^2v^2}$ 13 $10\left(\frac{y^5}{x^2}\right)^2$

14 $-2s^{-3}t(7s^{-8}t^5)$ 15 $-5m(mn^2)^3$ 16 $\frac{(4b)^2}{2b}$ 17 $\frac{x^{-1}y^{-2}}{x^3y^{-5}}$

اكتب كل مقدار على أبسط صورة مدوّناً الجواب على الصورة العلمية.

18 $(2.2 \times 10^5) \times (4.5 \times 10^{11})$ 19 $\frac{7.8 \times 10^8}{2.6 \times 10^{-3}}$ 20 $\frac{1.6 \times 10^{-3}}{4.0 \times 10^4}$

تمارين وتطبيقات

اكتب كل مقدار على الصورة التفصيلية.

$$2x(-y^2-x)^2 \quad 24 \quad (-9uv)^3 w^4 \quad 23 \quad 5x^3 \quad 22 \quad (m+2n)^3 \quad 21$$

اكتب كل مقدار على أبسط صورة.

$$-6^0 \quad 28 \quad \frac{5^{-3}}{2} \quad 27 \quad \frac{3^{-1}}{4} \quad 26 \quad (-4)^{-2} \quad 25$$

اكتب كل مقدار على أبسط صورة مفترضاً جميع المتغيرات مختلفة عن 0.

$$8a^2b^5(-2a^3b^2) \quad 32 \quad (16u^4v^6)^{-2} \quad 31 \quad (-x^4y^2)^5 \quad 30 \quad \frac{-100u^3v^{-5}}{25u^{-2}v^6} \quad 29$$

اكتب كل مقدار على الصورة العلمية.

$$(6.8 \times 10^3)(9.5 \times 10^5) \quad 35 \quad \frac{5.1 \times 10^4}{3.4 \times 10^{-5}} \quad 34 \quad (3.2 \times 10^6)(1.7 \times 10^{-4}) \quad 33$$

36 حاسوب يستطيع معالج حاسوب سرعته 5.4×10^9 جيفاهرتز أن ينجز عملية حسابية في الثانية. يتطلب تحويل أحد ملفات MB3 إلى ملف صوتي، 5.02×10^{11} عملية حسابية. كم دقيقة سيستغرق تحويل هذا الملف من قبل الحاسوب؟ قرب جوابك إلى أقرب جزء من مئة من الدقيقة.

رتب كل مجموعة أعداد من الأصغر إلى الأكبر بعد كتابة كل عدد على صورة قوة من قوى

العدد 2.

$$2^{-2}, 16^1, 4^0, -8^2 \quad 39 \quad 8^{-2}, 4^2, -4^3, 2^{-1} \quad 38 \quad 16^{-2}, 2^5, 4^1, 8^2 \quad 37$$

اكتب كل مقدار على أبسط صورة مفترضاً جميع المتغيرات مختلفة عن 0.

$$12x^0y^5(-2a^3b^2) \quad 42 \quad \left(\frac{3a^3b}{2a^{-1}b^2}\right)^2 \quad 41 \quad \frac{27x^3y}{18x^2y^4} \quad 40$$

$$(6x^5y^3)(-3x^2y^{-1}) \quad 45 \quad \left(\frac{5ab}{-3a^2}\right)^{-2} \quad 44 \quad \frac{72x^2y^3}{-24x^2y^5} \quad 43$$

قياسات احسب كلاً مما يلي:

$$46 \quad \text{اليارد والإنج قياسان للطول مُستعملان في بريطانيا. يساوي اليارد 36 إنشاً. كم إنشاً}$$

مربعاً في يارد مربع؟

$$47 \quad \text{ما عدد السنتيمترات المربعة في متر مربع؟}$$

$$48 \quad \text{تُستعمل في بريطانيا وحدة قياس ثلاثة للطول هي القدم. تساوي القدم 12 إنشاً. ما}$$

عدد الإنشات المكعبة في قدم مكعبة؟

$$49 \quad \text{ما عدد الأمتار المكعبة في كيلومتر مكعب؟}$$

اكتب كل مقدار على أبسط صورة مفترضاً جميع المتغيرات مختلفة عن 0 .

$$\begin{array}{lll} 50 & -a^2b^6(-7ab^{-4}) & 51 \quad \frac{14x^{-2}y^3}{-8x^{-5}y^5} \\ 52 & \left(\frac{20x^6}{2x^2}\right)^3 & 53 \quad (10x^{-2}y^0z^{-3})^2 \\ 54 & (-3a^2b^{-1}) & 55 \quad (8m^4n^{-2})(-3m^{-2}n)^0 \end{array}$$

56 ما متوسط عدد نبضات القلب في حياة الإنسان، علماً بأن متوسط عدد النبضات في الثانية 1.2، ومتوسط عمر الإنسان 75 سنة؟

57 ما متوسط عدد أنفاس الإنسان في حياته، علماً بأن متوسط عدد أنفاس الإنسان في الدقيقة هو 16، ومتوسط عمر الإنسان 75 سنة؟

58 ما متوسط عدد الشعرات على رأس الإنسان، علماً بأن متوسط عددها في السنتيمتر المربع هو 254 شعرة، ومتوسط مساحة رأس الإنسان هو 500cm^2 .

حدّد خاصية القوى التي تُعبّر عنها كل مساواة.

$$\begin{array}{lll} 59 & (x^5)^3 = x^{15} & 60 \quad (m^2n^5)^4 = m^8n^{20} \\ 61 & \frac{3b^3}{b^{-2}} = 3b^5 & 62 \quad \left(\frac{xy^5}{x^3}\right)^4 = \frac{x^4y^{20}}{x^{12}} \end{array}$$

63 **لغة** غالباً ما تستعمل عبارة مثل «عدد سكان هذه الدولة 3.8 ملايين نسمة» للتعبير عن عدد السكان. اكتب هذا العدد على الصورة العلمية وشرح العلاقة بين تمثيل العدد في الرياضيات والتعبير اللغوي عنه.

64 **تفكير ناقد** استعمل خاصية القسمة للقوى، لكي تشرح السبب الذي يجعل القوة 0^0 غير معروفة.

65 أي من الأعداد التالية مكتوب على الصورة العلمية بشكل صحيح؟

$$\begin{array}{llll} \text{أ} & 11 \times 10^5 & \text{ب} & 58.5 \times 10^4 \\ \text{ج} & 0.245 \times 10^{-7} & \text{د} & 7.25 \times 10^0 \end{array}$$

66 أي مقدار يُساوي $(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)$ ؟

$$\begin{array}{llll} \text{أ} & 5^{-6} & \text{ب} & (-5)^{-6} \\ \text{ج} & (-5)^6 & \text{د} & -5^6 \end{array}$$

67 إذا كانت المتغيرات x و y و z مختلفة عن 0، أي مقدار يُساوي $\frac{x^4y^{-3}}{x^2z^0}$ ؟

$$\begin{array}{llll} \text{أ} & \frac{x^2}{yz} & \text{ب} & \frac{x^2z}{y^3} \\ \text{ج} & \frac{x^{-2}}{y^{-3}z} & \text{د} & \frac{x^2}{y^3} \end{array}$$

68 لاحظ أن $2^4 = 4^2$. إذا كان x و y عددين صحيحين موجبين يحققان $x < y$ ، أعط ثلاثة أمثلة عن قيم لهما بحيث $y^x < x^y$ وثلاثة أمثلة أخرى لقيم x و y بحيث $y^x < x^y$ ؟

نظرة إلى الوراء

اكتب كل معادلة تربيعية على الصورة العامة $ax^2 + bx + c = 0$ ، وحدد قيم a و b و c .

$$(2x-10)(x+1)=0 \quad 70$$

$$11x(5-x)=0 \quad 69$$

$$-(x+1)(3x-1)=0 \quad 72$$

$$4(x+5)(x-5)=0 \quad 71$$

حل كل معادلة.

$$(x-2)(x+3)=5 \quad 75$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \quad 74$$

$$x^2 + 5x = -6 \quad 73$$

أكمل كل مساواة. (الصفوف السابقة)

$$0 = \sqrt{7} + \square \quad 78$$

$$4 \times (-3 + \square) = -12 + 32 \quad 77$$

$$1 = \square \times \frac{1}{3} \quad 76$$

احسب قيمة كل مقدار. (الصفوف السابقة)

$$2x(9y - x^2) \quad \text{حيث } x = -3 \text{ و } y = 10 \quad 80$$

$$\frac{2mn}{n^2 - 2n + 5m} \quad \text{حيث } m = 3 \text{ و } n = -1 \quad 79$$

نظرة إلى الأمام

81 أعط مثالاً على معادلة لا تتضمن إلا أعداداً طبيعية، ويتطلب حلها أعداداً سالبة.

82 أعط مثالاً على معادلة لا تتضمن إلا أعداداً صحيحة، ويتطلب حلها أعداداً نسبية.



المقادير الجذرية

Radical Expressions

لماذا

تظهر الجذور غالباً في حسابات الإحصاء وحسابات الفيزياء. غير أنها تظهر أيضاً في نشاطات حياتية مثل الرصف.

الدرس

2

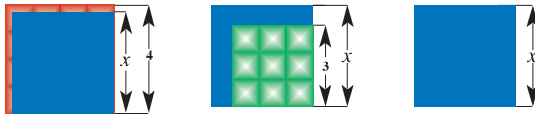
الأهداف

- نحسب قيمة مقدار يتضمن جذوراً.
- نكتب على أبسط صورة مقادير تتضمن جذوراً.

Estimating Square Root

تقدير الجذر التربيعي

مع فيصل مربع أزرق مساحته 12 وحدة مربعة. كيف تحدد طول ضلع المربع؟ تذكر أن قاعدة حساب مساحة المربع تسمح لك بكتابة $x^2 = 12$ حيث يرمز المتغير x إلى طول ضلع المربع الأزرق. إذا، طول ضلع المربع الأزرق هو الجذر التربيعي للعدد 12. بما أن 12 ليس عدداً مربعاً كاملاً، فإن عليك تقدير طول الضلع x . لاحظ أن 12 يقع بين العددين المربعين 9 و 16.



مساحة المربع الأزرق أقرب إلى 9 منه إلى 16. ينتج من ذلك أن ضلعه يقع بين 3 و 4. وبما أن مساحة المربع (12) هي أقرب إلى منتصف المساحة بين $3^2 = 9$ و $4^2 = 16$ من جهة 3، فمن المرجح أن يكون الضلع بين 3.4 و 3.5. احسب مربع الأعداد العشرية من رقمين بعد النقطة العشرية والواقعة بين 3.4 و 3.5.

$(3.43)^2 = 11.7649$	$3.42^2 = 11.6964$	$3.41^2 = 11.6281$	$3.4^2 = 11.56$
$(3.47)^2 = 12.0409$	$3.46^2 = 11.9716$	$3.45^2 = 11.9025$	$3.44^2 = 11.8336$
	$3.5^2 = 12.25$	$3.49^2 = 12.1801$	$3.48^2 = 12.1104$

إذا، أفضل تقدير للجذر التربيعي للعدد 12 هو 3.46، أي إن $\sqrt{12} \approx 3.46$.

الجذر التربيعي Square Root

إذا كان a عددًا حقيقيًا غير سالب، فإن له جذرين تربيعيين أحدهما موجب، ويكتب \sqrt{a} والآخر سالب ويكتب $-\sqrt{a}$. ويحقق هذان العددان الخاصية التالية

$$(\sqrt{a})(\sqrt{a}) = a \quad \text{و} \quad (-\sqrt{a})(-\sqrt{a}) = a$$

Simplifying Radical Expressions

تبسيط المقادير الجذرية

المقادير الجذرية **Radical Expressions** هي المقادير التي تتضمن جذورًا. عندما تريد أن تجمع مقادير جذرية أو تطرحها، تأكد من أن الأعداد الواقعة تحت رمز الجذر متساوية. مثلاً، تستطيع جمع المقدارين $2\sqrt{5}$ و $4\sqrt{5}$ فتحصل على $2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$.

مثال

بسط المقدار.

ب $5 + 6\sqrt{7} - 2\sqrt{7} - 3$

أ $5\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$

د $b\sqrt{x} + y\sqrt{x}$

ج $8\sqrt{3} + 6\sqrt{2} - \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

الحل

أ استعمل خاصية التوزيع لتجميع الحدود المتشابهة ثم احسب. العامل المشترك هو $\sqrt{6}$.

$$5\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = (5 - 2)\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

ب أعد ترتيب الحدود لتسهيل التبسيط.

$$5 + 6\sqrt{7} - 2\sqrt{7} - 3 = 5 - 3 + 6\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = 2 + 4\sqrt{7}$$

ج أعد ترتيب الحدود لتسهيل التبسيط.

$$8\sqrt{3} + 6\sqrt{2} - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 8\sqrt{3} - \sqrt{3} + 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 7\sqrt{3} + 8\sqrt{2}$$

د تعامل مع المتغيرات كما لو كانت أعدادًا.

$$b\sqrt{x} + y\sqrt{x} = (b + y)\sqrt{x}$$

ب $y + 2\sqrt{x} - 2y - 3\sqrt{x}$

أ $4\sqrt{6} - \sqrt{6}$ حاول بسط المقدار.

النشاط

Operations with Radical Expressions

المقادير الجذرية والعمليات

استعمل العلاقة بين الجذور والقوى، للقيام بالعمليات.

1. احسب $\sqrt{9 \times 16}$ بطريقتين.

$$\sqrt{9 \times 16} = \sqrt{9} \times \sqrt{16} = ? \quad \boxed{\text{ب}} \quad \sqrt{9 \times 16} = \sqrt{144} = ? \quad \boxed{\text{أ}}$$

2. أعطِ ثلاثة أمثلة تؤكد أن العلاقة $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ صحيحة.

3. احسب $\sqrt{9+16}$ و $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ وقارن النتيجة.

4. أعطِ ثلاثة أمثلة تبيّن أن $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ليست دائماً صحيحة.

نقطة مراقبة ✓

ضرب الجذور التربيعية Multiplying Square Roots

أيّ ما يكن العدداً الحقيقيين غير السالبيين a و b ، فإن:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

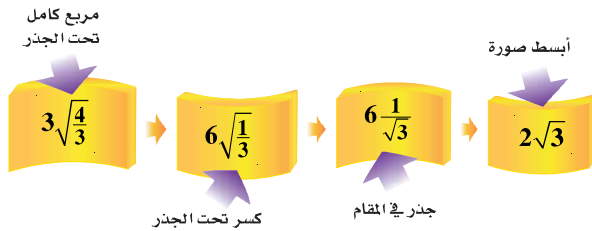
إن التعامل مع المقادير الجذرية المبسّطة أسهل من التعامل مع المقادير غير المبسّطة. يكون المقدار الجذري على أبسط صورة **Simplist form** إذا توفّرت فيه الشروط التالية:

1. عدم وجود مربع كامل بين عوامل العدد الواقع تحت رمز الجذر.

2. عدم وجود كسر أو كسور تحت رمز الجذر.

3. عدم وجود جذور في مقام أي كسر يشكل جزءاً من المقدار.

(تذكّر تنسيب المقام)



مثال

2 اكتب المقدار على أبسط صورة.

$$\sqrt{a^5 b^{10}} \quad \boxed{\text{د}}$$

$$\sqrt{a^2} \quad \boxed{\text{ج}}$$

$$\sqrt{400} \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$\sqrt{12} \quad \boxed{\text{أ}}$$

الحل

ابحث عن المربعات الكاملة بين العوامل **Factors**، واستعمل خاصية ضرب الجذور التربيعية.

بسّط الجذور التربيعية لهذه المربعات. اترك العوامل الأخرى.

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \quad \boxed{\text{أ}}$$

$$\sqrt{400} = \sqrt{4} \times \sqrt{100} = 2 \times 10 = 20 \quad \boxed{\text{ب}}$$

بما أن رمز الجذر التربيعي يدلّ على الجذر غير السالب، فإن $\sqrt{a^2}$ غير سالب. استعمل رمز المطلق للدلالة على ذلك عندما يكون الأس المتغيّر تحت رمز الجذر زوجياً، ويصبح خارج الرمز، بعد التبسيط، فردياً.

$$\sqrt{a^2} = |a^1| = |a| \quad \boxed{\text{ج}}$$

$$\sqrt{a^5 b^{10}} = \sqrt{a(a^2)^2 (b^5)^2} = a^2 |b^5| \sqrt{a} \quad \boxed{\text{د}}$$

حاول

اكتب المقدار على أبسط صورة $\sqrt{72m^2n^5}$.

تفكير ناقد

لماذا لا يعتبر استعمال رمز المطلق ضرورياً فيما يلي:

$$\sqrt{b^4} = b^2 \quad \boxed{\text{ب}} \quad \sqrt{b^3} = b\sqrt{b} \quad \boxed{\text{أ}}$$

مثال 3

اكتب المقدار على أبسط صورة.

$$\sqrt{3} \times \sqrt{6} \quad \boxed{\text{ب}} \quad (5\sqrt{3})^2 \quad \boxed{\text{أ}}$$

$$(3-\sqrt{2})(4+\sqrt{2}) \quad \boxed{\text{د}} \quad \sqrt{2}(6+\sqrt{12}) \quad \boxed{\text{ج}}$$

الحل

أ تذكر أن مربع عدد هو ناتج ضرب هذا العدد في نفسه. طبق هذه الفكرة، ثم أعد ترتيب العوامل قبل الضرب.

$$(5\sqrt{3})^2 = (5\sqrt{3})(5\sqrt{3}) = (5 \times 5)(\sqrt{3} \times \sqrt{3}) = 25 \times 3 = 75$$

ب استعمل خاصية ضرب الجذور. حلّ ناتج الضرب الواقع تحت رمز الجذر ثم بسّط.

$$\sqrt{3} \times \sqrt{6} = \sqrt{3 \times 6} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

ج استعمل خاصية التوزيع لكي تضرب وتحلّ وتبسط.

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(6+\sqrt{12}) &= 6\sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{12} = 6\sqrt{2} + \sqrt{2 \times 12} \\ &= 6\sqrt{2} + \sqrt{24} = 6\sqrt{2} + \sqrt{6 \times 4} = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$(3-\sqrt{2})(4+\sqrt{2}) = 12 + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 2 = 10 - \sqrt{2} \quad \boxed{\text{د}}$$

حاول

اكتب المقدار على أبسط صورة. $(2\sqrt{7})^2$ $\boxed{\text{أ}}$ $\sqrt{2}(4-\sqrt{8})$ $\boxed{\text{ب}}$

Dividing Square Roots قسمة الجذور التربيعية

أيًا يكن العددين الحقيقيين الموجبان a و b فإن

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

مثال

4

اكتب المقدار على أبسط صورة.

$$\sqrt{\frac{9}{5}} \quad \text{د}$$

$$\sqrt{\frac{a^2b^3}{c^2}} \quad \text{ج}$$

$$\sqrt{\frac{7}{16}} \quad \text{ب}$$

$$\sqrt{\frac{16}{25}} \quad \text{أ}$$

الحل

اكتب كل جذر تربيعي بعد استعمال خاصية قسمة الجذور. اكتب على أبسط صورة كلاً من البسط والمقام على حدة.

$$\sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \text{ب}$$

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} \quad \text{أ}$$

$$\sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \quad \text{د}$$

$$\sqrt{\frac{a^2b^3}{c^2}} = \frac{|a|b\sqrt{b}}{|c|} \quad \text{ج}$$

إن مقام الجواب الأخير يتضمن جذراً. فإذا أردت التخلص منه، اضرب المقدار في $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ الذي يساوي 1.

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

تُسمى عملية التخلص من الجذر في المقام تنسيب المقام.

$$\sqrt{\frac{ab^2}{c}} \quad \text{ج}$$

$$\sqrt{\frac{4}{3}} \quad \text{ب}$$

$$\sqrt{\frac{4}{24}} \quad \text{أ}$$

حاول اكتب المقدار على أبسط صورة.

التمارين

● التوصل في الرياضيات

- 1 أوضِّح كيف تستعمل ورقة المربعات لتحديد الجذر التربيعي للعدد 16 (مربع كامل).
- 2 أوضِّح كيف تستعمل ورقة المربعات لتقدير الجذر التربيعي للعدد 19 (ليس مربعاً كاملاً).
- 3 أوضِّح كيف تقدِّر $\sqrt{7}$ من دون استعمال الحاسبة أو ورقة المربعات.
- 4 كيف تستعمل التحليل لتبسيط مقدار جذري كالمقدار $5\sqrt{90x^3y^4}$ ؟
- 5 ما الصورة الأبسط لمقدار جذري ؟

● تمارين موجّهة

احسب الجذر التربيعي.

$$\sqrt{36} \quad 6 \quad -\sqrt{64} \quad 7 \quad \pm\sqrt{81} \quad 8 \quad -\sqrt{121} \quad 9$$

اكتب المقدار على أبسط صورة.

$$8\sqrt{3}-6\sqrt{3} \quad 10 \quad 9+3\sqrt{7}-5\sqrt{7}+4 \quad 11$$

اكتب المقدار على الصورة الأبسط.

$$\sqrt{32} \quad 12 \quad \sqrt{x^2y^7} \quad 13 \quad \sqrt{27x^2} \quad 14 \quad \sqrt{a^7b^3} \quad 15$$

اكتب المقدار على أبسط صورة.

$$(7\sqrt{11})^2 \quad 16 \quad \sqrt{2} \times \sqrt{10} \quad 17 \quad (5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3}) \quad 18 \quad \sqrt{\frac{6}{49}} \quad 20 \quad \sqrt{\frac{225}{18}} \quad 21 \quad \sqrt{\frac{x^7y^1}{z^3}} \quad 22$$

● تمارين وتطبيقات

احسب الجذر التربيعي. إذا كان الجذر التربيعي غير نسبي، قرِّبه إلى أقرب جزء من مئة.

$$\sqrt{225} \quad 23 \quad -\sqrt{169} \quad 24 \quad -\sqrt{11} \quad 25 \quad \sqrt{\frac{4}{9}} \quad 26 \quad -\sqrt{40} \quad 27 \quad \sqrt{0.059} \quad 32 \quad -\sqrt{0.04} \quad 31 \quad \sqrt{10000} \quad 30 \quad \sqrt{1000} \quad 29 \quad -\sqrt{27} \quad 28$$

اكتب على أبسط صورة باستعمال التحليل.

$$\sqrt{192} \quad \text{37} \quad \sqrt{3600} \quad \text{36} \quad \sqrt{576} \quad \text{35} \quad \sqrt{196} \quad \text{34} \quad \sqrt{49} \quad \text{33}$$

$$\sqrt{648} \quad \text{42} \quad \sqrt{264} \quad \text{41} \quad \sqrt{1620} \quad \text{40} \quad \sqrt{98} \quad \text{39} \quad \sqrt{75} \quad \text{38}$$

افترض أن كلا من a و b يدلّ على عدد موجب، اذكر إن كانت الجملة صحيحة أو لا.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{45} \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \text{44} \quad \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{43}$$

اكتب المقدار على أبسط صورة.

$$\sqrt{54} \times \sqrt{6} \quad \text{49} \quad \sqrt{48} \times \sqrt{3} \quad \text{48} \quad \sqrt{8} \times \sqrt{18} \quad \text{47} \quad \sqrt{3} \times \sqrt{12} \quad \text{46}$$

$$\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}} \quad \text{53} \quad \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}} \quad \text{52} \quad \sqrt{\frac{96}{2}} \quad \text{51} \quad \sqrt{\frac{64}{16}} \quad \text{50}$$

$$\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{8}} \quad \text{57} \quad \sqrt{\frac{56}{8}} \quad \text{56} \quad \sqrt{98} \times \sqrt{14} \quad \text{55} \quad \sqrt{5} \times \sqrt{15} \quad \text{54}$$

اكتب المقدار على أبسط صورة، مفترضاً جميع المتغيرات غير سالبة، وجميع المقامات مختلفة عن 0.

$$\sqrt{\frac{x^3}{y^6}} \quad \text{61} \quad \sqrt{\frac{a^6}{b^{10}}} \quad \text{60} \quad \sqrt{x^8 y^9} \quad \text{59} \quad \sqrt{a^4 b^6} \quad \text{58}$$

نفذ العمليات الممكنة واكتب الجواب على أبسط صورة.

$$\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} \quad \text{64} \quad 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5} \quad \text{63} \quad 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} \quad \text{62}$$

$$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{10}}{\sqrt{5}} \quad \text{67} \quad \frac{6 + \sqrt{18}}{3} \quad \text{66} \quad (4 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{2}) \quad \text{65}$$

اكتب كل مقدار على أبسط صورة.

$$\sqrt{12} \times \sqrt{6} \quad \text{70} \quad (4\sqrt{25})^2 \quad \text{69} \quad (3\sqrt{5})^2 \quad \text{68}$$

$$\sqrt{5}(6 - \sqrt{15}) \quad \text{73} \quad 3(9 + \sqrt{5}) \quad \text{72} \quad \sqrt{72} \times \sqrt{32} \quad \text{71}$$

$$(\sqrt{3} - 4)(\sqrt{3} + 2) \quad \text{76} \quad (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) \quad \text{75} \quad \sqrt{6}(6 + \sqrt{18}) \quad \text{74}$$

$$\sqrt{5}(\sqrt{5} - 4)^2 \quad \text{79} \quad \sqrt{12}(\sqrt{3} + 8)^2 \quad \text{78} \quad \sqrt{3}(\sqrt{3} + 2)^2 \quad \text{77}$$

تحد

ربط

هندسة حدّ طول ضلع مربع مساحته:

28m² 82

144m² 81

250m² 80

83 حقائق أمام بيت هاني حديقة مربعة الشكل مساحتها 676m². ما طول ضلعها؟

تطبيقات

نظرة إلى الوراء

اكتب كل مقدار على أبسط صورة.

$$\left(\frac{20x^3}{-4x^2}\right)^3$$
 86

$$\frac{x^5y^7}{x^2y^3}$$
 85

$$(-a^2b^2)^3(a^4b^2)^3$$
 84

اضرب.

$$(6b+1)(3b-1)$$
 89

$$(3d+5)(2d-6)$$
 88

$$(2x-4)(2x-4)$$
 87

نظرة إلى الأمام

تُستعمل القوى ذات الأس النسبي للتعبير عن الجذور فتكتب $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ حيث a عدد حقيقيغير سالب، و n عدد صحيح لا يقل عن 2. مثلاً:

$$\sqrt[3]{27} = 3 \text{ لأن } 3^3 = 27 \text{ و } \sqrt[4]{16} = 2 \text{ لأن } 2^4 = 16$$

استعمل قوانين القوى لكتابة المقادير على أبسط صورة. مثال على ذلك:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5 \left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \left(x^{\frac{5}{2}}\right) \left(x^{\frac{3}{2}}\right) = x^{\frac{8}{2}} = x^4$$

اكتب على أبسط صورة.

$$(xy)^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^6 \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2$$
 91

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4 \left(x^5\right)^{\frac{1}{3}}$$
 90

$$\left(x^3y^{\frac{3}{2}}\right)^6 (xy)^{\frac{1}{2}}$$
 92

اللوغاريتمات

Logarithms



لماذا
تستعمل اللوغاريتمات بشكل
واسع في القياسات مثل قياس
pH لتحديد حموضة
محلول.

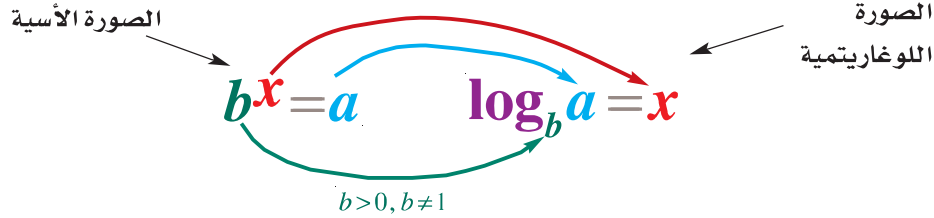
الدرس 3

الأهداف

- نحول بين الصورة الأسية والصورة اللوغاريتمية.
- نكتب مقداراً لوغاريتمياً على أبسط صورة ونحسب قيمته.

مع تطور التجارة وتحسّن الملاحة، نشأت عمليات حسابية معقدة وأصبحت الحاجة ماسة إلى طرائق حسابية أفضل وتتطلب مجهوداً أقل من التي كانت متداولة. جاء اكتشاف اللوغاريتمات في الرياضيات فكانت الدوال اللوغاريتمية وتطبيقاتها في الاقتصاد والإحصاء وغيرهما من الميادين ضرورة ملحة.

اللوغاريتم هو العملية العكسية للقوى. فكما أن الطرح يعاكس الجمع فإن اللوغاريتم يعاكس القوى.



مثلاً الكتابة $\log_{10} 100 = 2$ تكافئ الكتابة $10^2 = 100$.

اقرأ $\log_b a$ كما يلي: لوغاريتم a للأساس b .

التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية وبالعكس.

الصورة الأسية	الأساس	الأس	الصورة اللوغاريتمية
$2^6 = 64$	2	6	$\log_2 64 = 6$
$7^2 = 49$	7	2	$\log_7 49 = 2$
$3^5 = 243$	3	5	$\log_3 243 = 5$
$5^3 = 125$	5	3	$\log_5 125 = 3$

اللوغاريتم Logarithm

نقول إن العدد الحقيقي x هو لوغاريتم العدد الموجب a بأساس b ($b \neq 1$) ونكتب $x = \log_b a$ ، إذا كان $b^x = a$.

مثال 1

حوّل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية .

$$2^5 = 32 \quad \boxed{\text{أ}} \quad 3^2 = 9 \quad \boxed{\text{ب}} \quad 4^3 = 64 \quad \boxed{\text{ج}} \quad 5^0 = 1 \quad \boxed{\text{د}}$$

الحل

$$2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5 \quad \boxed{\text{أ}}$$

$$3^2 = 9 \Leftrightarrow \log_3 9 = 2 \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$4^3 = 64 \Leftrightarrow \log_4 64 = 3 \quad \boxed{\text{ج}}$$

$$5^0 = 1 \Leftrightarrow \log_5 1 = 0 \quad \boxed{\text{د}}$$

حاول

حوّل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية .

$$2^{10} = 1024 \quad \boxed{\text{أ}} \quad 5^1 = 5 \quad \boxed{\text{ب}} \quad 100^0 = 1 \quad \boxed{\text{ج}}$$

مثال 2

حوّل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية .

$$\log_{10} 1000 = 3 \quad \boxed{\text{أ}} \quad \log_9 81 = 2 \quad \boxed{\text{ب}} \quad \log_5 125 = 3 \quad \boxed{\text{ج}} \quad \log_{10} 1 = 0 \quad \boxed{\text{د}}$$

الحل

$$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1000 \quad \boxed{\text{أ}}$$

$$\log_9 81 = 2 \Leftrightarrow 9^2 = 81 \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$\log_5 125 = 3 \Leftrightarrow 5^3 = 125 \quad \boxed{\text{ج}}$$

$$\log_{10} 1 = 0 \Leftrightarrow 10^0 = 1 \quad \boxed{\text{د}}$$

حاول

اكتب $\log_{10} 0.01 = -2$ على الصورة الأسية .

مثال 3

حوّل من صورة إلى أخرى .

$$6^2 = 36 \quad \boxed{\text{أ}} \quad 5^{-3} = \frac{1}{125} \quad \boxed{\text{ب}} \quad \log_{27} \frac{1}{9} = -\frac{2}{3} \quad \boxed{\text{ج}} \quad \log_{10} 10\sqrt{10} = \frac{3}{2} \quad \boxed{\text{د}}$$

الحل

$$6^2 = 36 \Leftrightarrow \log_6 36 = 2 \quad \boxed{\text{أ}}$$

$$5^{-3} = \frac{1}{125} \Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{125} = -3 \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$\log_{27} \frac{1}{9} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{9} \quad \boxed{\text{ج}}$$

$$\log_{10} 10\sqrt{10} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10} \quad \boxed{\text{د}}$$

حاول حوّل من صورة إلى أخرى.

$$\log_5 25\sqrt{5} = \frac{5}{2} \quad \boxed{\text{ج}} \quad \log_4 \frac{1}{16} = -2 \quad \boxed{\text{ب}} \quad 7^2 = 49 \quad \boxed{\text{أ}}$$

حوّل من صورة إلى أخرى.

$$\log_a 1 \quad \boxed{\text{د}} \quad \log_a a \quad \boxed{\text{ج}} \quad \log_3 3\sqrt{3} \quad \boxed{\text{ب}} \quad \log_2 \frac{1}{16} \quad \boxed{\text{أ}}$$

الحل

$$\boxed{\text{أ}} \quad \text{إذا كان } x = \log_2 \frac{1}{16} \text{ فإن } 2^x = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4} \text{ وبالتالي } x = -4.$$

$$\boxed{\text{ب}} \quad \text{إذا كان } x = \log_3 3\sqrt{3} \text{ فإن } 3^x = 3\sqrt{3} = 3^1 \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \text{ وبالتالي } x = \frac{3}{2}.$$

$$\boxed{\text{ج}} \quad \text{إذا كان } x = \log_a a \text{ فإن } a^x = a \text{ وبالتالي } x = 1.$$

$$\boxed{\text{د}} \quad \text{إذا كان } x = \log_a 1 \text{ فإن } a^x = 1 = a^0 \text{ وبالتالي } x = 0.$$

حاول احسب قيمة كل مقدار.

$$\log_x x \quad \boxed{\text{د}} \quad \log_{10} 0.001 \quad \boxed{\text{ج}} \quad \log_2 \frac{1}{8} \quad \boxed{\text{ب}} \quad \log_{10} 10000 \quad \boxed{\text{أ}}$$

تفكير ناقد

1. لماذا $\log_a a$ يساوي 1 دائماً ؟
2. متى تكون $\log_a b = \log_b a$ ؟ أوضح ذلك.
3. هل يوجد لوغاريتم لعدد سالب ؟ أوضح ذلك.

تذكّر

$$\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

Logarithm properties

خصائص اللوغاريتمات

بما أن اللوغاريتم هو عكس القوى، فكل خاصية من خصائص القوى تتحول إلى خاصية من خصائص اللوغاريتم.

Logarithm properties

خصائص اللوغاريتم

أيًا تكن الأعداد الحقيقية الموجبة a و b و c حيث $c \neq 1$

في الجبر	مع الأعداد	بالكلمات
$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$	$\log_2 32 = \log_2 (4 \times 8)$ $= \log_2 4 + \log_2 8$	لوغاريتم ناتج ضرب عددين هو مجموع لوغاريتمَي العددين.
$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$	$\log_7 \frac{16}{3} = \log_7 16 - \log_7 3$	لوغاريتم ناتج قسمة عدد على آخر هو ناتج طرح لوغاريتم المقسوم عليه من لوغاريتم المقسوم.
$\log_c a^b = b \log_c a$	$\log_{10} 7^3 = 3 \log_{10} 7$	لوغاريتم قوة عدد موجب هو ناتج ضرب أس القوة في لوغاريتم العدد.
$\log_c 1 = 0$	$\log_{10} 1 = 0$	لوغاريتم 1 هو 0 أيًا يكن أساس اللوغاريتم.
$\log_a a = 1$	$\log_{10} 10 = 1$	لوغاريتم a بأساس a هو 1.

اكتب كل مقدار على أبسط صورة.

5

مثال

- أ $\log_5 75$
- ب $\log_4 2 + \log_4 32$
- ج $\log_5 500 - \log_5 4$
- د $\log_{10} 80 - \log_{10} 40 + \log_{10} 30 - \log_{10} 6$

الحل

أ $\log_5 75 = \log_5 (3 \times 25) = \log_5 3 + \log_5 25 = \log_5 3 + \log_5 5^2 = \log_5 3 + 2$

ب $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4 (2 \times 32) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3 \log_4 4 = 3$

ج $\log_5 500 - \log_5 4 = \log_5 \frac{500}{4} = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

د $\log_{10} 80 - \log_{10} 40 + \log_{10} 30 - \log_{10} 6 = \log_{10} \frac{80 \times 30}{40 \times 6} = \log_{10} 10 = 1$

حاول اكتب المقدار $\log_9 3 + \log_9 81$ على أبسط صورة.

مثال

حل كل معادلة

6

$$\log_2 x + \log_2 3 = \log_2 12 \quad \text{أ}$$

$$\log_{10}(2x+3)=1 \quad \text{ب}$$

الحل

$$\log_2 x + \log_2 3 = \log_2 12 \quad \text{أ}$$

$$\log_2 3x = \log_2 12$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

$$\log_{10}(2x+3)=1 \quad \text{ب}$$

$$\log_{10}(2x+3)=\log_{10} 10$$

$$2x+3=10$$

$$x=3.5$$

حاول حل المعادلة $\log_5 n + \log_5 7 = \log_5 35$

التمارين

التواصل في الرياضيات

1 اشرح العلاقة بين أساس القوة وأساس اللوغاريتم.

تمارين موجّهة

2 ما الذي يقابل الأس في اللوغاريتم؟

حوّل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية.

$$\log_8 2 = \frac{1}{3} \quad \text{4}$$

$$\log_3 9 = 2 \quad \text{3}$$

حوّل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية.

$$7^0 = 1 \quad \text{6}$$

$$3^4 = 81 \quad \text{5}$$

تمارين وتطبيقات

حوّل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية.

$$\log_{10} 0.01 = -2 \quad \text{8}$$

$$\log_a a = 1 \quad \text{7}$$

حوّل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية.

$$10^{-3} = 0.001 \quad \text{10}$$

$$7^1 = 7 \quad \text{9}$$

احسب كل مقدار.

$$\log_9 9 \quad \text{14}$$

$$\log_{10} 0.00001 \quad \text{13}$$

$$\log_2 128 \quad \text{12}$$

$$\log_2 8 \quad \text{11}$$

اكتب على أبسط صورة.

$$\log_{10} 12 + \log_{10} \frac{2}{3} - \log_{10} \frac{8}{10} \quad \text{16}$$

$$\log_2 4 + \log_2 8 - \log_2 32 \quad \text{15}$$

بيّن أن:

$$\log_{10} 100 + \log_{10} 18 - \log_{10} 6 - \log_{10} 3 = 2 \quad \text{17}$$

$$\log_a 5 + \log_a 21 - \log_a 7 = \log_a 15 \quad \text{18}$$

حلّ كلّاً من المعادلات التالية:

$$\log_2 (2x+1) = 2 \quad \text{21} \quad \log_3 \left(x + \frac{1}{5}\right) = -2 \quad \text{20} \quad \log_3 (2x+3) = 3 \quad \text{19}$$

22 تفكير ناقد ما قيمة b إذا كان $\log_a b = 0$ ؟ أوضّح ذلك.

23 تفكير ناقد إذا كان n عدداً صحيحاً موجيماً هل تستطيع أن تحسب $\log_{10} 10^n$ بتعداد الأصفار في كتابة 10^n ؟ أوضّح ذلك.

24 تفكير ناقد هل يُمكنك أن تشرح السبب الذي يمنع حساب $\log_0 3$ و $\log_1 3$ ؟ أوضّح ذلك.

25 بيّن أن $\log_7 7^{2x+3} = 2x+3$. برّر كل خطوة.

نظرة إلى الوراء

حلّ كل مقدار.

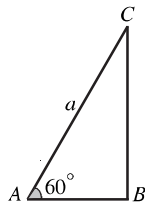
$$2x^2 - 11x - 6 \quad \text{28} \quad a^6 - 64 \quad \text{27} \quad x^3 + 5x^2 + 6x \quad \text{26}$$

حلّ كل معادلة بالطريقة المناسبة.

$$3x^2 - 12x + 12 = 0 \quad \text{31} \quad x^2 + x - 42 = 0 \quad \text{30} \quad x^2 - 11x - 6 = 0 \quad \text{29}$$

نظرة إلى الأمام

32 احسب طول القطعة المستقيمة BC .



الاحتمالات

Probabilities

الفصل

3

حساب الاحتمالات فرع من فروع الرياضيات،
يُعنى بدراسة الظواهر العشوائية أو الظواهر
التي لا يمكن تحديد نتائجها مسبقاً.

يشير احتمال الحدث إلى إمكانية وقوعه، أو
تحققه. وفي حين أن هناك أحداثاً يكون احتمالُ
وقوعها صغيراً أو مستحيلاً، نجد أحداثاً يكونُ
احتمالُ وقوعها كبيراً أو مؤكّداً. سوف تستعمل
في هذا الفصل قانون العد الأساسي لتحديد عدد
النتائج الممكنة لتجربة عشوائية، أو النتائج
التي تُعبّر عن وقوع حدث ما.

للاحتمال استعمالات كثيرة، تجدها لدى شركات
التأمين، ومؤسسات الأبحاث كالبحث الطبي
وسواه، وفي تطبيق القوانين،
وفي العلوم السياسية.

الدروس

1. مدخل إلى الاحتمال
2. الاحتمال
3. قانون العد الأساسي
4. التباديل والترتيبات

والتوافيق



مدخل إلى الاحتمال

Indroduction To Probability



لماذا

غالبًا ما تُدرس الاحتمالات
باستعمال أشياء من الحياة اليومية
مثل حجر النرد وقطع النقود المعدنية
والأسهم.

الأهداف

- نميِّز مفردات الاحتمال واستعمالها بشكل صائب.
- نحدّد مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية.
- نحدّد النتائج الممكنة التي تؤلّف حدثًا.

كثيرًا ما نسمع كلمة احتمال، أو نستعملها في حياتنا اليومية. قد تسمع مدرس الرياضيات يقول إن احتمال نجاح زيد في اختبار الرياضيات هو 80%، وقد تسمع مقدّم نشرة الأحوال الجوية يقول إن احتمال سقوط المطر في يوم الغد هو 50%. وقد يقول قائل إن شركة التأمين ستريح هذا العام بشكل أكيد، وآخر يقول إن من المستحيل تساقط الثلوج في أربيل خلال شهر آب.

ماذا تتناول هذه الجمل؟ إنها تتناول أحداثًا لا نعرف تمامًا إن كانت ستقع أم لا، أو أحداثًا ستقع حتمًا أو لن تقع على الإطلاق.

تخصّص الرياضيات فرعًا من فروعها لدراسة هذه الأمور. إنه حساب الاحتمالات.

تعلم ولا شك أن العلماء يقومون بتجارب علمية كالتجارب الفيزيائية أو الكيميائية، وسواهما. قد يتدخل الإنسان في نتائج هذه التجارب من خلال ضبط موادها وشروطها. وقد يعرف العالم مسبقًا النتائج التي ستتوصل إليها. غير أن هناك تجارب أخرى لا نستطيع أن نحدّد مسبقًا نتائجها. فعندما ترمي حجر نرد صحيح لا نستطيع أن تحدد العدد الذي سيظهر على وجهه العلوي. وعندما ترمي قطعة نقود معدنية، لا نستطيع أن تحدّد سلفًا إن كنت ستحصل على الصورة أو على الكتابة. تُسمّى الواحدة من هذه التجارب تجربة عشوائية.

بدأت نظرية الاحتمال بالبروز في القرن السابع عشر مع عالمين كبيرين من علماء الرياضيات هما فيرما Fermat (1601 – 1665) و باسكال Pascal (1623 – 1662). وقد تطورت هذه النظرية عبر العصور حتى أصبحت اليوم فرعًا كاملاً من فروع الرياضيات يؤدّي، مع الإحصاء، دورًا مهمًا في الحياة العصرية، ويُستعمل في العديد من العلوم الأخرى من الفيزياء إلى الكيمياء إلى الأحياء إلى الطب إلى الاقتصاد والتجارة والتأمينات وغيرها.

Definitions

تعريفات

سوف نتعرّف في هذا الدرس على مفردات الاحتمال، ونتعلم كيفية استعمالها بشكل سليم. سوف نستعمل عملية إلقاء حجر النرد لإعطاء أمثلة توضح التعريفات.

المفردة	التعريف	مثال
الفعل العشوائي Trial	فعل لا نستطيع تحديد نتيجته مسبقاً.	رمي حجر النرد.
التجربة العشوائية Random Experiment	فعل عشوائي أو تكرار فعل عشوائي.	رمي حجر النرد 3 مرّات.

فضاء العيّنة Sample Space	مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية.	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
الحدث Event	مجموعة تتألف من نتيجة ممكنة أو من عدة نتائج ممكنة.	ظهور عدد زوجي ظهور عدد أولي

رمي خسرو حجر نرد مرة واحدة. اكتب، على صورة مجموعة، الأحداث التالية:

مثال 1



أ : ظهور عدد فردي. A

ب : ظهور عدد أولي. B

ج : ظهور عدد لا يقل عن 5. C

د : ظهور عدد أولي أو 4. D

الحل

أ : $A = \{1, 3, 5\}$

ب : $B = \{2, 3, 5\}$

ج : $C = \{5, 6\}$

د : $D = \{2, 3, 5, 4\}$

حاول اكتب الحدث الذي يتمثل في ظهور عدد يقبل القسمة على 3.



رمت شيرين قطعة نقود معدنية مرتين. اكتب فضاء العيّنة.

الحل

إذا رمزنا بالحرف T إلى الصورة وبالحرف H إلى الكتابة، فإن مجموعة النتائج هي: $\{(T, T), (T, H), (H, T), (H, H)\}$.

حاول اكتب الحدث الذي يتمثل في حصول شيرين على الوجه نفسه في المرتين.

ملاحظة: عند استخدامنا، مثلاً، عدداً لا يقل عن 12، فإننا نقصد من العدد 12 فما فوق؛ وعدداً لا يزيد عن 12، فإننا نقصد من العدد 12 فما دون.

تحديد

اكتب فضاء العينة في حال رمي شيرين لقطعة النقود 3 مرات.

مثال 3

سحبت سعاد كرة من صندوق يحتوي على 5 كرات متماثلة، اثنتان منها حمراء وثلاث خضراء. اكتب فضاء العينة.

الحل

سوف نرمز إلى الكرتين الحمراءوين بـ R_1 و R_2 وإلى الكرات الخضراء بـ G_1 و G_2 و G_3 . فضاء العينة هو $\{R_1, R_2, G_1, G_2, G_3\}$.

حاول

سحب يوسف كرة من صندوق يحتوي على 10 كرات متماثلة، 4 منها حمراء و 6 خضراء. اكتب فضاء العينة.

مثال 4

رمت شوني حجرَي نرد أحدهما أحمر اللون والثاني أزرق اللون. ما فضاء العينة لهذه التجربة العشوائية؟ وما الحدث الذي يتمثل بظهور عددين مجموعهما 10؟

الحل

1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6
2	1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6
3	1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6
4	1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6
5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6
6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6

يتألف فضاء العينة، كما يبيّنه الشكل المقابل، من 36 عنصراً، كل منها زوج مرتّب يبيّن العدد الظاهر على النرد الأحمر، والعدد الظاهر على النرد الأزرق. أما الحدث فيتألف من 3 عناصر هي العناصر المحوطة في الشكل المقابل.

حاول

اكتب الحدث الذي يتمثل في الحصول على مجموع يساوي 14 .

مثال 5

رمى أسعد حجر النرد مرة واحدة. اكتب الأحداث التالية:

1. A : ظهور عدد فردي.
2. B : ظهور عدد أكبر من 5.
3. C : ظهور عدد صغر من 1.
4. D : ظهور رقم أصغر من 8.

الحل

1. $A = \{1, 3, 5\}$
2. $B = \{6\}$
3. $B = \{ \} = \phi$
4. $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

حاول

اكتب الحدث الذي يتمثل بظهور عدد يقل عن 6 ولا يقل عن 2. سنستعين بنتائج المثال السابق لإدخال بعض التعريفات.

المفردة	التعريف	مثال
الحدث البسيط Simple event	حدث يضم نتيجة ممكنة واحدة من فضاء العينة.	$B = \{6\}$
الحدث المركب Complex event	حدث يضم أكثر من نتيجة ممكنة من فضاء العينة.	$A = \{1, 3, 5\}$
الحدث المستحيل Impossible event	حدث لا يضم أي نتيجة ممكنة.	$C = \{ \} = \emptyset$
الحدث المؤكد Certain event	حدث يضم جميع النتائج الممكنة.	الحدث $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
حدثان متنافيان Mutually exclusive events	حدثان لا يضمّان أي نتيجة ممكنة مشتركة.	الحدثان $A = \{1, 3, 5\}$ و $B = \{6\}$

حاول اذكر حدثين متنافيين في تجربة رمي حجر نرد.

Complement of an event

الحدث المتمم

إذا تحقق حدث من حدثين متنافيين، فإن الآخر لا يتحقق. غير أن هذا لا يضمن أن أحدهما سيتحقق حكماً. فالحادثان $A = \{1, 3, 5\}$ و $B = \{6\}$ ، عند رمي النرد، هما حدثان متنافيان بالرغم من أنه لن يتحقق أي منهما بالضرورة (إذا ظهر العدد 2 مثلاً).
نقول عن حدث A أنه الحدث المتمم Complement للحدث B ، إذا كان A يتألف من جميع النتائج الممكنة التي لا تنتمي إلى B . هذا يعني أن الحادثين متنافيان، وأن أحدهما سيتحقق حكماً. نستعمل الرمز \bar{B} للدلالة على الحدث المتمم للحدث B .

عند رمي حجر نرد، ما الحدث المتمم للحدث A الذي يتمثل في ظهور عدد فردي؟

6

مثال

الحل

فضاء العينة هو $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ والحدث هو $A = \{1, 3, 5\}$. الحدث المتمم هو $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$. إنه ظهور عدد زوجي.

حاول عند رمي حجري نرد من لونين مختلفين، ما الحدث المتمم للحدث A الذي يتمثل في ظهور عددَيْن مجموعهما يزيد على 10؟

يُمكننا تشكيل أحداث جديدة انطلاقاً من أحداث لدينا. فإذا كان A و B حدثين في تجربة عشوائية فإننا نرمز بـ $A \cap B$ إلى الحدث « A و B » الذي يتحقق فقط إذا تحقق الحادثان معاً. كما نرمز بـ $A \cup B$ إلى الحدث « A أو B » الذي يتحقق فقط إذا تحقق أحد الحدثين على الأقل.

مثال

رميت حجر نرد مرة واحدة. استعمل الحدثين $A = \{1, 3, 5\}$ و $B = \{2, 3, 4\}$. اكتب كلاً من الأحداث التالية:

1. \bar{A}

2. $A \cup B$

3. $A \cap B$

الحل

1. $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$

2. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

3. $A \cap B = \{3\}$

التمارين

التواصل في الرياضيات

1 ماذا يعني لك كل من الرمز \cap و \cup ؟ استعملهما في مثال يتضمن أحداثاً.

2 كيف تجد $A \cup B$ و $A \cap B$ إذا كان $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$ ؟

تمارين موجهة

3 يحتوي صندوق على 5 أقراص متشابهة، 3 منها سوداء واثنتان أبيضتان. اكتب فضاء العينة العائدة إلى كل تجربة عشوائية.

أ سحب قرص واحد ب سحب قرصين ج سحب 3 أقراص

4 رمى طلال قطعة نقود معدنية 3 مرات متتالية. اكتب فضاء العينة لهذه التجربة.

5 وُضعت في كيس غير شفاف 5 قطع من الورق تحمل الأعداد من 1 إلى 5. تم سحب ورقة واحدة بشكل عشوائي. ارمز بـ A إلى الحدث المتمثل بحمل الورقة المسحوبة عدداً لا يقل عن 4، و بـ B إلى الحدث المتمثل بحمل الورقة المسحوبة عدداً لا يقل عن 3. اكتب الأحداث التالية: $\bar{A} \cap \bar{B}$ ، $A \cap B$ ، $A \cup B$ ، \bar{A} ، B ، A .

6 عند رمي حجر نرد، رمز غازي بـ A إلى الحدث «ظهور عدد زوجي»، و بـ B إلى الحدث «ظهور عدد أولي»، و بـ C إلى الحدث «ظهور عدد فردي»، و بـ D إلى الحدث «ظهور عدد يقبل القسمة على 2 و 3 معاً»، و بـ E إلى الحدث «ظهور عدد أكبر من 7»، و بـ F إلى الحدث «ظهور عدد أصغر من 3»، و بـ G إلى الحدث «ظهور عدد أصغر من 7».

أ اكتب كلاً من هذه الأحداث.

ب هل يوجد بين هذه الأحداث حدثان متنافيان؟ اذكر حدثين متنافيين،

إذا كان جوابك نعم.

ج اكتب الأحداث: $C \cap D$ ، $A \cap B$ ، $A \cup B$.

7 مطلوب اختيار شخصين من ثلاثة مرشحين هم: شيروان وعمر ومحمد، ليمثلاً تلاميذ الصف العاشر في لقاء مع الإدارة. اكتب فضاء العينة. هل يتكوّن كل عنصر فيه من زوج مرتّب؟ أوضّح ذلك.

8 مطلوب تكوين أعداد من رقمين باستعمال الأرقام 1، 2، 3. اكتب فضاء العينة. هل يتكوّن كل عنصر فيه من زوج مرتّب؟ أوضّح ذلك.

9 مطلوب تشكيل لجنة من ثلاثة أشخاص من التلاميذ أحمد وغسان وعزيز وفرحان وليلى ونسرين. اكتب فضاء العينة إذا كان:

أ على اللجنة أن تضم تلميذة واحدة على الأقل.

ب على اللجنة أن تضم تلميذة واحدة على الأكثر.

10 رمت سوسن حجرَي نرد من لونين مختلفين. اكتب الأحداث التالية:

أ ظهور الرقم نفسه على الحجرين.

ب ظهور عددين مجموعهما 5.

ج ظهور العدد 3 على أحد الحجرين على الأقل.

11 اكتب الحدث المتمثّل في ظهور عدديّ مجموعهما 9، عند رمي حجرَي نرد مختلفيّ في اللون.

تذكّر تتكوّن الأعداد من أرقام كما تتكوّن الكلمات من حروف. الأرقام في النظام العشري هي 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، وعددها عشرة.

نظرة إلى الوراء

12 كيف تكتب $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ على أبسط صورة؟

13 كيف تكتب $\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{36}$ ، 36 مرة، على أبسط صورة؟

نظرة إلى الأمام

14 تم اختيار شخص بالقرعة من تلاميذ صف يضم 13 فتاة و 26 فتى. ليكون مندوب الصف.

ما احتمال أن يكون هذا المندوب فتاة؟

Probability

الاحتمال

الدرس
2

لماذا
تحتاج العديد من الشركات إلى
استعمال الاحتمال لتخطيط أعمالها
مثل شركات الطيران التي تبحث عن
أفضل الحلول لخدمة الزبائن .



الأهداف

- نميِّز الاحتمال النظري والاحتمال الاختباري.
- نحسب احتمال حدث.
- نميِّز متمم حدث ونحسب احتمال المتمم.

كيف تتمكّن بعض الشركات التجارية التي ترتبط أعمالها بأمر لا يمكن التنبؤ بوقوعها، مثل شركات التأمين، من تحقيق الأرباح؟ يكمن الجواب في أن من الممكن اكتشاف إمكانيات، أو احتمال وقوع أمر ما عبر مراقبة نتائج عدد كبير من الحالات التي يمكن أن تؤدي إلى وقوعه. مثال على ذلك: يمكن تحديد احتمال وفاة إنسان يدمن التدخين، عبر مراقبة نسبة الذين يتوفون بسبب الإدمان.

مثال 1 ما احتمال أن يُشفى أحد المرضى بسرطان الرئة علمًا بأن دراسة أجريت على 5000 حالة بيّنت أن 250 منها أدّت إلى الشفاء؟

الحل

يمكنك اعتبار فضاء العينة مؤلفًا من 5000 حالة بينها 250 - 5000 = 4750 حالة تمثّل عدم الشفاء، و 250 تمثّل الشفاء. فيكون احتمال أن يُشفى المريض :

$$\frac{250}{5000} = \frac{1}{20} = 0.05 = 5\%$$

حاول ما احتمال ألا يُشفى المريض؟

مثال 2 رمت دنيا حجر نرد. ما احتمال ظهور أحد مضاعفات 3 ؟

الحل

فضاء العينة هو {1, 2, 3, 4, 5, 6}. يتحقق الحدث إذا حصلت دنيا على 3 أو 6. أي أن الحدث هو {3, 6}. ينتج عن ذلك أن احتمال تحقق المطلوب هو إمكانيتان من أصل 6 أي:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.3333 = 33.33\%$$

حاول ما احتمال ظهور 1 أو عدد أكبر من 3 ؟

بيّن لنا المثالان السابقان طريقتين لحساب الاحتمال:

الطريقة الأولى	الطريقة الثانية
تقوم هذه الطريقة على حساب احتمال حدث عن طريق تكرار التجربة (تعدّد حالات السرطان المدروسة) وتسجيل نتيجة كل منها (شفاء أو لا). يتحدّد احتمال الحدث (الشفاء)، في هذه الطريقة، بنتائج التجارب المتكررة، ويتم التعبير عنه بكسر بسطه عدد الحالات التي حققت الحدث (حالات الشفاء)، ومقامه عدد الحالات كلّها. يُدعى هذا النوع من الاحتمال احتمالاً اختبارياً . Experimental Probability	تقوم هذه الطريقة على حساب احتمال وقوع الحدث (الحصول على مضاعف للعدد 3) نظرياً، دون الحاجة إلى إجراء تجارب (رمي حجر النرد). يتحدّد احتمال الحدث (الحصول على مضاعف للعدد 3)، في هذه الطريقة، بشكل مسبق؛ ويتم التعبير عنه بكسر بسطه عدد النتائج التي تُحقّق الحدث (نتيجتان هما 3 و 6) ومقامه عدد النتائج المحتملة كلّها (6). يُدعى هذا النوع من الاحتمال احتمالاً نظرياً . Theoretical Probability

سحب فؤاد كرة واحدة من كيس فيه 4 كرات حمراء و 7 كرات سوداء. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء؟

سحب فؤاد كرة واحدة من كيس فيه 4 كرات حمراء و 7 كرات سوداء. اذكر، من أحداث هذه التجربة العشوائية، حدثاً مؤكداً.

Probability

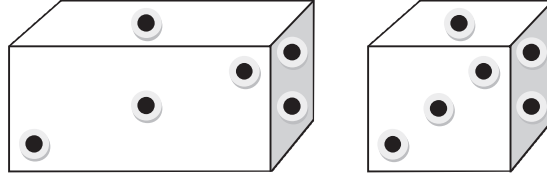
الاحتمال

- إذا عدنا إلى تجربة رمي حجر النرد،
- يُمكننا أن نحدد جميع الأحداث البسيطة. إنها $A = \{1\}$ ، $B = \{2\}$ ، $C = \{3\}$ ، $D = \{4\}$ ، $E = \{5\}$ ، $F = \{6\}$ (تذكر أن الحدث البسيط يتكوّن من نتيجة ممكنة واحدة).
- نجد أن جميع هذه الأحداث متساوية في الاحتمال.
- نجد أن مجموع احتمالات الأحداث البسيطة يساوي 1.

الاحتمال Probability

يُقاس احتمال حدث A ، ويُكتب $P(A)$ ، بعدد حقيقي يقع بين 0 و 1 ويشملهما أي $0 \leq P(A) \leq 1$. إذا كان الحدث A مستحيلًا فاحتماله $P(A) = 0$. إذا كان الحدث A مؤكداً فاحتماله $P(A) = 1$. مجموع احتمالات كل النتائج الممكنة هو 1.

نقول عن تجربة عشوائية إنها **محدودة النتائج** إذا كان عدد نتائجها الممكنة محدوداً. تتألف مجموعة النتائج، في هذه الحالة، من عدد محدود من العناصر.



مثال 3 رمى سعيد حجر نرد ورمت أخته ليلي حجر نرد محوَّراً بحيث أصبح شبه مكعب بدل أن يكون مكعباً كما في الشكل أعلاه. كلٌّ من الحجرين مرقَّم من 1 إلى 6. هل تحويل نرد ليلي غير في فضاء العينة؟ هل غير في احتمالات كل من النتائج الممكنة؟

الحل

لم يُغيّر تحويل نرد ليلي في فضاء العينة في التجريبتين وهو $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. أما احتمالات كل من النتائج الممكنة فقد تغيّرت. فهي كانت متساوية في تجربة سعيد نظراً لتساوي مساحات وجوه المكعب. لكنها لم تعد متساوية في تجربة ليلي نظراً لاختلاف المساحات في وجوه شبه المكعب.

نقول عن تجربة عشوائية أنها **منتظمة Equiprobable** إذا تساوت فيها احتمالات النتائج الممكنة.

الاحتمال النظري Theoretical Probability

إذا كانت التجربة العشوائية محدودة ومنتظمة فإن احتمال حدث A من أحداثها هو العدد الحقيقي.

$$P(A) = \frac{\text{عدد النتائج التي تحقّق الحدث}}{\text{عدد النتائج الممكنة كلّها}}$$

مثال 4 سحب مروان قرص حاسوب من علبة تحتوي على قرصين أحمرين و 4 أقراص زرقاء و 3 أقراص صفراء. ما احتمال أن يكون القرص المسحوب أصفر؟

الحل



هذه التجربة العشوائية محدودة ومنتظمة. فضاء العينة فيها هو:

$$\{R_1, R_2, B_1, B_2, B_3, B_4, Y_1, Y_2, Y_3\}$$

حيث يرمز الحرف R إلى اللون الأحمر، والحرف B إلى اللون الأزرق،

والحرف Y إلى اللون الأصفر. هناك 3 نتائج تحقق الحدث من 9 نتائج ممكنة.

وعليه، فإن احتمال أن يكون القرص المسحوب أصفر هو 3 من 9 أو:

$$P(Y) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

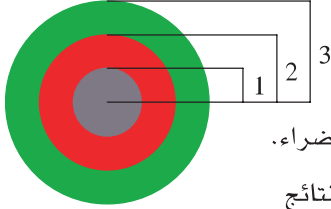
حاول سحب محمد قرص حاسوب من علبة تحتوي على 3 أقراص حمراء و 5 أقراص زرقاء و 7 أقراص صفراء. ما احتمال أن يكون القرص المسحوب أزرق؟

كيف نحسب احتمالات حدث في تجربة عشوائية غير محدودة؟ سنقتصر في جوابنا على حالات التجارب العشوائية المنتظمة. سوف ندرس نوعين من هذه الحالات.

مثال 5

رمت فيروز سهمًا أصاب الدائرة الخشبية المعلقة على الحائط. ما احتمال الحدث B المتمثل في أن يُصيب السهم المنطقة الخضراء؟

الحل



كل نقطة من نقاط الدائرة الخشبية تشكل نتيجة ممكنة

في حين أن النقاط التي تحقق الحدث B هي نقاط المنطقة الخضراء.

بما أننا غير قادرين على إيجاد عدد النتائج الممكنة ولا عدد النتائج

التي تحقق الحدث، فسوف نقسم مساحة المنطقة التي تشكل نقاطها الحدث، أي مساحة المنطقة الخضراء، على مساحة المنطقة التي تشكل نقاطها فضاء العينة، أي مساحة اللوحة كاملة.

$$P(B) = \frac{\text{مساحة المنطقة الخضراء}}{\text{مساحة اللوحة كاملة}}$$

$$P(B) = \frac{\pi(3)^2 - \pi(2)^2}{\pi(3)^2} = \frac{5\pi}{9\pi} = \frac{5}{9} = 0.556 = 55.6\%$$

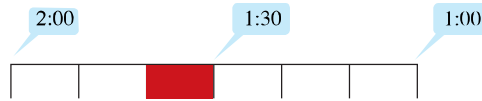
حاول ما احتمال أن يُصيب السهم المنطقة الحمراء؟

مثال 6

يطلع كمال على بريده الإلكتروني كل يوم بين الساعة الواحدة (1:00) والساعة الثانية (2:00) بعد الظهر. ما احتمال الحدث E المتمثل في أن يقوم بذلك بين 1:30 و 1:40؟

الحل

يتألف فضاء العينة من كل لحظة تقع بين 1:00 و 2:00. أما الحدث فهو مجموعة اللحظات الواقعة بين 1:30 و 1:40. لحساب احتمال الحدث E نقسم الفترة بين 1:00 و 2:00 إلى فترات طول كل منها 10 دقائق (طول الفترة بين 1:30 و 1:40).



تمثل الفترة الحمراء الحدث. احتمال الحدث، إذا هو فترة واحدة من 6 فترات متساوية، أي:

$$P(E) = \frac{1}{6} \approx 0.167 \approx 16.7\%$$

حاول ما احتمال أن يقوم بذلك بين 1:30 و 1:35؟

Probability of the Complement of an event

احتمال الحدث المتمم

مثال

7 إذا كان B الحدث المتمم في ظهور عدد لا يزيد على 2 عند رمي نرد، اكتب الحدث المتمم \bar{B} واحسب احتماله. ما العلاقة التي تربط بين احتمال الحدث B واحتمال الحدث المتمم \bar{B} ؟

الحل

$$B = \{1, 2\} \text{ و } \bar{B} = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ و } P(\bar{B}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) \text{ أو } P(B) + P(\bar{B}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

النتيجة التي توصلنا إليها في المثال السابق بخصوص العلاقة بين احتمال حدث B واحتمال الحدث المتمم \bar{B} هي في الحقيقة نتيجة عامة يمكن استعمالها في أي تجربة عشوائية.

مثال

8 يحتوي صندوق على 52 ورقة متماثلة، 10 منها حمراء و 12 زرقاء و 14 بيضاء و 16 خضراء. سحب سليم ورقة وأعادها إلى الصندوق، ثم سحب ورقة أخرى. ما احتمال الحدث B المتمم بأن تكون الورقة الأولى زرقاء والحدث O المتمم في ألا تكون الورقة الثانية زرقاء ؟

الحل

يتألف فضاء العينة من 52 عنصراً لأن سحب كل ورقة يمثل نتيجة ممكنة. ويتألف الحدث B من 12 عنصراً لأن كل ورقة من الأوراق الزرقاء تمثل نتيجة تحقق الحدث.

$$P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

يمكنك حساب احتمال الحدث O بالطريقة نفسها. يتألف الحدث O من جميع الأوراق الحمراء والبيضاء والخضراء. إنه يتألف من 40 عنصراً بحيث يكون:

$$P(O) = \frac{40}{52} = \frac{10}{13}$$

لكن بإمكانك أن تلاحظ أن الحدث O هو متمم الحدث B ، وتحسب احتماله كما يلي:

$$P(O) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{13} = \frac{10}{13}$$

ما الذي يتغير في نتائج المثال السابق لو أن سليماً لم يعد الورقة الأولى إلى الصندوق قبل سحب الورقة الثانية ؟

تحد

مثال 9

مع شكري حجر نرد عجيب، مرقّم من 1 إلى 6. احتمال ظهور أي عدد فيه، غير 1، هو ناتج ضرب هذا العدد في احتمال ظهور 1. ما احتمال ظهور كل عدد من الأعداد الستة؟

الحل

يُمكنك أن تكتب وفقاً لمعطيات المسألة ما يلي:

$$P(6)=6P(1), P(5)=5P(1), P(4)=4P(1), P(3)=3P(1), P(2)=2P(1)$$

بما أن مجموع احتمالات جميع النتائج الممكنة هو 1، فإن بمقدورنا أن نكتب:

$$\begin{aligned} 1 &= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) \\ &= P(1) + 2P(1) + 3P(1) + 4P(1) + 5P(1) + 6P(1) \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)P(1) \\ &= 21P(1) \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$P(1) = \frac{1}{21}, P(2) = \frac{2}{21}, P(3) = \frac{3}{21}, P(4) = \frac{4}{21}, P(5) = \frac{5}{21}, P(6) = \frac{6}{21}$$

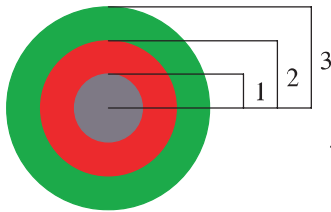
حاول ما احتمال ظهور عدد أولي في تجربة المثال السابق؟

التمارين

التواصل في الرياضيات

- 1 ما احتمال رسوب باسل في اختبار الرياضيات، علماً بأن احتمال نجاحه 90% ؟
- 2 اشرح كيف تستعمل المساحات لحساب الاحتمالات.

تمارين موجهة



- 3 سحب جميل كرة زجاجية واحدة من كيس فيه 5 كرات زرقاء، و 3 كرات حمراء، وكرة بيضاء. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء؟
- 4 رمت ليلى سهمًا باتجاه لوحة خشبية معلقة على الحائط. ما احتمال أن يُصيب السهم المنطقة الزرقاء؟
- 5 يتلّع سعيد على بريده الإلكتروني كل يوم بين الساعة السابعة والساعة الثامنة صباحًا. ما احتمال أن يقوم بذلك خلال الفترة 7:30 و 7:45؟
- 6 تنظّم جمعية العمل الخيري يانصيباً لتمويل نشاطاتها. تم ترقيم البطاقات من 0000 إلى 9999. ما احتمال أن تحمل البطاقة الرابعة ترقيماً يبدأ بالرقم 3 وينتهي بالرقم 2 أو 1؟

تمارين وتطبيقات

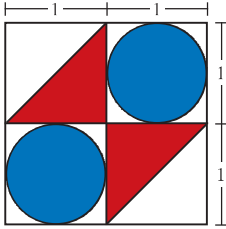
يحتوي كيس على 3 بطاقات بيضاء وبطاقتين سوداوين و 5 بطاقات حمراء، جميعها متماثلة. سحب رياض بطاقة واحدة، ما احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة:

- 7 بيضاء. 8 سوداء. 9 حمراء.

يصل الباص إلى الموقف قرب منزل سليم ما بين الساعة الثامنة والثامنة و 5 دقائق صباحاً. ما احتمال أن يركب سمير الباص إذا وصل إلى الموقف في الأوقات التالية:

- 10 8:04 11 8:02 12 8:01 13 8:03

هندسة يرمي سامي سهامه على لوحة خشبية ممثلة في الشكل المقابل. احسب احتمال كل من الأحداث التالية:



- 14 أن يُصيب السهم منطقة دائرية.

- 15 أن يُصيب السهم أحد المثلثين الأحمرين.

- 16 أن يُصيب السهم أحد المثلثين الأبيضين.

- 17 أن يُصيب السهم منطقة بيضاء.

ديموغرافيا يبين الجدول أدناه أعداد السكان، من غير الأطفال، في إحدى البلديات، وفقاً للعمر والجنس.

العمر	ذكور	إناث
17 – 14	83	93
19 – 18	1 224	1 416
21 – 20	1 294	1 414
24 – 22	1 260	1 263
29 – 25	950	1 058
34 – 30	661	811
35 وما فوق	955	1 824

تم اختيار أحد هؤلاء السكان بطريقة عشوائية. ما احتمال أن يكون عمر هذا الشخص في الفئة:

- 18 24 – 18 19 29 – 25 20 34 – 30 21 30 وما فوق.

- 22 احسب احتمال كل من الأحداث التالية عند إلقاء حجرَي نرد من لونين مختلفين:

- أ أن يكون العددان الظاهران متساويين.
ب أن يكون مجموع العددين الظاهرين 12.
ج أن يظهر العدد 3 على أحد الوجهين على الأقل.
د أن يكون مجموع العددين الظاهرين أقل من 5.

23 تم اختيار مندوب بالقرعة لصف يتألف من 8 فتيات و 12 فتى. ما احتمال:

أ أن يكون المندوب فتى؟ ب أن يكون فتاة؟

ج أن يكون فتاة إذا أبدى فتّيان وفتاة عدم رغبتهما في الترشيح؟

24 متى يتعادل، في التمرين السابق، احتمال أن يكون المندوب فتاة أو فتى؟

25 في تجربة عشوائية لها ثلاث نتائج ممكنة هي A و B و C ، كان $P(A)=0.2$ و $P(B)=0.5$.
جد $P(C)$.

نظرة إلى الوراء

26 اكتب فضاء العينة في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية 3 مرات متتالية. اكتب الحدث A

المتمثل بظهور الوجه نفسه في المرات الثلاث.

27 اكتب الأحداث التالية في تجربة إلقاء حجرَي نرد من لونين مختلفين:

أ العدان الظاهران متساويان. ب مجموع العددين الظاهرين عدد أولي.

ج مجموع العددين الظاهرين عدد زوجي أكبر من 2.

28 هل تجد بين أحداث التمرين 27 حدثين متنافيين؟ ما هما إن وجدا؟

29 كم عنصرًا يضم متعم الحدث A في التمرين 26؟

نظرة إلى الأمام

30 سحبت منى كرتين دفعة واحدة من كيس يضم 5 كرات، 3 منها حمراء واثنان بيضاوان. ما

احتمال أن تكون الكرتان حمراوين؟

قانون العد الأساسي

Fundamental Counting Principle



لماذا
غالبًا ما نحتاج إلى طرق
لعد بعض النتائج في تجربة.

الدرس 3

الأهداف

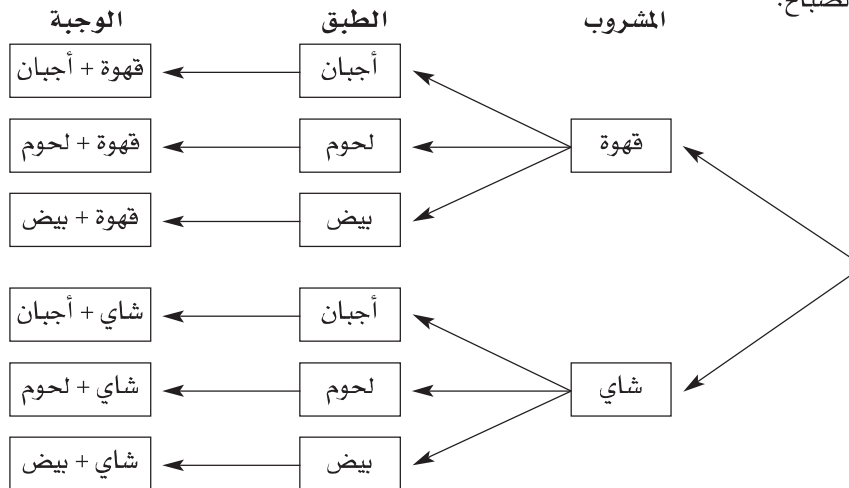
- نُشَيِّ مخطط شجرة ليمثل حالة.
- نستعمل القانون الأساسي للعد.

رأينا في الدرس السابق أن حساب احتمال حدث من أحداث تجربة محدودة يتطلب إيجاد عدد النتائج الممكنة كلها، وعدد النتائج الممكنة التي تحقق الحدث. سوف نتعلم في هذا الدرس والدرس الذي يليه طرائق للعد تساعدنا على عد ما نرغب في تعداده.

Fundamental Counting Principle

قانون العد الأساسي

الطريقة الأولى التي سوف نتعلمها هي استعمال مخطط الشجرة Tree diagram . خذ مثلاً وجبة الصباح في أحد الفنادق. يمكن للزبون أن يختار بين القهوة والشاي من ناحية وبين ثلاثة أطباق: أجبان أو لحوم أو بيض من ناحية أخرى. بيّن المخطط أدناه جميع الطرق الممكنة لتكوين وجبة الصباح.



النشاط

استكشاف مخطط الشجرة

يعرض مطعم الأمراء على زبائنه نوعين من وجبات العشاء. تتشكل كل وجبة من صحن سلطة وصحن لحوم. يمكن للزبون أن يختار بين نوعين من السلطة: سلطة الخس أو سلطة الطماطم. كما يختار صحن اللحوم من ثلاثة أنواع: مشويات أو مقلبات أو دجاج.

1. ابدأ برسم مخطط شجرة يُبين خيارَي السلطة كما هو مبين في المقابل.

2. ارسم، انطلاقاً من كل خيار سلطة، مخطط شجرة يبين خيارات اللحوم الثلاثة.

3. ما الوجبات التي يمكن تشكيلها؟ كم يبلغ عددها؟

4. يعرض المطعم الآن أن يزيد على طبق اللحم بصلاً مشويّاً أو فليفلة مشوية.

أضف إلى مخطط الشجرة الذي أنشأته مستوى ثالثاً يسمح لك بتعداد الوجبات التي يمكن تشكيلها الآن. ما هذا العدد؟

نقطة مراقبة ✓

أنشئ مخطط شجرة للمثال السابق بادئاً بالطبق كخيار أول. هل أدى هذا التبديل في ترتيب الخيارين إلى تغيير في النتائج؟

من شأن إمعان النظر في مخطط الشجرة وإدراك كيفية إنشائه أن يوضح قانون العد الأساسي.

قانون العد الأساسي Fundamental Counting Principle

إذا كان هناك m إمكانية لتحقق حدث n إمكانية لتحقق حدث آخر، فإن هناك mn إمكانية لتحقق الحدثين معاً.

مثال

يريد سامي أن يختار كلمة السر الخاصة به لدخول الأنترنت. تتكون هذه الكلمة من حرفين من أحرف الأبجدية الإنكليزية، متبوعين بأربعة أرقام. كم كلمة سر يمكنه أن يشكل علماً بأنه لا يستطيع استعمال الحرف O ولا الرقم 0 ؟

الحل

بإمكان سامي أن يختار كل حرف من بين 25 حرفاً وكل رقم من بين 9 أرقام. فإذا طبقنا قانون العد الأساسي نحصل على:

الحرف الأول	الحرف الثاني	الرقم الأول	الرقم الثاني	الرقم الثالث	الرقم الرابع					
25	×	25	×	9	×	9	×	9	×	9

فيكون العدد $25^2 \times 9^4 = 4\,100\,625$ كلمة سر ممكنة.

مثال

2

تتكون لوحة السيارات من ثلاثة أحرف متبوعة بثلاثة أرقام. ما عدد اللوحات الممكنة؟ ما احتمال أن تكون أحرف لوحة سيارتك مكونة من الأحرف الأولى لاسمك الثلاثي بالترتيب؟

الحل

ابدأ بعد عناصر مجموعة النتائج.

الحرف الأول	الحرف الثاني	الحرف الثالث	الرقم الأول	الرقم الثاني	الرقم الثالث			
28	×	28	×	10	×	10	×	10

فيكون عدد اللوحات الممكنة $28^3 \times 10^3 = 21\,952\,000$ لوحة.

احسب بعد ذلك عدد اللوحات التي تحقق الشرط.

الحرف الأول	الحرف الثاني	الحرف الثالث	الرقم الأول	الرقم الثاني	الرقم الثالث			
1	×	1	×	10	×	10	×	10

فيكون عدد اللوحات التي تحقق الشرط $10^3 = 1000$ لوحة.

وهكذا فإن احتمال أن تكون أحرف لوحة سيارتك مكونة من الأحرف الأولى لاسمك الثلاثي

بالترتيب هو $0.000045 = \frac{1000}{21\,952\,000}$ ، أي 45 في المليون.

التمارين

التواصل في الرياضيات

1 اشرح كيف يساعدك مخطط الشجرة على فهم قانون العد الأساسي.

تمارين موجهة

2 يريد شكري أن يختار كلمة سر خاصة به لدخول الأنترنت. تتكوّن هذه الكلمة من حرفين من

أحرف الأبجدية الإنكليزية، متبوعين بثلاثة أرقام. كم كلمة سر يمكنه أن يشكّل علماً بأنه لا

يستطيع استعمال الحرف O ولا الرقم 0 ؟

أنشئ شجرة لتحديد جميع إمكانيات التسجيل في النشاطات اللاصفية.

• رياضة: كرة قدم، كرة سلة، كرة طاولة.

3 التسجيل في كل من النشاطات اللاصفية: فنون: موسيقى، رسم.

• أندية: علوم، رياضيات.

تمارين وتطبيقات

أنشئ مخطط شجرة يبيّن جميع إمكانيات الهوايات داخل المنزل وخارجه.

- 4 الهوايات: • داخل المنزل: القراءة، مشاهدة التلفزيون، الاستماع إلى الموسيقى.
• خارج المنزل: الجري، التنزه، النادي.

حدّد عدد كلمات السر التي يمكن تكوينها باستعمال جميع أحرف الأبجدية الإنكليزية وجميع الأرقام في كل حالة:

- 5 رقمين متبوعان بثلاثة أحرف يتبعها رقم واحد.
6 ثلاثة أرقام متبوعة بحرفين يتبعهما رقم واحد.
7 ثلاثة أحرف متبوعة بثلاثة أرقام.
8 حرفان متبوعان بأربعة أرقام.
9 **نشر الكتب** يحمل كل كتاب منشور ترقيمياً عالمياً يُدعى ISBN . هذا الترقيم مكون من 10 أرقام تتضمن معلومات عن الكتاب مثل لغة الكتاب واسم الناشر... ما عدد الترقيمات الممكنة؟
10 **امتحان** يتضمن اختبار خيار من متعدد 14 سوالاً لكل منها أربعة أجوبة يختار منها التلميذ واحداً. ما عدد الإجابات الممكنة عن الأسئلة جميعها.
11 **أمن** يعمل أحد المختصين في شؤون الأمن على تشكيل مفتاح لأحد أنظمة الأمن. يستعمل هذا المفتاح ثلاثة أحرف هي A, B, C ، يُمكن لكل منها أن يتكرر أكثر من مرة. يريد هذا المُختص أن يكون احتمال النجاح في محاولة فك المفتاح أقل من 0.001 . ما هو العدد الأدنى لحروف هذا المفتاح؟

نظرة إلى الوراء

- 12 تذكر أن ورق اللعب يتألف من 52 ورقة تتوزع بالتساوي على الأشكال ♥ و ♦ و ♣ و ♠ . سحب والدك ورقة من بين هذه الأوراق. ما عدد النتائج الممكنة؟ وما عدد النتائج التي تحقق الحدث «الورقة المسحوبة حمراء»؟
13 سحب صابر ورقتين الواحدة بعد الأخرى من ورق اللعب. ما احتمال أن تكون الورقتان ♣ في حال إعادة صابر للورقة، وخلط الأوراق قبل سحب الثانية.
14 وجد صابر أن الورقة الأولى كانت ♠ . سحب الورقة الثانية من دون أن يعيد الأولى. ما احتمال أن تكون الورقة الثانية ♠ ؟

نظرة إلى الأمام

- 15 تم اختيار شخصين بالقرعة من مجموعة 3 فتيات و 4 فتيان. ما احتمال أن يكون هذان الشخصان فتيين؟

التباديل والترتيبات والتوافيق

Permutations, Arrangements and Combinations



لماذا
هناك حالات كثيرة تتناول تنسيق
عدد محدّد من عناصر مجموعة بشكل
مرتبّ أو من دون ترتيب.

رأينا في الدرس السابق كيف نستعمل القانون
الأساسي للعد لكي نجد العناصر التي تؤلّف
فضاء العينة وعدد العناصر التي تؤلّف حدثًا.
سوف نتعلّم في هذا الدرس طرائق أخرى للعد.
نبدأ بتعريف بسيط ومهم في آن.

مضروب n Factorial

إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا فإن مضروب n هو ناتج ضرب الأعداد الصحيحة من 1 إلى n .
ويوسع أهل الرياضيات هذا التعريف ليشمل الحالة $n=0$ ، فيعرفون $0!=1$ ، أي

$$n! = \begin{cases} 1 \times 2 \times \dots \times n & : n > 0 \\ 1 & : n = 0 \end{cases}$$

حيث n عدد صحيح غير سالب.

الدرس 4

الأهداف

- نكتب تباديل مجموعة ونحدّد عددها.
- نحسب عدد تباديل r شيء من بين n .
- نحسب عدد توافيق r شيء من بين n .

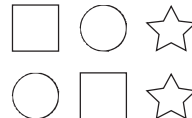
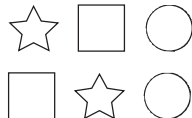
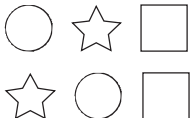
permutations

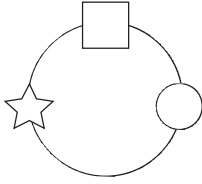
التباديل

التبديل هو تنسيق عدد من الأشياء في ترتيب معيّن.

ارسم جميع تباديل الأشكال التالية: □، ○، ☆.

الحل





يمكنك تنسيق الأشياء على خطٍ مستقيم، كما في المثال السابق .
كما يمكنك تنسيقها على دائرة كما هو مبين في الشكل المقابل.
تنسيق الأشياء في الحالة الأولى هو تبديل خطي
وفي الثانية تبديل دائري .

إنشاء لائحة منظّمة: بيّن الجدول التالي جميع التباديل الممكنة للأحرف اللاتينية A, B, C, D .
كيف يمكنك أن تستعمل قانون العدّ الأساسي لتجد عدد هذه التباديل؟

$DABC$	$CABD$	$BACD$	$ABCD$
$DACB$	$CADB$	$BADC$	$ABDC$
$DBAC$	$CBAD$	$BCAD$	$ACBD$
$DBCA$	$CBDA$	$BCDA$	$ACDB$
$DCAB$	$CDAB$	$BDAC$	$ADBC$
$DCBA$	$CDBA$	$BDCA$	$ADCB$

الحل

يمكنك تحديد عدد هذه التباديل باستعمال قانون العدّ الأساسي، كما هو مبين فيما يلي:

يمكن اختيار الحرف الرابع من	يمكن اختيار الحرف الثالث من	يمكن اختيار الحرف الثاني من	يمكن اختيار الحرف الأول من
1	2	3	4

عدد جميع التباديل يساوي، إذًا،

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$$

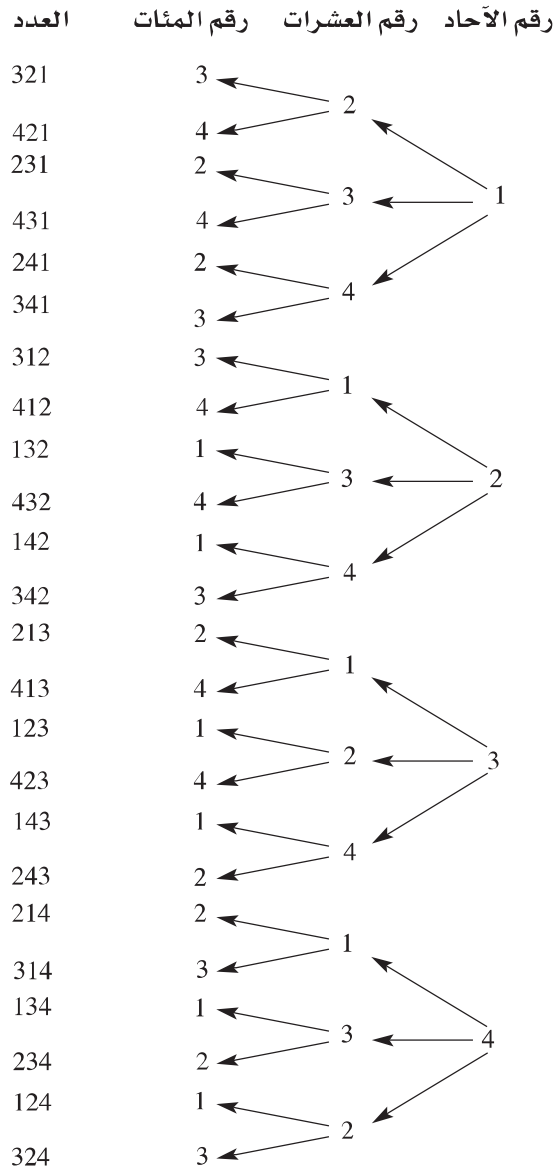
Arrangements

الترتيب

كم عددًا من 3 أرقام يمكنك أن تكتب باستعمال الأرقام 1، 2، 3، 4، من دون تكرار؟ اكتب هذه الأعداد.

الحل

استعمل مخطط شجرة. بيّن مخطط الشجرة على الصفحة التالية جميع الخيارات الممكنة، لاختيار رقم الآحاد، ثم رقم العشرات، ثم رقم المئات. كما بيّن العدد الذي تكتبه في كل حالة.



تعبّر عما قمت به في المثال السابق بالقول إنك رتبت 3 أرقام من أصل الأرقام الأربعة 1، 2، 3، 4. كما تسمّي ما حصلت عليه تراتيب 3 Arrangements أشياء من 4. للحصول على عدد هذه التراتيب، استعمل قانون العدّ الأساسي:

يمكن اختيار الرقم الثالث من	×	يمكن اختيار الرقم الثاني من	×	يمكن اختيار الرقم الأول من
2		3		4

وهكذا يكون عددها $4 \times 3 \times 2 = 24$ ترتيباً.

حاول كم عدداً من 4 أرقام يمكنك أن تكتب باستعمال الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، من دون تكرار؟



مثال 4
أهدى والد سمير ابنه 10 أقراص مُدمجة موسيقية.
أراد سمير الاستماع إلى ثلاثة منها على التوالي.
ما عدد الخيارات أمام سمير؟

الحل

بإمكان سمير أن يختار القرص الأول من 10 أقراص، والثاني من 9 أقراص، والثالث من 8 أقراص. فإذا استعملت قانون العدّ الأساسي وجدت أن أمام سمير $10 \times 9 \times 8 = 720$ خياراً.

حاول
اشترى مروان 5 روايات ليقرأ بالتتابع ثلاثاً منها خلال العطلة الصيفية .
ما عدد الخيارات أمام مروان؟

Arangements of n Objects r at Time

ترتيب r شيئاً من n

عدد ترتيبات r شيئاً من n، حيث $r \leq n$ ، هو $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

مثال 5
تريد سلمى أن تضع 4 كتب في خزانة التي تحتوي على 10 رفوف، على ألا تضع أكثر من كتاب واحد على كل رف. ما عدد الخيارات أمامها؟

الحل

المسألة تعود إلى ترتيب 4 رفوف من بين 10. تختار سلمى الرف الأول من 10، والثاني من 9، والثالث من 8، والرابع من 7. وهكذا يكون عدد الخيارات $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

حاول
مع سعيد 5 كرات مختلفة الألوان يريد أن يوزعها على 8 صناديق مرقمة، على ألا يضع أكثر من كرة واحدة في كل صندوق. ما عدد الخيارات أمامه؟

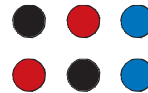
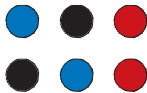
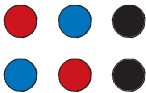
Circular Permutations

التباديل الدائرية

مثال 6
في حديقة ليلى 3 مقاعد: أزرق وأحمر وأسود. تريد ليلى ترتيب هذه المقاعد حول طاولة مستديرة.
ما الخيارات أمام ليلى؟ وما عددها؟

الحل

إذا نظرت إلى التباديل الخطية للمقاعد الثلاثة تجد ما يلي:





لاحظ أن التباديل الخطئية الثلاثة في الصف الأول (أزرق، أحمر، أسود) تولّد تبديلاً دائرياً واحداً، وأن التباديل الخطئية في الصف الثاني (أزرق، أسود، أحمر) تولّد تبديلاً دائرياً واحداً. إذاً، أمام ليلي خياران لوضع المقاعد حول الطاولة.

حاول ما عدد الخيارات لترتيب 4 أنواع من المقبّلات في صحن دائري؟

التباديل الدائرية Circular Permutations

عدد التباديل الدائرية لـ n شيئاً هو $(n-1)!$.

Combinations

التوافيق

رأينا أن الترتيب هو تنسيق r شيئاً من أصل n في ترتيب مُعيّن. إذا لم تفرض على التنسيق أن يكون مرتّباً، تحصل على ما يسمى توافيقاً **Combinations**. توفيق r شيئاً من n ، حيث $r \leq n$ ، هو بكل بساطة مجموعة مكوّنة من r شيئاً من n . إذا كان لديك الأعداد التالية: 1، 2، 3، 4، 5، فإن العناصر 2، 3، 5 تشكّل توفيق 3 عناصر من أصل 5. لاحظ أن العناصر 3، 2، 5 تشكّل التوفيق نفسه، بخلاف ما هو حاصل للترتيب.

بواسطة الاقتراع السري، يختار أعضاء النادي الرياضي من 7 مرشّحين، لجنة إدارية مكوّنة من رئيس ونائب رئيس وأمين سرّ وأمين مالية ومسؤول علاقات، ليقوموا بمهام اللجنة الإدارية للنادي. ما عدد التشكيلات الممكنة؟

الحل

لاحتساب عدد التشكيلات الممكنة، نلاحظ أن بالإمكان:

اختيار الرئيس من	اختيار نائب الرئيس من	اختيار أمين السر من	اختيار أمين المالية من	اختيار مسؤول العلاقات من
7	6	5	4	3

وهكذا فإن عدد التشكيلات الممكنة هو

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{7!}{(7-5)!} = 2520$$

مثال 7

تطبيقات

رياضة

مثال

8

غير النادي طريقة اختيار اللجنة الإدارية، وصار على الأعضاء أن يختاروا 5 مرشحين من السبعة ليشكلوا اللجنة، دون تحديد صفة كل منهم، تاركين لأعضاء اللجنة المنتخبة توزيع المهام.

أ ما عدد الطرق التي يمكن بها للأعضاء الخمسة توزيع المهام فيما بينهم؟

ب ما عدد اللجان الإدارية التي يمكن للأعضاء انتخابها بطريقة الاختيار الجديدة؟

حل المسائل

الحل

أ عدد الطرق التي يمكن بها للأعضاء الخمسة توزيع المهام بينهم هو عدد تبديل مجموعة من 5 عناصر. إنه يساوي $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

ب لاحتساب عدد اللجان الإدارية التي يمكن للأعضاء انتخابها بطريقة الاختيار الجديدة، لاحظ أن كل لجنة مختارة هي مجموعة من 5 أعضاء من 7. من ناحية ثانية، فإن كل لجنة مختارة تولد 120 تشكيلاً للجنة الإدارية. من ناحية ثالثة، عدد التشكيلات الممكنة هو عدد تراتيب 5 أشياء من 7 أي $7! = 2520$. فإذا استعملت قانون العد الأساسي نتج لديك:

عدد التشكيلات = عدد اللجان المختارة \times عدد تبديل كل لجنة

$$2520 = \text{عدد اللجان المختارة} \times 120$$

$$\text{عدد اللجان التي يمكن اختيارها} = \frac{2520}{120} = 21$$

النشاط

مقارنة التراتيب والتوافيق Comparing arrangements and Combinations

نظم نادي التسلية لعبة بين أعضائه تتلخص فيما يلي:

- يختار اللاعب 3 أرقام من الأرقام العشرة (0 إلى 9) ويكتبها على السبورة.
- يقوم اللاعب بسحب 3 كرات مرقمة من 0 إلى 9، وموضوعة في كيس غير شفاف الواحدة بعد الأخرى.
- لكي يفوز اللاعب عليه أن يسحب الأرقام المكتوبة على السبورة بالترتيب نفسه.

1. اختار صقر الأرقام 8 - 4 - 1 على التوالي. ما النتائج التي تقوده إلى الفوز؟
2. بدل منظم اللعبة قواعدها. واشترط، لكي يفوز اللاعب، أن يسحب الأرقام الثلاثة مهما يكن ترتيب سحبها. أعاد صقر اللعب مُصرّاً على أرقامه. ما النتائج التي تقوده إلى الفوز؟
3. أي اللعبتين توفر حظاً أكبر للربح: الأولى أم الثانية؟ اشرح ذلك.

نقطة مراقبة ✓

يمكنك سماع شريطيّ موسيقيّين، الواحد بعد الآخر، من 5 شرائط بطرق مختلفة عددها $4 \times 5 = 20$ طريقة. إذا أردت أن تجد عدد الطرق التي يمكنك فيها شراء شريطيّ موسيقيّين من أصل 5، فإن الترتيب ليس له دور. فشرء شريط لمحمد عبد الوهاب وشريط لأم كلثوم لا يتأثر بالترتيب الذي تم به شراء الشريطيّ لأن الفاتورة سوف تتضمن الشريطين معاً. لكي تحدّد عدد الطرق لشراء شريطيّ من أصل 5، اقسم عدد تراتيب شريطين من 5 على 2، لأن كل شريط عدّ مرتين. هذا العدد هو $\frac{4 \times 5}{2} = 10$.

توافيق r شيئاً من أصل n Combination of n Objects r at time

$$C_r^n = \frac{n!}{r! \times (n-r)!} \text{ هو } r \leq n \text{ حيث } n \text{ شيئاً من } n$$

لاحظ أي أن $C_r^n = \frac{P_r^n}{r!}$ عدد توافيق r شيئاً من n يساوي ناتج قسمة عدد تراتيب r شيئاً من n على عدد تباديل r شيئاً.

يريد سعيد أن يختار 3 أكواب من 5 أكواب تحتوي على عصير الفاكهة: ليمون، تفاح، عنب، موز، أناناس. ما عدد الخيارات التي يمكنه القيام بها؟

الحل

يمكن لسعيد أن يختار الكوب الأول من 5 أكواب، والثاني من 4 أكواب، والثالث من 3 أكواب. غير أن اختيار عصير الليمون وعصير الموز وعصير العنب لا يختلف عن اختيار عصير الموز وعصير العنب وعصير الليمون. أي إن الترتيب الذي يتبعه سعيد في اختيار الأكواب، ليس له دور في هذه المسألة. من هنا، فإن عدد الخيارات أمام سعيد هو عدد تراتيب 3 من 5 مقسوماً على عدد تباديل 3 أشياء، أي: $\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$.

مثال

تطبيقات تجارية

حاول

ما عدد الخيارات إذا كان على سعيد اختيار 4 أكواب؟

تفكير ناقد

أيهما أكبر: عدد تراتيب 3 من 5، أم عدد توافيق 3 من 5؟

تستنتج من المثالين السابقين أن هناك علاقة بين عدد تراتيب r شيئاً من n ، وعدد توافيق r شيئاً من n .

العلاقة بين التباديل والتوافيق

عدد تراتيب r شيئاً من n = عدد توافيق r شيئاً من n × عدد تباديل r شيئاً.

عند حل مسألة، غالباً ما تحتاج إلى اختيار النموذج المناسب: التراتيب أو التوافيق.

مثال

10

حدّد النموذج المناسب، ثم احسب العدد.

أ كم طريقة يوجد لاختيار رئيس ونائب رئيس وأمين سر من 5 مرشحين؟

ب كم طريقة يوجد لاختيار لجنة من 3 أعضاء من 5 مرشحين؟

الحل

أ النموذج هنا هو نموذج الترتيب، لأن المطلوب هو اختيار شخص للرئاسة، وآخر لنياابة الرئاسة، وثالث لأمانة السر. عدد التشكيلات هو $5 \times 4 \times 3 = 60$. $\frac{5!}{(5-3)!}$.

ب النموذج هنا هو نموذج التوافق، لأن المطلوب هو مجموعة من 3 أشخاص. عدد التشكيلات هو:

$$C_3^5 = \frac{5!}{3! \times (5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

حاول كم طريقة يوجد لاختيار لجنة من شخصين بين 7 أشخاص؟ كم طريقة يوجد لاختيار رئيس ونائب من أعضاء لجنة تضم 7 أشخاص؟

استعمال التوافق في حساب الاحتمال

مثال

11

سحبت ليلي كرتين من كيس يحتوي على 5 كرات حمراء و 3 كرات زرقاء.

ما احتمال أن تكون الكرتان حمراوين؟

الحل

يساوي هذا الاحتمال نسبة عدد النتائج التي تكون فيها الكرتان المسحوبتان حمراوين إلى عدد

النتائج الممكنة كلها. العدد الأول هو عدد توافيق 2 من 5، والثاني هو عدد توافيق 2 من 8

$$(8 \text{ هو عدد جميع الكرات}). \text{ العدد الأول } C_2^5 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10, \text{ والثاني هو } C_2^8 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28.$$

$$\text{إذا، فإن فاحتمال أن تكون الكرتان حمراوين هو } \frac{10}{28} \approx 0.3571 = 35.71\%$$

حاول ما احتمال أن تكون الكرتان من لونين مختلفين؟

التمارين

التواصل في الرياضيات

- 1 اشرح كيف يساعد قانون العد الأساسي على تحديد عدد التباديل لأربعة أشياء.
- 2 اشرح كيف يساعد قانون العد الأساسي على تحديد عدد الترتيب لأربعة أشياء من أصل خمسة.
- 3 اشرح الفرق بين الترتيب والتوافق. أعطِ مثالاً يدعم شرحك.

تمارين موجّهة

- 4 كم عددًا يمكنك أن تكتب باستعمال ستة أرقام، مختلفة عن 0، من دون تكرار؟
- 5 ما عدد الخيارات لمشاهدة 3 شرائط فيديو على التوالي من أصل سبعة؟
- 6 ما عدد الخيارات أمام 12 شخصًا كي يجلسوا إلى طاولة مستديرة لتناول العشاء؟
- 7 ما عدد الطرق لاختيار رئيس ونائب رئيس وأمين سر من أعضاء لجنة تضم 6 أشخاص؟
- 8 ما عدد الطرق لشراء 3 كتب و 4 شرائط موسيقى من مكتبة فيها 9 كتب و 7 شرائط موسيقى؟
- 9 في استقصاء حول تنظيم السير في أحد شوارع المدينة، اختار 10 أشخاص أن يكون الشارع مفتوحًا في الاتجاهين واختار 8 أشخاص أن يكون مفتوحًا في اتجاه واحد. بعد الاستقصاء تم اختيار شخصين من الذين أدلوا بأرائهم. ما احتمال أن يكونا مع فتح الشارع في الاتجاهين؟

احسب.

$$10! - 5! \quad 11! - 4! \quad 12! - (5-7) \quad 13! - (4-6)$$

$$14 \quad \frac{8!}{5! \times 3!} \quad 15 \quad P_4^{10} \quad 16 \quad P_5^{10} \quad 17 \quad P_2^7$$

$$18 \quad C_4^7 \quad 19 \quad C_4^8 \quad 20 \quad C_7^{10} \quad 21 \quad C_5^9$$

تمارين وتطبيقات

مع سارا 8 بطاقات مرقّمة من 1 إلى 8. في كل مسألة، جد كم عددًا تستطيع سارة أن تكتب مستعملة البطاقات التي معها.

- 22 من 5 أرقام
- 23 من 3 أرقام
- 24 من 4 أرقام
- 25 من 6 أرقام
- 26 من رقم واحد
- 27 من 8 أرقام

ما عدد اللجان التي يمكن اختيارها؟

- 28 3 أعضاء من أصل 5 مرشحين
29 7 أعضاء من أصل 8 مرشحين
30 8 أعضاء من أصل 12 مرشحاً
31 6 أعضاء من أصل 10 مرشحين

إدارة مؤسسات استقبلت إحدى الشركات 8 موظفين جدد. حدّد عدد الخيارات لتوزيعهم على الوظائف الشاغرة في كل حالة.

- 32 8 وظائف
33 9 وظائف
34 10 وظائف
35 15 وظائف

يحتوي كيس غير شفاف على 5 كرات بيضاء و 3 كرات خضراء. ما احتمال أن تسحب معاً:

- 36 كرتين من لونين مختلفين
37 3 كرات، اثنتان منها لونهما أبيض والثالثة خضراء؛

- 38 4 كرات، اثنتان منها لونهما أبيض
39 6 كرات، 3 منها خضراء
واثنتان منها لونهما أخضر

- 40 يريد بائع النظارات أن يعرض على منصة مستديرة 7 نظارات شمسية مختلفة. كم خياراً أمامه لترتيبها؟

- 41 تريد إحدى الشركات أن تعطي كل موظف من موظفيها ترقية من 4 أرقام. ما عدد الترقيات الممكنة علماً بأنه يمكن استعمال الأرقام العشرة من 0 إلى 9 مكررة؟ ما عددها إذا كان التكرار ممنوعاً؟

- 42 يريد مصطفى أن يصنع دولاباً مؤشراً يحمل الأرقام من 1 إلى 3. قام مصطفى بتقسيم الدولاب إلى 3 أقسام متساوية. بكم طريقة يمكنه كتابة الأرقام الثلاثة؟

حدّد النموذج في كل حالة من حالات التمارين 43-46.

- 43 اختيار 4 كتب للنشر من أصل 302 كتاب.
44 اختيار 9 لاعبين من أصل 15 لاعباً، لتكوين فريق النادي لكرة السلة.
45 اختيار أربعة مرشحين من أصل 200 لنيل جوائز من مليون دينار ومليونين دينار و 5 ملايين دينار و 10 ملايين دينار.
46 اختيار رئيس ونائب رئيس لصف من 100 تلميذ.

نظرة إلى الوراء



47 يحتوي صندوق على 20 كتاباً، 14 منها في موضوع الاقتصاد و 6 في موضوع الجغرافيا.

سُحب كتابان من الصندوق بشكل عشوائي.

ما عدد عناصر فضاء العينة؟

ما احتمال أن يكون الكتابان في موضوع الاقتصاد؟

ما احتمال أن يكون أحدهما في موضوع الاقتصاد والآخر في موضوع الجغرافيا؟

ما احتمال أن يكون الكتابان في الموضوع نفسه (تذكر الحدث المتمم)؟

نظرة إلى الأمام



48 تقدّم سعد الدين منذ بداية العام الدراسي إلى 10 اختبارات في الرياضيات وكانت درجاته

على التوالي: 35، 52، 66، 52، 48، 70، 52، 48، 58، 60. احسب المتوسط والوسيط،

والمنوال لهذه الدرجات.

4

الفصل 4

قياسات النزعة المركزية

Measures of central tendency



لماذا

يمكن استعمال قياسات النزعة المركزية لتحليل العديد من حالات الحياة اليومية مثل عدد الدقائق التي تُخصصها محطات التلفزيون للدراسة.

الدرس

1

الأهداف

- نميّر قياسات النزعة المركزية.
- نحسب المتوسط والمتوسط المتكثّل لمعطيات مجمعة.
- نحسب الوسيط لمجموعة معطيات.
- نحسب المنوال لمعطيات وللمعطيات مجمعة.

يستعمل الإحصائيون عدداً من قياسات النزعة المركزية. سنتعلم في هذا الدرس المتوسط والوسيط والمنوال لمجموعة من المعطيات كما سنتعلم كيف نجدها.

Mean

المتوسط

لعل المتوسط، ويُسمى أحياناً بالمتوسط الحسابي، هو أكثر قياسات النزعة المركزية شيوعاً واستعمالاً حيث أننا نتعامل معه يومياً. فالمعلم، مثلاً، يحسب متوسط الدرجات التي حصل عليها تلاميذه بعد كل اختبار ويعتبر هذه القيمة مؤشراً على مدى نجاحه في تزويد طلابه بالمعارف والمهارات.

اشترى سعيد 5 قمصان من عدة محلات وبأسعار مختلفة. اشترى القميص الأول بـ 7.5 آلاف دينار والثاني بـ 8 آلاف دينار والثالث بـ 7 آلاف دينار والرابع بـ 9 آلاف دينار والخامس بـ 8.5 آلاف دينار. كم كان متوسط ثمن القميص؟

الحل

لحساب متوسط ثمن القميص الواحد، نجمع أثمان القمصان الخمسة ونقسّم المجموع على عددها.

$$\frac{7.5+8+7+9+8.5}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

متوسط ثمن القميص هو 8 آلاف دينار.

مثال

المتوسط Mean

متوسط مجموعة من القيم $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ هو القيمة \bar{x} التي لو حلت محل كل قيمة في المجموعة لما تغير مجموع قيم المجموعة. يُحسب متوسط مجموعة القيم عن طريق جمع القيم كلها وقسمة المجموع على عددها. $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

مثال 2

كانت درجات شيرين في امتحان آخر السنة الدراسية كما يلي:

اللغة الكوردية	اللغة العربية	اللغة الإنكليزية	الرياضيات	التاريخ	العلوم
80	72	76	81	65	64

كم كان متوسط درجاتها؟

الحل

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{80 + 72 + 76 + 81 + 65 + 64}{6} = \frac{438}{6} = 73$$

حاول ما متوسط درجات الحرارة للأسبوع المنصرم علماً بأنها كانت على التوالي: 7، 5، 4، -2، 0، 1، -1.

مثال 3

كانت أيام التعطيل القسري للمصانع خلال السنة الماضية كما يلي:

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
عدد الأيام	6	4	3	4	2	5	3	4	5	2	3	4

كم كان متوسط عدد أيام التعطيل القسري في الشهر؟

الحل

$$\frac{6 + 4 + 3 + 4 + 2 + 5 + 3 + 4 + 5 + 2 + 3 + 4}{12} = \frac{45}{12} = 3.75$$

كان متوسط عدد أيام التعطيل القسري في الشهر 3.75 أيام.



حاول

سافر سردار بسيارته من مدينة إلى أخرى، واحتفظ بسرعة ثابتة في كل ساعة من الساعات التي استغرقتها رحلته. كانت هذه السرعات كما يلي:

الساعة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	الخامسة
السرعة	80	100	106	93	121

عاد سردار إلى المدينة الأولى بعد أسبوع وقطع المسافة كلها بسرعة ثابتة، فاستغرقت رحلة الإياب معه ما استغرقتة رحلة الذهاب. كم كانت سرعته في العودة.

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

78

حاول

أطوال طلاب الصف العاشر بالسنتيمتر هي:
178، 160، 153، 160، 187، 182، 153، 160، 156، 160. ما متوسط أطوال طلاب الصف
العاشر؟

تحديد

كانت درجات نسرين في كل من الفصلين الدراسيين الأول والثاني كما يلي:

الفصل الأول: 65، 80، 70، 50، 50، 70، 50، 70، 80، 70، 80.

الفصل الثاني: 67، 86، 72، 60، 60، 86، 72، 80، 60، 74، 86.

أنشئ جدولاً تكرارياً لدرجات نسرين في الفصل الأول واستعمله لحساب متوسط درجاتها فيه، ثم
أنشئ جدولاً تكرارياً لدرجات نسرين في الفصل الثاني واستعمله لحساب متوسط درجاتها فيه.
كيف تحسب متوسط درجات نسرين على مدار السنة الدراسية؟ جد هذا المتوسط.

المتوسط المثلث للمعطيات المجمعة Weighted mean for grouped data

تضم دورة تعليمية في محافظة دهوك 143 معلماً... يتوزعون على مختلف المراحل التعليمية. طلبت
وزارة التربية إلى مدير الدورة القيام بدراسة إحصائية تتعلق بأعمار المتدربين. كان أمام المدير
عدة طرق لتحضير تقريره:

1. ذكر أسماء المعلمين وعمر كل منهم وإرفاق ذلك بالعمر الأدنى والعمر الأقصى ومتوسط
الأعمار. لكن قراءة مثل هذا التقرير لن تكون سهلة ولا تعطي فكرة عن توزع المعلمين وفقاً
لأعمارهم.

2. إنشاء جدول تكراري بأعمار المعلمين وإرفاق ذلك بالعمر الأدنى والعمر الأقصى ومتوسط
الأعمار. لكن الجدول سيكون كثير الأعمدة (39 عموداً عناوينها 20، 21، ...، 57، 58).
كتابة مثل هذا التقرير وقراءته لن تكون سهلة أيضاً.

3. تجميع الأعمار في فئات مدى كل منها 5 سنوات وإنشاء جدول بهذه الفئات وعدد المعلمين في
كل فئة.

اختار المدير الحل الأخير وأرسل إلى الوزارة الجدول التالي:

الفئة	[20, 25[[25, 30[[30, 35[[35, 40[[40, 45[[45, 50[[50, 55[[55, 60[
العدد	12	23	25	36	24	12	9	2

مرفقًا بالمعلومات التالية:

العمر الأدنى: 20 سنة العمر الأقصى: 58 سنة متوسط الأعمار: 36.66 سنة

كيف وجد المدير متوسط الأعمار؟

لإيجاد المتوسط عندما تكون المعطيات مجمعة في فئات، تقوم بما يلي:

1. تحديد مركز كل فئة وهو متوسط طرفيها.
 2. ضرب مركز كل فئة في عدد العناصر في هذه الفئة.
 3. جمع نواتج الضرب كلها من جهة وأعداد العناصر في مختلف الفئات من جهة أخرى.
 4. قسمة المجموع الأول على المجموع الثاني.
- يلخص الجدول أدناه هذه الخطوات.

الفئة	التكرار (عدد العناصر)	مركز الفئة	التكرار × مركز الفئة
[20, 25[12	22.5	270
[25, 30[23	27.5	632.5
[30, 35[25	32.5	812.5
[35, 40[36	37.5	1350
[40, 45[24	42.5	1020
[45, 50[12	47.5	570
[50, 55[9	52.5	472.5
[55, 60[2	57.5	115
المجموع	143		5242.5

انتبه!

الفئة [20, 25[تعني الأعمار التي لا تقل عن 20 وتقل عن 25.

ملاحظة يمكن استخدام الرمز $[0, 10)$ بدلاً من $[0, 10]$ وقس على هذا...

أجرى أستاذ رياضيات في جامعة صلاح الدين اختباراً لطلابه، ولخص النتائج في الجدول التالي:

الفئة	[0, 10[[10, 20[[20, 30[[30, 40[[40, 50[[50, 60[[60, 70[[70, 80[[80, 90[[90, 100[
التكرار	2	3	4	5	7	11	11	12	4	1

مثال

كم كان متوسط درجات الطلاب.

الحل

الفترة	التكرار (عدد العناصر)	مركز الفترة	التكرار × مركز الفترة
[0, 10[2	5	10
[10, 20[3	15	45
[20, 30[4	25	100
[30, 40[5	35	175
[40, 50[7	45	315
[50, 60[11	55	605
[60, 70[11	65	715
[70, 80[12	75	900
[80, 90[4	85	340
[90, 100]	1	95	95
المجموع	60		3300

متوسط درجات الطلاب: $\bar{x} = \frac{3300}{60} = 55$.

حاول جد متوسط المعطيات التي يُبينها الجدول التالي:

الفترة	[0, 10[[10, 20[[20, 30[[30, 40[[40, 50[[50, 60[[60, 70[
التكرار	2	3	4	5	7	11	11

Median

الوسيط

6 مثال في استعراض الفرق الرياضية، رغب مدرب فريق رفع الأثقال في إطلاق حمامة بيضاء أمام المنصة. كان أفراد الفريق مرتبين وفقاً لأطوالهم. قرر المدرب الطلب إلى اللاعبين الموجود في الوسط أن يُطلق الحمامة. من سيطلق الحمامة استناداً إلى معطيات الجدول التالي:

الاسم	رزكار	توما	محمود	دارا	سرود	عبد الله	شيرزاد
الطول (cm)	154	177	165	149	180	172	159

الحل

علينا أن نعيد ترتيب الجدول بما يتطابق مع ترتيب اللاعبين في الاستعراض. كانوا مرتبين من الأطول إلى الأقصر.

الاسم	سرود	توما	عبد الله	محمود	شيرزاد	رزكار	دارا
الطول (cm)	180	177	172	165	159	154	149

يقع محمود في الوسط لأن عدد أفراد الفريق الذين هم أمامه يساوي عدد الذين هم وراءه. سيطلق محمود الحمامة.

نقول، في المثال السابق، أن محمود هو وسيط **Median** الفريق.
بصورة عامة، فإن وسيط مجموعة من القيم هو القيمة التي تقسم المجموعة بعد ترتيبها إلى قسمين متساويين في العدد. إذا كان عدد القيم فردياً، فالوسيط هو القيمة الواقعة في الوسط، وإذا كان زوجياً فهو متوسط القيمتين الواقعتين في الوسط.

مثال

ما وسيط القيم التالية: 52، 58، 50، 63، 57، 55؟

الحل

نبدأ بترتيب هذه الدرجات. سوف نرتبها من الكبرى إلى الصغرى.

50، 52، 55، 57، 58، 63

بما أن عدد القيم زوجي، فالوسيط هو متوسط القيمتين في الوسط إنه $\frac{55+57}{2} = 56$.

تحد

قام إبراهيم بإيجاد وسيط القيم التالية: 37، 21، 59، 43، 60، ووجد 59. هل أصاب إبراهيم أم أخطأ؟ اشرح الخطأ إن وجد.

Mode

المنوال

دون أحد بائعي الأحذية مبيعاته للشهر الماضي في جدول وفق القياسات.

القياس	36	37	38	39	40	41	42	43	44
العدد	1	3	5	26	41	45	44	12	8

نلاحظ أن القياس 41 كان الأكثر مبيعاً، لأن ما بيع منه كان أكبر مما بيع من أي قياس آخر. نقول عنه أنه منوال مجموعة المعطيات حول الأحذية التي باعها التاجر في الشهر الماضي.
منوال Mode مجموعة من المعطيات هو المعطى الذي يتكرر أكثر من غيره من المعطيات الأخرى في المجموعة.

قد لا يكون لمجموعة قيم منوال كما يُمكن أن يكون لها أكثر من منوال.

مثال

أجرى دارا استقصاء حول اللون الذي يُفضله طلاب صفه، ونظم النتيجة في الجدول التالي:

اللون	الأحمر	الأصفر	الأزرق	الأخضر	البنّي	الأسود	الأبيض
العدد	8	3	10	8	10	6	1

ما منوال مجموعة المعطيات هذه؟

الحل

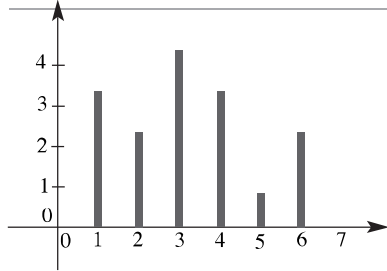
نلاحظ أن اللونين الأزرق والبنّي هما الأكثر تفضيلاً لدى طلاب الصف. لمجموعة المعطيات هذه منوالان هما اللون الأزرق واللون البنّي.

مثال 9

كانت درجات الحرارة في الأسبوع الأول من شهر شباط في أربيل كما يلي: 3، -1، 0، 2، -2، 4، 6. ما منوال هذه المعطيات؟

الحل

لا منوال لهذه المعطيات ذلك أن تكراراتها متساوية.



ما منوال مجموعة المعطيات الممثلة بالأعمدة البيانية؟

تحديد

Mode for grouped data

منوال المعطيات المجمعة

بالعودة إلى الجدول الذي أرسله مدير دورة المعلمين في دهوك

الفئة العمرية	[20, 25]	[25, 30]	[30, 35]	[35, 40]	[40, 45]	[45, 50]	[50, 55]	[55, 60]
عدد المعلمين	12	23	25	36	24	12	9	2

يمكننا الحديث عن الفئة المنوالية. إنها بكل بساطة، الفئة ذات التكرار الأكبر. الفئة المنوالية لأعمار المتدربين هي الفئة [35, 40].

مثال 10

ما الفئة المنوالية للمعطيات المجمعة التالية؟

الفئة	[8, 15]	[15, 22]	[22, 29]	[29, 36]	[36, 43]
التكرار	2	8	4	5	1

الحل

الفئة المنوالية هي [15, 22] لأن تكرارها هو الأكبر.

التمارين

التواصل في الرياضيات

- 1 أي قياس هو الأسهل تحديداً: المتوسط أم الوسيط أم المنوال؟ أيها أصعب تحديداً؟ أوضح ذلك.
- 2 افترض أنك حذف من مجموعة قيم القيمة الأكبر والقيمة الأصغر. هل يتغير الوسيط؟ هل يتغير المتوسط؟ أوضح ذلك.
- 3 أي من القياسات الثلاثة، المتوسط أم الوسيط أم المنوال، أفضل تمثيلاً للدرجات التي حصل عليها طلاب الصف العاشر: 85، 83، 80، 88، 21، 79، 12، 90؟ أوضح ذلك.

تمارين موجّهة

جد، لكل مجموعة معطيات، المتوسط والوسيط والمنوال.

4 { 50, 77, 65, 70, 83, 90, 55 }

5 { 2, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 8 }

6 { 10, 14, 18, 22, 26 }

7 كان عدد ساعات العمل لعشرة من عمال أحد المصانع كما يلي: 0, 33, 38, 34, 40, 36, 37, 35, 32, 40.

أ جد المتوسط والوسيط والمنوال لهذه المعطيات.

ب أي من المقاييس الثلاثة يمثل بشكل أفضل عدد ساعات العمل المثالي. أوضح ذلك.

8 جد المتوسط المثقل للأجر اليومي وفقاً للمعطيات الممثلة بالجدول التكراري.

10	9	8	7	6	5	الأجر بالآلاف الدنانير
7	5	8	10	6	4	عدد العمال

9 جد المتوسط والفئة المنوالية للمعطيات المجمعة.

[50, 55[[45, 50[[40, 45[[35, 40[[30, 35[الفئة
4	7	10	3	6	العدد

تمارين وتطبيقات

جد، لكل مجموعة معطيات، المتوسط والوسيط والمنوال.

10 { 28, 12, 5, 7, 28, 45, 31, 20 }

11 { 32, 10, 13, 15, 10, 45, 32, 78 }

12 { 4, 12, 5, 9, 7, 12, 10, 5, 17 }

13 { 76, 82, 63, 58, 39, 67, 44, 83 }

14 كان عدد الطلاب الغائبين عن المدرسة في الأيام الماضية كما يلي: 1, 0, 3, 4, 1, 0, 2, 0, 3, 1, 4, 3, 1, 4, 3, 1, 0, 2, 1, 0, 4, 3, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 2 نظم هذه المعطيات في جدول تكراري ثم جد المتوسط المثقل والوسيط والمنوال.

15 فيما يلي معطيات عن عدد الأميال التي تقطعها بعض السيارات باستهلاك غالون من الوقود: 23, 19, 18, 21, 30, 24, 26, 32, 30, 22, 12, 15, 21, 28, 27, 18, 16, 19, 23, 29, 24, 25, 16. جَمِّع هذه المعطيات في جدول فئات تكراري ثم جد المتوسط والفئة المنوالية.

16 تقوم آلة بتوزيع المشروبات. من المفروض أن تسكب الآلة 8 أونصات في كل كأس. قامت الشركة التي تصنع هذه الآلة بقياس محتويات 40 كأساً، عبأتها الآلة، لتتأكد من حسن عملها. كانت نتائج هذا الاختبار كما يلي:

8.0	8.0	7.6	7.9	8.0	7.8	8.0	7.6	7.9	7.8
8.0	7.6	7.9	8.2	8.0	7.8	7.9	7.8	7.9	7.5
8.2	8.0	7.8	7.8	8.0	7.5	7.9	8.1	8.1	7.6
8.2	8.0	7.8	7.8	8.0	7.5	7.9	8.1	8.1	7.9

- أ جِد المتوسط والوسيط والمنوال لهذه المعطيات وقارن بين المقاييس الثلاثة.
ب هل تعتقد أن زعم الشركة أن الآلة تسكب في الكأس حوالي 8 أونصات، صحيح؟

17 كانت درجات سردار في الاختبارات السابقة 86، 72، 85، 90. ما متوسط درجاته حتى الآن؟
ما الدرجة الأدنى التي عليه تحصيلها في الاختبار المقبل لئلا يقل متوسط درجاته الجديد عن 80؟

18 يُبيّن الجدول أدناه النسب المئوية لتوزيع القوى العاملة وفقاً للعمر في أحد البلدان.

العمر	1979	1992	2005
[16, 25[24%	16%	16%
[25, 35[27%	28%	21%
[35, 45[19%	27%	25%
[45, 55[16%	18%	24%
[55, 65[14%	12%	14%

- أ أنشئ جدولاً لكل سنة.
ب جِد متوسط عمر القوى العاملة في كل سنة.
ج قارن بين المتوسطات الثلاثة. ما الاستنتاج الذي تخلص إليه؟

نظرة إلى الوراء

19 رمى زانا قطعة نقود معدنية 3 مرات متتالية. أنشئ مخطط شجرة يُبيّن مختلف النتائج الممكنة. ما احتمال ظهور الوجه نفسه في المرات الثلاث؟

نظرة إلى الأمام

20 رمى زانا قطعة نقود معدنية 3 مرات متتالية. أنشئ مخطط شجرة يُبيّن مختلف النتائج الممكنة. ما احتمال ظهور الصورة مرتين علمًا بأن الصورة ظهرت في المرة الأولى؟

Measures of dispersion

قياسات التشتت



لماذا

يُمكنك استعمال قياسات
التشتت للمقارنة بين مجموعتي
درجات الطلاب في امتحاني
مادتين.

الدرس
2

الأهداف

- نحسب قياسات التشتت
مثل المدى والانحراف
الوسطي والتباين
والانحراف المعياري
ونستعملها.

Concept of Dispersion

مفهوم التشتت

درجات الطلاب في علم الاجتماع
55
42
66
55
54
48
59
45
52
51
60
50

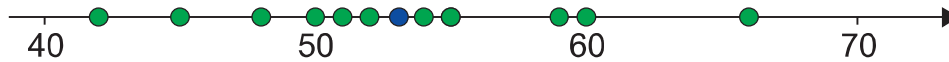
درجات الطلاب في الرياضيات
35
32
95
7
54
8
59
84
77
33
60
50

يُبين الجدولان المقابلان
درجات الطلاب في مادتي
الرياضيات وعلم الاجتماع
في امتحانات نهاية الفصل
الدراسي الأول، يبلغ متوسط
الدرجات في الرياضيات
53.5 وفي علم الاجتماع 53.08،
إذا مثلنا قيم الجدولين على
محور الأعداد لوجدنا:

تطبيقات



تمثيل معطيات الجدول الأول على محور الأعداد



تمثيل معطيات الجدول الثاني على محور الأعداد

لاحظ أن متوسط الجدول الثاني (53.08) يعبر عن مجموعة قيمه حيث أن القيم قريبة من المتوسط، في حين أن متوسط الجدول الأول (53.5) لا يعبر عن قيمه إلا جزئياً لأن أكثرها بعيد عن المتوسط. نَصِفُ ذلك بالقول إن مجموعة قيم الجدول الأول أكثر تشتتاً من قيم الجدول الثاني.

Meseures of Dispersion

قياسات التشتت

يستعمل الإحصائيون عدداً من القياسات لقياس مدى تشتت مجموعة قيم.
المدى Range: المدى هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في المجموعة.

المدى = القيمة الكبرى - القيمة الصغرى

هل تعتبر أن المدى يعبر عن تشتت مجموعة قيم؟

تفكير ناقد

الانحراف المتوسط Mean Deviation: إنه متوسط انحراف أو ابتعاد قيم المجموعة عن متوسطها، لكي نحسب الانحراف المتوسط لمجموعة $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ من القيم نحسب انحراف كل منها عن المتوسط \bar{x} . أي $|x_1 - \bar{x}|, |x_2 - \bar{x}|, \dots, |x_n - \bar{x}|$ ثم نحسب متوسط هذه الانحرافات.

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{1}{n} (|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|)$$

لماذا يستعمل الإحصائيون المقدار $|x_k - \bar{x}|$ لحساب انحراف القيمة x_k عن المتوسط \bar{x} ولا يستعملون $x_k - \bar{x}$ بدلاً منها؟

تفكير ناقد

مثال

أجرت إحدى الشركات التي تصنع عجلات السيارات 5 تجارب على نوعين من العجلات، وسجلت عدد الكيلومترات التي خدمت فيها العجلات قبل أن تصبح غير صالحة. يبين الجدول أدناه نتائج هذه الاختبارات بآلاف الكيلومترات.

العجلة 1	66	43	37	50	54
العجلة 2	54	49	47	48	52

أ) احسب المدى والانحراف المتوسط لعدد الكيلومترات لكل نوع من العجلات.

ب) اشرح ما تدل عليه هذه القياسات حول كل نوع من العجلات.

الحل

العجلة 1

المدى: $66 - 37 = 29$

أي 29000 km

لكي تحسب الانحراف المتوسط، ابدأ بحساب

المتوسط:

$$\bar{x} = \frac{54+50+37+43+66}{5} = 50$$

احسب بعد ذلك انحراف كل قيمة عن

المتوسط.

لأجل ذلك، أنشئ الجدول التالي:

$ x_k - \bar{x} $	x_k
16	66
7	43
13	37
0	50
4	54

بعد ذلك، احسب متوسط الانحرافات،

فتحصل على:

$$\frac{16+7+13+0+4}{5} = 8$$

أي 8000 km

العجلة 2

المدى: $54 - 47 = 7$

أي 7000 km

لكي تحسب الانحراف المتوسط، ابدأ بحساب

المتوسط:

$$\bar{x} = \frac{52+48+47+49+54}{5} = 50$$

احسب بعد ذلك انحراف كل قيمة

عن المتوسط.

لأجل ذلك، أنشئ الجدول التالي:

$ x_k - \bar{x} $	x_k
4	54
1	49
3	47
2	48
2	52

بعد ذلك، احسب متوسط الانحرافات،

تحصل على:

$$\frac{4+1+3+2+2}{5} = 2.4$$

أي 2400 km

ب) لاحظ أن الانحراف المتوسط للعجلة 2 أقل من مثيله للعجلة 1، مما يسمح لك بالقول إن

متوسط معطيات العجلة 2 أكثر ثقة. وهكذا فإن تخمينات المسافة التي تقطعها العجلة 2 قبل

أن تصبح غير صالحة هي أكثر وثوقاً.

حاول

احسب المدى والانحراف المتوسط لمعطيات العجلة 3، وقارنها مع القياسات العائدة للعجلتين السابقتين.

العجلة 3	64	52	50	49	35
----------	----	----	----	----	----

نقطة مراقبة ✓

هل يمكن أن تكون لمجموعتي معطيات المدى نفسه والانحراف المتوسط نفسه؟ برّر إجابتك بإعطاء مثال.

التباين والانحراف المعياري: هما قياسان للتشتت يُستعملان في مقارنة المعطيات وتحليلها.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \right) : \text{التباين Variance}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} : \text{Standard Deviation الانحراف المعياري}$$

مثال

احسب الانحراف المعياري لمسافات العجلتين في المثال السابق.

الحل

العجلة 2

$$\bar{x} = \frac{52+48+47+49+54}{5} = 50$$

أنشئ الجدول التالي لتنظيم ما تحسب:

x_k	$x_k - \bar{x}$	$(x_k - \bar{x})^2$
54	4	16
49	-1	1
47	-3	9
48	-2	4
52	2	4
المجموع	0	34

$$\sigma^2 = \frac{34}{5} = 6.8 : \text{التباين}$$

الانحراف المعياري: $\sigma = 2.6$ أي 2600km .

العجلة 1

$$\bar{x} = \frac{54+50+37+43+66}{5} = 50$$

أنشئ الجدول التالي لتنظيم ما تحسب:

x_k	$(x_k - \bar{x})$	$(x_k - \bar{x})^2$
66	16	256
43	-7	49
37	-13	169
50	0	0
54	4	16
المجموع	0	490

$$\sigma^2 = \frac{490}{5} = 98 : \text{التباين}$$

الانحراف المعياري: $\sigma = 9.9$ أي 9900km .

هذه النتائج تؤكد ما توصلت إليه في المثال السابق حيث أن الانحراف المعياري العائد إلى العجلة 2 هو أقل من ذلك العائد إلى العجلة 1.

حاول

ما الانحراف المعياري للعجلة 3 ؟

نقطة مراقبة ✓

إذا كان الانحراف المعياري لعجلة رابعة يساوي 1500 km ، فماذا تقول عن هذه العجلة قياساً على العجلتين 1 و 2 ؟

تفكير ناقد

أي القياسين يستعمل أكثر برأيك: التباين أم الانحراف المعياري؟ لماذا؟
بالعودة إلى درجات الطلاب في مادتي الرياضيات وعلم الاجتماع بيّن الجدول أدناه قياسات التشتت لدرجات الطلاب في هاتين المادتين.

القياس	الرياضيات	علم الاجتماع
المدى	28	24
الانحراف المتوسط	22.08	5.08
التباين	721.89	40.85
الانحراف المعياري	26.7	6.37

علم الاجتماع	الرياضيات
1-Var Stats x=49.5 Σx=594 Σx²=37958 Sx=27.88776206 σx=26.70049937 ↓n=12	1-Var Stats x=53.08333333 Σx=637 Σx²=34301 Sx=6.653206108 σx=6.369959881 ↓n=12
المتوسط	المتوسط
الانحراف المعياري	الانحراف المعياري

وهكذا نجد أن درجات الطلاب في مادة الرياضيات أقل تشتتاً منها في مادة علم الاجتماع، لأن الانحراف المعياري للمادة الأولى أقل من مثيله للمادة الثانية.

التمارين**التواصل في الرياضيات**

- 1 اشرح لماذا يكون كل من الانحراف المتوسط والانحراف المعياري عددًا غير سالب.
- 2 اشرح العلاقة بين التباين والانحراف المعياري. هل الانحراف المعياري هو دائماً أقل من التباين؟
- 3 اشرح لماذا يعبر كل من الانحراف المتوسط والانحراف المعياري عن التشتت أكثر من المدى.

تمارين موجهة

عمر	خلدون
81	98
84	68
88	99
82	59
85	96

- 4 **تربية وتعليم** بيّن الجدول المقابل درجات طالبين في 5 امتحانات. احسب المدى والانحراف المتوسط لعلامات كل من الطالبين، وشرح ما تشير إليه هذه القياسات.
- 5 احسب الانحراف المعياري لعلامات كل من الطالبين.

تطبيقات

تمارين وتطبيقات

احسب المدى والانحراف المتوسط.

- 6 10 ; 8 ; 3 ; 9 ; 10
7 6 ; 2 ; 4 ; 2 ; 1
8 31 ; 103 ; 34 ; 98 ; 107 ; 23
9 32 ; 23 ; 68 ; 74 ; 26 ; 93
10 32 ; 23 ; 68 ; 74 ; 26 ; 93
11 11.1 ; 14.2 ; 8.4 ; 12.2 ; 15.2 ; 10.9
12 -1.22 ; 4.53 ; -2.42 ; 2.33 ; 4.66
13 8.72 ; 7.43 ; -2.92 ; -3.56 ; 5.78

احسب التباين والانحراف المعياري.

- 14 9 ; 10 ; 10 ; 8 ; 7 ; 11 ; 12 ; 9
15 8.1 ; 10.3 ; 3.4 ; 9.8 ; 10.7
16 -3 ; 2 ; -5 ; 4 ; -2 ; 8 ; 9 ; -1
17 2 ; 4 ; -8 ; 8 ; 7 ; -2 ; -4 ; 3 ; 7

احسب الانحراف المتوسط والانحراف المعياري. أي قياس من القياسين أقل تأثراً بالقيمة المتطرفة؟

- 18 20 ; 30 ; 40 ; 500
19 0 ; 500 ; 510 ; 520

20 أنشئ مجموعتي قيم لهما المدى نفسه، وانحرافهما المعياريان مختلفان.

21 هل يمكن للانحراف المعياري لمجموعة قيم أن يساوي صفراً؟ إذا كان هذا ممكناً، حدد شروط تحققه. استعمل مثلاً في شرحك.

22 **استطلاع رأي** طُلب إلى 30 شخصاً أن يعطوا رأيهم بأحد المرطبات عن طريق إعطاء علامة من 1 إلى 10. احسب المدى والانحراف المتوسط والانحراف المعياري لنتائج الاستطلاع المبينة في الجدول المقابل.

10	8	6	9	7	5
8	7	9	8	8	7
8	6	9	7	8	10
10	10	8	9	10	8
9	7	7	8	9	7

رياضة يبين الجدول أدناه الأرقام القياسية (بالدقائق والثواني والأجزاء من المئة من الثانية) للرجال والنساء في التزلج على الجليد، في عدد من دورات الألعاب الأولمبية:

1998	1994	1992	1988	1984	1980	1976	
1:47.87	1:51.29	1:54.81	1:52.06	1:58.36	1:55.44	1:59.38	رجال
1:57.58	2:02.19	2:05.87	2:00.68	2:03.42	2:10.95	2:16.58	نساء

تحديد

ربط

تطبيقات



23 احسب المتوسط والوسيط للأرقام القياسية للرجال والنساء.

24 احسب المدى والانحراف المتوسط للرجال والنساء. ما الذي تخبرنا به هذه القياسات عن الأرقام القياسية للرجال والنساء؟

25 احسب الانحراف المعياري للرجال والنساء. ما الذي تخبرنا به هذه القياسات عن الأرقام القياسية للرجال والنساء؟

نظرة إلى الوراء

احسب.

29 p_3^{21}

28 p_3^{17}

27 C_3^{10}

26 C_3^8

نظرة إلى الأمام

30 غالباً ما يلجأ الإحصائيون إلى استعمال عينة لدراسة مجموعة كبيرة من القيم، وينطلقون من القياسات الإحصائية للعينة كي يقدروا القياسات الإحصائية للمجموعة ككل. فهم يعتبرون أن متوسط العينة يعبر عن متوسط المجموعة. أما الانحراف المعياري، فإنهم يحسبون لأجله تباين العينة بقانون يختلف قليلاً عن قانون احتساب التباين في المجموعة كاملة. إنهم يستعملون القانون التالي.

$$\sigma^2 = \frac{1}{(n-1)} \left((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \right)$$

تباين العينة:

أ احسب التباين والانحراف المعياري للعينة التالية: 15؛ 18؛ 7؛ 16؛ 5؛ 12.

ب بغية حساب متوسط عدد السيارات في العائلة الواحدة، قام المجلس البلدي لإحدى المدن باستعمال عينة من 10 عائلات جرى اختيارها بشكل عشوائي. وقد أعطى استطلاع هذه العينة الأعداد التالية: 2؛ 3؛ 1؛ 4؛ 2؛ 1؛ 4؛ 3؛ 4. قدر متوسط عدد السيارات في العائلة الواحدة، وقدر الانحراف المعياري.

علم المثلثات Trigonometry

بين أضلاع المثلث وزواياه علاقات مهمّة يدرسها علم قديم حديث هو علم المثلثات. منذ القدم اهتم الإنسان بالمثلثات. وفي هذه الصفحة صور تدلّ على ذلك. لعلم المثلثات تطبيقات واسعة في الفيزياء وعلم الفلك والعمارة والهندسة وغيرها.

الفصل

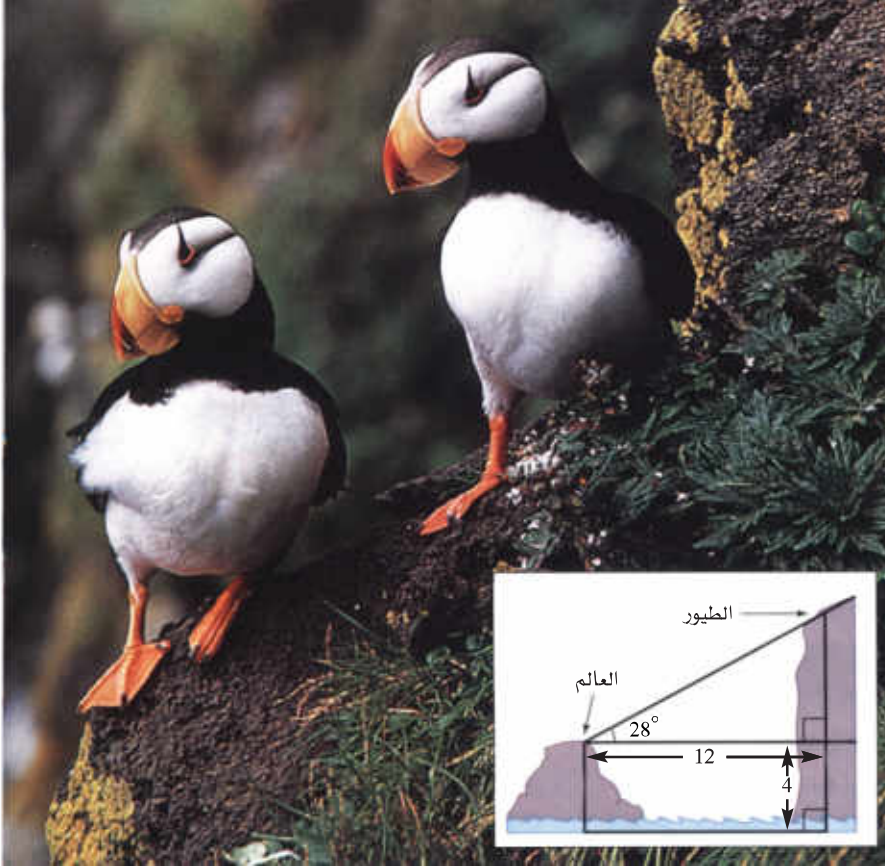
5

الدروس

1. النسب المثلثية وحل المثلث القائم

النسب المثلثية Trigonometric Ratios and

وحلّ المثلث القائم Solving Right Triangle



الدرس

1

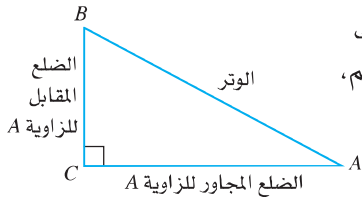
الأهداف

- نميّر النسب المثلثية
- لزاوية حادة ونحسبها.
- نحلّ مثلثاً قائماً
- باستعمال النسب المثلثية.

لماذا

يمكنك استعمال النسب المثلثية في المثلث القائم لحلّ مسائل من الواقع كأن تُحدّد ارتفاع موقع الطيور في الصورة عن سطح الماء.

يقوم أحد العلماء بتصوير مجموعة من الطيور تقف على منحدر جبلي، لحساب ارتفاع هذه الطيور عن سطح الماء. قاس العالم الزاوية التي يشكّلها خطّ النظر إلى الطيور مع خطّ أفقيّ، فوجد أنها 28° ، كيف يحسب العالم ارتفاع موقع الطيور عن سطح الماء، علماً بأنه يقف على علوّ 4 أمتار، وأن المسافة بينه وبين المنحدر 12 متراً؟



لكي تحسب ارتفاع موقع الطيور، استعمال علم المثلثات. يمكنك استعمال علم المثلثات لإيجاد قياس زاوية، من زوايا مثلث قائم، أو طول ضلع من أضلاعه.

تذكّر أن وتر المثلث القائم هو الضلع الذي يقابل الزاوية القائمة. في المثلث الوارد إلى اليسار، تجد أن الضلع \overline{AB}

هو الوتر Hypotenuse، والضلع \overline{AC} هو الضلع المجاور Adjacent للزاوية A، والضلع \overline{BC} هو الضلع المقابل Opposite لها.

حدّد الضلع المجاور للزاوية B والضلع المقابل لها.

تطبيقات

طيور

نقطة مراقبة ✓

النسب المثلثية للزاوية \hat{A} Trigonometric Ratios of \hat{A}

$$\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = A \text{ ظل}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC}$$

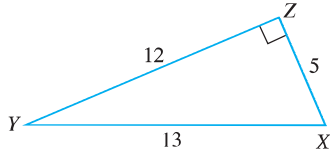
$$\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = A \text{ جيب تمام}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = A \text{ جيب}$$

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

الكتابة



احسب النسب المثلثية الثلاث للزاوية X في المثلث المقابل. أعط أجوبة مضبوطة، وأجوبة مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

الحل

$$\sin X = \frac{12}{13} \approx 0.923$$

$$\tan X = \frac{12}{5} = 2.4$$

$$\cos X = \frac{5}{13} \approx 0.3846$$

مثال

احسب النسب المثلثية الثلاث للزاوية Y في المثلث أعلاه. أعط أجوبة مضبوطة وأجوبة مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

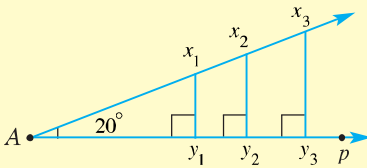
حاول

النشاط

Exploring Trigonometric Ratios

استكشاف النسب المثلثية

يلزمك منقلة ومسطرة سنتيمترية وحاسبة. أنشئ جدولاً مُشابهاً للجدول أدناه.



1. انسخ ما ورد في الجدول، ثم أكمله عن طريق قياس الأضلاع المذكورة، وحساب النسب المثلثية للزاوية A .
2. هل القيم التي كتبتها في عمود $\sin A$ متساوية تقريباً؟ هل الأمر كذلك في عمود $\cos A$ ؟ في عمود $\tan A$ ؟

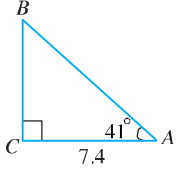
المثلث	مقابل \hat{A}	مجاور \hat{A}	وتر	$\sin A = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$	$\cos A = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$	$\tan A = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$
Ax_1y_1						
Ax_2y_2						
Ax_3y_3						

3. قارن النتائج التي توصلت إليها مع نتائج زملائك في الصف.
4. هل تستطيع صياغة فرضية حول النسب المثلثية الثلاث للزاوية A ؟

نقطة مراقبة ✓

لا تتغير قيم النسب المثلثية لزاوية حادة بتغير المثلث القائم الذي استعمل لحسابها، كما ظهر لك ذلك خلال قيامك بالنشاط أعلاه. تتحدد قيم هذه النسب بقياس الزاوية فقط.

يمكنك الحصول على قيم النسب المثلثية لزاوية علم قياسها، باستعمال الحاسبة العلمية. ويمكنك استعمال النسب المثلثية لكي تجد أطوال بعض أضلاع المثلث القائم، كما يبين ذلك المثال 2.



2 احسب أطوال أضلاع المثلث المقابل.

مثال

الحل

بما أن طول الضلع \overline{AC} معروف، فينبغي قياس طول كل من \overline{BC} و \overline{AB} .
استعمل $\cos A$ لتجد طول الوتر \overline{AB} ، واستعمل $\tan A$ لتجد طول الضلع \overline{BC} .

$$\tan A = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan 41^\circ = \frac{BC}{7.4}$$

$$\cos 41^\circ = \frac{7.4}{AB}$$

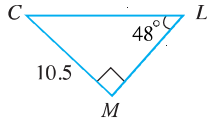
$$BC = 7.4 \times \tan 41^\circ$$

$$AB = \frac{7.4}{\cos 41^\circ}$$

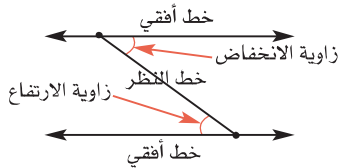
$$BC \approx 7.4 \times 0.8693$$

$$AB \approx \frac{7.4}{0.7547} \approx 9.8$$

$$BC \approx 6.4$$



حاول احسب أطوال أضلاع المثلث المقابل.



زاوية الارتفاع Angle of Elevation هي الزاوية التي يكونها خط أفقي مع خط النظر إلى نقطة أعلى منه.

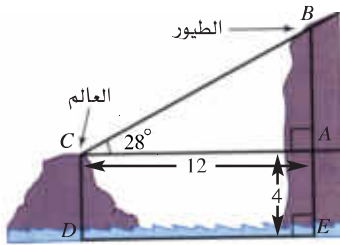
زاوية الانخفاض Angle of Depression هي الزاوية التي يكونها خط أفقي مع خط النظر إلى نقطة أدنى منه.

3 بالعودة إلى المسألة المطروحة في أول الدرس، احسب ارتفاع موقع الطيور عن سطح الماء.

مثال

الحل

يمثل طول القطعة المستقيمة BE ارتفاع موقع الطيور عن سطح الماء. بما أن $BE = BA + AE$ ،
وبما أن $AE = CD = 4$ ، فإن عليك أن تحسب طول AB .



$$\tan 28^\circ = \frac{AB}{12}$$

$$AB = 12 \times \tan 28^\circ$$

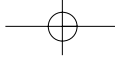
$$AB \approx 6.38$$

$$BE = BA + AE \approx 6.38 + 4 \approx 10.3$$

وبالتالي يرتفع موقع الطيور عن سطح الماء 10.38 m تقريباً.

تطبيقات

طيور



يمكنك استعمال الحاسبة العلمية لتجد قياس زاوية علمت إحدى نسبها المثلثية باستعمال المفاتيح

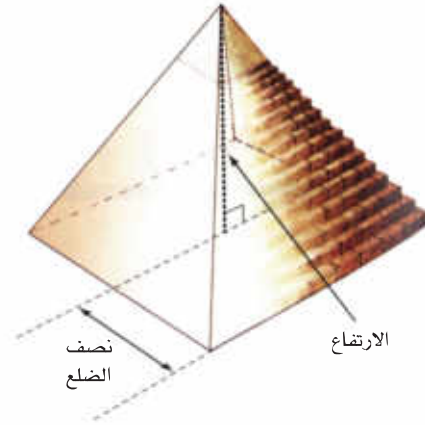
$$\boxed{\text{TAN}^{-1}} \quad \boxed{\text{COS}^{-1}} \quad \boxed{\text{SIN}^{-1}}$$

فإذا كان $\tan A = \frac{4}{3}$ فإن قياس الزاوية A هو $\tan^{-1} \frac{4}{3} \approx 53^\circ$.

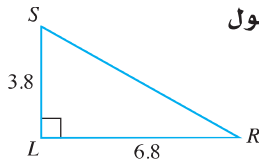
للاطلاع: نافذة على الثقافة الفرعونية استعمل الفراغ علاقة مثلثية أسموها سيكد للدلالة على ميل وجه الهرم.

$$1 \text{ سيكد} = \frac{\text{نصف قياس ضلع قاعدة الهرم (بالشبر)}}{\text{ارتفاع الهرم بالكيوبت (الكيوبت = 7 أشبار)}}$$

لاحظ أن السيكد يماثل مقلوب ظل الزاوية. وهو ما يُسمى ظل تمام الزاوية Cotangent أو \cot اختصاراً.



أن تحلّ مثلثاً قائماً **Solve a Right Triangle** يعني أن تحسب قياسات زوايا المثلث وأطوال أضلاعه المجهولة. تستعمل في عملك هذا الحاسبة العلمية، لتجد قياس زاوية عرفت إحدى نسبها المثلثية. وتستعمل أيضاً حقيقة أن مجموع زوايا المثلث هو 180° ، أي إن مجموع الزاويتين الحادتين في مثلث قائم هو 90° ، وتستعمل أخيراً مبرهنة فيثاغورس.



مثال 4 حلّ المثلث المقابل بحساب قياس الزوايا مقرباً إلى أقرب درجة، وطول الوتر مقرباً إلى أقرب عُشر.

الحل

$$1. \tan R = \frac{3.8}{6.8}$$

$$R = \tan^{-1} \frac{3.8}{6.8} \approx 29^\circ$$

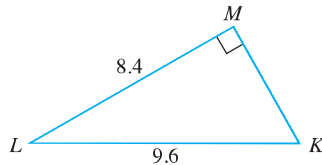
2. بما أن مجموع الزاويتين الحادتين 90° ، فإن قياس الزاوية S هو $90^\circ - 29^\circ = 61^\circ$ تقريباً.

3. استعمل نظرية مبرهنة فيثاغورس لحساب طول الوتر.

$$(RS)^2 = (6.8)^2 + (3.8)^2$$

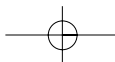
$$RS = \sqrt{(6.8)^2 + (3.8)^2}$$

$$RS \approx 7.8$$



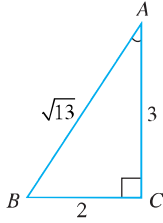
حاول حلّ المثلث المقابل بحساب قياس الزوايا مقرباً إلى أقرب درجة، وطول الضلع مقرباً إلى أقرب عُشر.

- تفكير ناقد**
1. كيف تحلّ المثلث، في المثال 4، بادئاً بحساب طول الوتر، ثم استعمال الجيب أو جيب التمام لإيجاد قياس زواياه؟
 2. بعد حسابك قياس \hat{R} ، هل بإمكانك حساب طول الوتر دون استعمال نظرية فيثاغورس؟



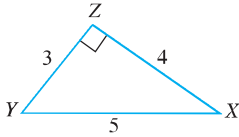
التمارين

التواصل في الرياضيات

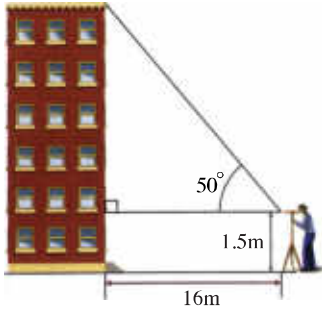
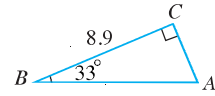


- 1 كيف تحسب النسب المثلثية للزاوية A في المثلث المقابل.
- 2 كيف تجد قياسَي الزاويتين A و B في المثلث المقابل.
- 3 ما الفرق بين $\sin^{-1} A$ و $\frac{1}{\sin A}$ ؟

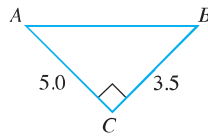
تمارين موجّهة



- 4 احسب النسب المثلثية للزاوية X في المثلث الأيسر. أعطِ الإجابات مضبوطة، ومقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.
- 5 احسب طولَي الضلعين BA و AC في المثلث الأيمن.



- 6 **هندسة** يقف مهندس على بعد 16 m من بناء، وهو ينظر إلى أعلى نقطة فيه، عبر منظار يعلو عن سطح الأرض 1.5m. ما ارتفاع البناء، إذا كان قياس زاوية الارتفاع 50° ؟
- 7 حلّ المثلث أدناه. احسب قياس الزاوية A مقرّباً إلى أقرب درجة، وطول الضلع AB مقرّباً إلى أقرب عُشر.

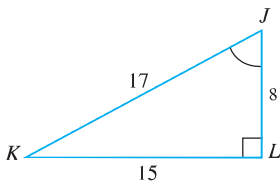


تطبيقات



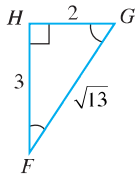
تمارين وتطبيقات

استعمل المثلث JKL لحساب كل قيمة مطلوبة. أعطِ الجواب مضبوطاً، ثم مقرّباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.



- | | | | |
|----------|----|----------|----|
| $\sin J$ | 9 | $\sin K$ | 8 |
| $\cos K$ | 11 | $\cos J$ | 10 |
| $\tan J$ | 13 | $\tan K$ | 12 |

استعمل المثلث $F G H$ لحساب كل قيمة مطلوبة. أعطِ الجواب مضبوطاً، ثم مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.



$\sin F$ **15**

$\sin G$ **14**

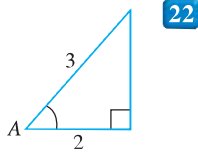
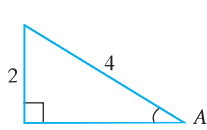
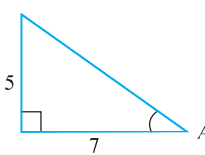
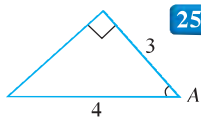
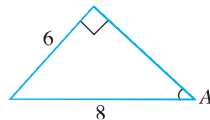
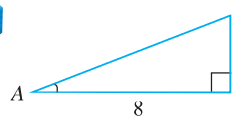
$\cos F$ **17**

$\cos G$ **16**

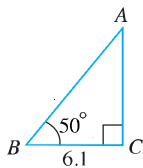
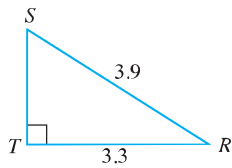
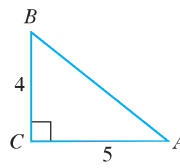
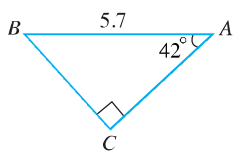
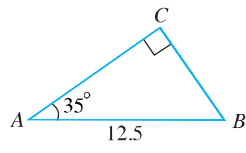
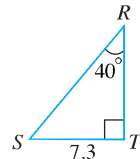
$\tan F$ **19**

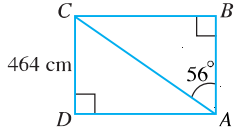
$\tan G$ **18**

احسب قياس الزاوية A باستعمال الحاسبة.


22

21

20

25

24

23

حلّ المثلث. احسب قياس الزوايا مقرباً إلى أقرب درجة، وطول الأضلاع مقرباً إلى أقرب عشر.


28

27

26

31

30

29



32 برهن أن العلاقة $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ ، صحيحة دائماً.

33 هندسة احسب طول كل من الضلع AD والقطر AC في المستطيل المقابل.

34 تجميل البيوت يرغب والد أحمد في إنشاء شرفة لها شكل مثلث قائم. يريد أن يكون وتر المثلث 6 أمتار، وأن يكون ضلعا الزاوية القائمة متطابقين.

أ احسب طول كل ضلع من ضلعي الزاوية القائمة.

ب احسب مساحة الشرفة.

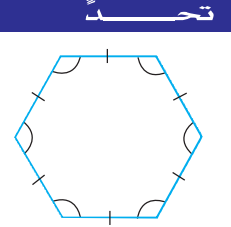
طيران تحلق إحدى الطائرات على ارتفاع 6.5 km. ومن أجل هبوط مريح، قرر ملاحها أن يباشر الهبوط فوراً.

35 احسب قياس الزاوية التي يشكلها خط الهبوط مع خط أفقي، علماً أن الملاح باشر الهبوط على مسافة 186 km من المطار (مسافة مقيسة على الأرض).



36 على أي مسافة من المطار ينبغي أن يباشر الملاح الهبوط لو اختار أن يكون قياس الزاوية التي يشكلها خط الهبوط مع خط أفقي، 5° ؟

37 بناء ترغب إدارة الحديقة العامة ببناء استراحة قاعدتها على شكل سداسي منتظم طول ضلعه 10 أمتار. تبلغ كلفة رصف القاعدة 17 000 دينار للمتر المربع الواحد. استعمل النسب المثلثية لحساب كلفة رصف القاعدة.



نظرة إلى الوراثة

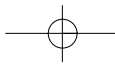
اكتب كل مقدار على أبسط صورة، بعد تنسيب المقام.

41 $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

40 $\frac{5}{1-\sqrt{2}}$

39 $\frac{1}{\sqrt{3}}$

38 $\frac{3}{\sqrt{2}}$



احسب متوسط كل مجموعة قيم، ثم احسب انحرافها المعياري.

42 12، 34، 18، 25، 53، 46، 17، 14، 25، 36، 24، 19، 17، 28، 26، 22

43 102، 107، 122، 99، 103، 121، 113، 100، 78، 130، 125، 119، 110

نظرة إلى الأمام

44 هندسة إذا دارت نقطة 360° حول مركز الدوران، فإن مسارها دائرة كاملة. ما زاوية

الدوران التي تجعل مسار النقطة نصف دائرة؟ ربع دائرة؟

